

## Функция Эйлера

1. Пусть  $p_i$  — различные простые числа. Найдите а)  $\varphi(p_1^{\alpha_1})$ ; б)  $\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s})$ .
2. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.
3. В таблице  $2011 \times 2011$  расставляются числа 1 и  $-1$  так, чтобы произведения чисел а) во всех строках; б) во всех строках и во всех столбцах были равны 1. Сколькими способами это можно сделать?
4. Докажите, что граф является двудольным (т.е. его вершины можно покрасить правильным образом в два цвета) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.
5. Найдите все натуральные  $n$  такие, что  $n : \varphi(n)$ .
6. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  равны и пересекаются в точке  $O$ . Точка  $P$  внутри треугольника  $AOD$  такова, что  $CD \parallel BP$  и  $AB \parallel CP$ . Докажите, что точка  $P$  лежит на биссектрисе угла  $AOD$ .
7. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x_1} = x_2 + x_3 + \dots + x_{10} \\ \frac{1}{x_2} = x_1 + x_3 + \dots + x_{10} \\ \dots \\ \frac{1}{x_{10}} = x_1 + x_2 + \dots + x_9 \end{array} \right.$$