

Вильсон

1. Докажите, что $(2p - 1)! - p$ делится на p^2 .
 2. а) Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.
б) Катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза — c . С помощью понятия чего найдите его высоту, опущенную на гипотенузу.
-
3. Для скольких натуральных чисел $i < 1000$ существует натуральное число $j < 1000$ такое, что $2^j - 1 : i$?
 4. Назовем натуральное число n *удобным*, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел 1, 2, ..., 1000000 четное число удобных.
 5. а) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = (AB \cdot AC) : (A_1B_1 \cdot A_1C_1)$.
Указание: постройте треугольник, равный $A_1B_1C_1$, у которого одна вершина совпадает с A , а две другие лежат на лучах AB и AC .
б) Докажите с помощью площади, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
 6. Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы минимум половина рёбер оказались разноцветными.
 7. Про натуральные числа $a, b, n > 1$ известно, что $[a, b] = (a - b)^n$. Докажите, что $n = 2$.