

Меж двух

1. Пусть а) $n = pqr^2$; б) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Найдите сумму делителей числа n .
2. Может ли число делиться на 8 и давать остаток 10 при делении на 12?

3. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.
4. Есть 4 натуральных числа. Могут ли их попарные НОДы образовывать шесть последовательных чисел?
5. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.
6. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?
7. а) Докажите, что для любого натурального n числа

$$2^{2^0} + 1, 2^{2^1} + 1, \dots, 2^{2^n} + 1$$

попарно взаимно просты.

б) Выведите из пункта а), что простых чисел бесконечно много.