Ферма и Эйлер

1. В треугольнике ABC проведена чевина CK. На CK выбрана точка L. Докажите, что a) $S_{BLK} : S_{ALK} = S_{BCK} : S_{ACK}$; b) $S_{BLC} : S_{ALC} = S_{BCK} : S_{ACK}$.

2. Вспомните доказательство Малой теоремы Ферма через приведенную систему вычетов и докажите **теорему Эйлера**: пусть $(a, n) = 1$ тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

---

3. Числа p, $2p + 1$ и $4p + 1$ — простые. Найдите p.

4. Пусть $p > 5$ — простое. Докажите, что существует такое натуральное n, что число $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}}$ делится на p.

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{ABO} = S_{CDO}$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — трапеция.

Задумайтесь, а что если пересекаются не отрезки AC и BD, а прямые?

6. Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета *хорошей*, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 6^8.

7. В квадрате 3×3 расставлены числа от 1 до 9 так, что суммы чисел в любой строке, столбце и главных диагоналях равны. Докажите, что сумма квадратов чисел в верхней строчке равна сумме квадратов чисел в нижней.