Разбор

14.1. Пусть $a > 1$ — натуральное число. Найдите $(a^n - 1, a^m - 1)$.

Ответ. $a^{(n,m)} - 1$. Решение. Пусть $n \geqslant m$. По лемма из алгоритма Евклида

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^n - a^m, a^m - 1) = (a^m(a^{n-m} - 1), a^m - 1).$$

Заметим, что $(a^m, a^m - 1) = (1, a^m - 1) = 1$, поэтому a^m можно убрать. Значит,

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^{n-m} - 1, a^m - 1).$$

Таким образом для пары степеней $(m; n)$ мы из большего числа вычли меньшее. Продолжая, рано или поздно (согласно алгоритму Евклида) мы получим пару (n, m) и 0, то есть

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^{n-m} - 1, a^m - 1) = \ldots = (a^{(n,m)} - 1, a^0 - 1) = a^{(n,m)} - 1.$$

14.2. Пусть p — простое и $n < p < 2n$. Докажите, что C_{2n}^n делится на p.

Решение. $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot n!}$. Заметим, что числитель делится на простое p, а знаменатель — нет. Тогда, так как C_{2n}^n — целое, то оно делися на p.

14.3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

Решение. Упорядочим грибников по количеству грибов, которые каждый из них собрал: $a_1 > a_2 > \ldots > a_7$.

Если $a_3 \geqslant 10$, то $a_2 \geqslant a_3 + 1 \geqslant 11$, $a_1 \geqslant 12$, то есть $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 33$ и утверждение доказано. Если же $a_3 \leqslant 9$, то $a_4 \leqslant a_3 - 1 \leqslant 8$, $a_5 \leqslant 7$, $a_6 \leqslant 6$, $a_7 \leqslant 5$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 26$, а поскольку $a_1 + \ldots + a_7 = 59$, то тогда $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 33$ и утверждение доказано.

14.4. Про целые числа x, y, z известно, что $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Докажите, что $x+y+z$ делится на 27.

Решение. Пусть среди чисел x, y, z есть два, дающие одинаковый остаток при делении на 3. Тогда левая часть равенства делится на 3. Значит, делится на 3 и правая часть, но тогда и третье число дает такой же остаток, что и первые два числа.

Если же среди чисел x, y, z все числа дают различные остатки при делении на 3, то тогда левая часть не делится на 3, а правая делится.

Таким образом, все числа дают одинаковые остатки при делении на 3 и, значит, левая часть, а с ней и правая, делится на 27.

14.5. Для любого положительного числа a докажите неравенство

$$a + a^9 + a^{25} < 1 + a^4 + a^{16} + a^{36}.$$

План решения (XL Уральский турнир юных математиков)

Решение. Для $a \geqslant 1$ сложим неравенства $0 < 1$, $a \leqslant a^4$, $a^9 \leqslant a^{16}$, $a^{25} \leqslant a^{36}$, для $a < 1$ сложим неравенства $a < 1$, $a^9 \leqslant a^4$, $a^{25} \leqslant a^{16}$.

14.6. Точки K и L на стороне AB треугольника ABC таковы, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на BC такова, что $\angle MKC = \angle BKM$. ML — биссектриса угла KMB. Найдите угол MLC.

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. $30°$. Решение. Точка L — центр вневписанной окружности треугольника KCM, значит, KB — биссектриса внешнего угла K этого треугольника. Следовательно, прямые KM и KB делят развернутый угол с вершиной K на три равные части, то есть $\angle CKM = \angle MKB = \angle 60°$. Угол KMB — внешний для треугольника KCM, поэтому $\angle KMB = \angle KCM + 60°$. Угол LMB — внешний для треугольника LCM, откуда $\angle MLC = \angle LMB - \angle LCM = (\angle KMB - \angle KCM)/2 = 30°$.

14.7. Докажите, что если число $2^n + 1$ — простое, то n — степень двойки.

Решение. Пусть это не так. Тогда у n есть нечетный делитель $k > 1$. Тогда

$$2^n + 1 = (2^{n/k} + 1)(2^{(k-1)\cdot n/k} - 2^{(k-2)\cdot n/k} + \ldots - 1),$$

и $2^n + 1$ не простое.