Разбор

15.1. Пусть a) $n = pqr^2$;   b) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Найдите сумму делителей числа n.

Ответ. a) $(1+p)(1+q)(1+r+r^2)$;   b) $(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot(1+p_s+\ldots+p_s^{\alpha_s})$. Решение. Докажем только пункт b) (поскольку пункт a) является его частным случаем). Заметим, что все делители числа n имеют вид $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Легко заметить, что после раскрытия скобок каждое из этих слагаемых получится, получится ровно один раз и никаких других слагаемых не возникнет (достаточно взять из первой скобки $p_1^{\beta_1}$, из второй — $p_2^{\beta_2}$, …, из последней — $p_s^{\beta_s}$).

Замечание. Учитывая, что $1 + x + \ldots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$, ответ в пункте b) можно переписать в виде $\dfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$

15.2. Может ли число делится на 8 и давать остаток остаток 10 при делении на 12?

Ответ. Нет, не может. Решение. Заметим, что если число дает остаток 10 при делении на 12, то оно имеет вид $12k+10$, и дает остаток 2 при делении на 4. А число, которое делится на 8, делится и на 4, то есть дает остаток 0 при делении на 4.

Замечание. Если число делится на 4, то при делении на 12 оно может давать остатки только 0, 4 и 8.

15.4. Есть 4 натуральных числа. Могут ли их попарные НОДы образовывать шесть последовательных чисел?

Ответ. Нет, не могут. Решение. Предположим, что это возможно.

Среди 6 подряд идущих чисел имеется ровно два, которые делятся на 3. Тогда существует две различные пары чисел (из исходных четырех), каждое из которых делится на 3. То есть есть как минимум 3 числа (из исходных четырех), каждое из которых делится на 3, но тогда по крайней мере три НОДа должно делится на 3, а у нас их ровно 2, противочерие.

15.6. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?

Официальное решение (Всероссийская олимпиада школьников по математике 2005, 4 этап)

Ответ. 6. Решение. В турнире разыграно не менее 1+2+3+4+5=15 очков, а поскольку за игру команды в сумме набирали не более трех очков, то сыграно не менее пяти игр. Но пять игр не могло произойти, поскольку тогда все игры закончились чьей-либо победой, и не будет команды, набравшей одно очко. За шесть игр это могло случиться, например, так: 1 и 2, 2 и 5, 4 и 5 сыграли вничью, а 3, 4, 5 выиграли у 1.