С Новым, математическим, годом!

1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. Найдите количество чисел, не превосходящих 120, и a) делящихся на 2 или на 3; b) делящихся на 2, на 3 или на 5.

3. Самый высокий математик среди шахматистов и самый высокий шахматист среди математиков — всегда ли это один и тот же человек?

---

4. Докажите, что среди чисел, меньших 1000, поровну чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 12.

5. Сколько существует шестизначных чисел, в которых нет двух рядом стоящих одинаковых цифр?

6. Костя пытается составить "антимагический" квадрат 4×4 из чисел: -1, 0, 1, т. е. такой, что суммы чисел по вертикалям, горизонталям и двум диагоналям различны. Удастся ли это ему?

7. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. a) Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду. b) Верно ли утверждение пункта a), если детей 49?

8. Решите в целых числах уравнение $xy - x - y = 5$.

9. На прямой отмечен отрезок AB и 45 точек вне него. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний до точки B.

10. В олимпиаде, состоящей из 6 задач, участвуют 200 школьников. Известно, что каждую задачу решили хотя бы 120 человек. Докажите, что можно выбрать двух школьников таким образом, чтобы каждую задачу решил кто-либо из этой пары.

В отсутствии А.В.

1. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

2. Сколькими способами можно разделить 10 человек на две команды по 5 человек?

3. a) Найдите явную формулу для C_n^2.

---

b) Найдите явную формулу для C_n^3.

4. В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовем «компанией» любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? На сколько?

5. Из пяти миллионов болотных кикимор 30 процентов любят тяжёлый рок. В то же время, тяжёлый рок любят 90 процентов из десяти миллионов писаных красавиц. Докажите, что писаными красавицами является не более половины всех болотных кикимор.

6. Вася приобрёл 35 гирь по 2 грамма каждая и 5 гирь по 4 грамма каждая. Можно ли разложить их на две кучки равного веса?

7. Докажите, что $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$ (иными словами, количество подмножеств с нечётным числом элементов равно количеству подмножеств с чётным числом элементов).

8. Можно ли составить из цифр от 1 до 9 десятизначное число, в котором между цифрами 1 и 2, между цифрами 2 и 3, ..., между цифрами 8 и 9 стояло бы нечётное число цифр?

9. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = c + d$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Докажите, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

10. Имеется комната площадью 6 кв. метров, в котором постели три ковра, площадью 3 кв. метра каждый. Докажите, что какие-то два перекрываются по площади по меньшей мере 1 кв. метр.

Индукция, Ватсон!

1. Выведите явную формулу для C_n^k.

2. *Номером* будем называть произвольную последовательность цифр (в отличие от числа, номер может начинаться на 0). Сколько существует шестизначных номеров, у которых ровно три цифры чётные?

3. На плоскости лежат несколько прямых, разбивающих ее на части. Докажите по индукции, что эти части можно закрасить в 2 цвета правильным образом, то есть так, чтобы любые две части, граничащие по отрезку, были закрашены в разные цвета.

---

4. С помощью бинома Ньютона докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

5. Можно ли в таблицу 5×5 записать числа 1, 2, 3, …, 25 так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AD. Докажите, что диагонали AC и BD равны.

7. В самой левой клетке полоски 1×100 стоит ладья, которая может ходить только вправо. Сколькими способами она может добраться до самой правой клетки a) ровно за 8 ходов; b) за сколько угодно ходов?

8. В конференции участвовали 19 учёных. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли получиться так, что каждый участник получил по 3 письма?

9. Докажите, что число $\overline{abcdef} - \overline{defabc}$ делится на 27.

10. В Математической стране n городов. Любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться до любого другого.

Сколько нас? Четыре!

1. Найдите, пожалуйста, количество способов разбить 16 человек на пары.

2. Докажите алгебраически (т.е. используя формулу), что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

3. В графе на n вершинах степень каждой вершины не превосходит 9. Докажите, что его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то есть так, чтобы вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

---

4. Докажите во славу Ньютона и бинома: $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

5. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

6. Можно ли представить единицу как сумму 10 дробей, числитель каждой из которых равен 1, а знаменатель — нечетное число?

7. Число *выглядит как простое*, если оно составное, но не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. (Пример такого числа — 91.) Среди чисел от 1 до 1000 имеется 168 простых. А сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, выглядят как простые?

8. Сколькими способами хромая ладья может дойти с поля a1 до поля h8, не побывав на поле e6? (хромая ладья ходит на одну клетку вправо или вверх)

9. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Запомните эту формулу.

10. В прямоугольнике $3\times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

Отличная

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) три ладьи; b) двух королей?

2. В маленьком приходе графства Липшир всего 5 усадеб, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся три усадьбы, никакие две из которых не соединены дорогой.

3. Докажите по индукции, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}.$$

---

4. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном n число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ — тоже целое.

5. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся — 21 год. Сколько лет получившему травму?

6. Решите уравнение в натуральных числах: $ab(a+b)=15015$.

7. Преобразуйте выражение так, чтобы в нем не осталось многоточия:

$$C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k.$$

Указание: попробуйте посмотреть на эти числа в треугольнике Паскаля

8. На плоскости нарисованы несколько окружностей, причем любые две пересекаются. Докажите, что их можно было нарисовать не отрывая карандаш от бумаги (рисовать линию дважды нельзя).

9. В графе степень каждой вершины хотя бы $k\geqslant 2$. Докажите, что в нем есть а) простой путь длины хотя бы k; b) простой цикл длины хотя бы $k+1$.

10. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 4 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.

Кролики Фибоначчи

1. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

2. *Последовательность Фибоначчи* задается следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и для любого натурального n выполнено $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Докажите, что для любого натурального n выполнено $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

3. Докажите, что в дереве, в котором хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

---

4. Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

5. На сторонах параллелограмма вне него построены равносторонние треугольники. Докажите, что вершины этих треугольников, не совпадающие с вершинами данного параллелограмма, являются вершинами еще одного параллелограмма.

6. Максим Амирьянович нарисовал на доске квадрат 7×7. Восьмиклассники кидали в доску шишки, и когда они ушли на обед, в клетках начерченного квадрата оказалось 15 вмятин от шишек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть вмятина или вмятины на большой диагонали.

7. Докажите, что если $a+b+c+d = 0$, то $a^3+b^3+c^3+d^3 = 3(abc+abd+acd+bcd)$.

8. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым - второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

9. В Математической стране n городов. Любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться до любого другого, сделав не более одной пересадки.

10. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $2 \times n$ на *доминошки* (так мы называем прямоугольники 1×2) равно F_{n+1}.

Историческая справка:

Леонардо Пизанский (около 1170 года, Пиза — около 1250 года, там же) — первый крупный математик средневековой Европы. Наиболее известен под прозвищем Фибоначчи.

Труд Леонардо Фибоначчи “Книга абака” способствовал распространению в Европе позиционной системы счисления, более удобной для вычислений, чем римская нотация.

Последняя в четверти

1. Докажите, что если степени всех вершин связного графа равны 10, то после удаления любого ребра граф останется связным.

2. Найдите коэффициент при $a^k b^l c^{n-k-l}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b+c)^n$.

3. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Указание: замените правую часть.

---

4. На числовой прямой в точке 0 сидит кузнечик. Он может прыгать вправо на 1 или на 2. Докажите, что количество способов добраться до точки n равно какому-то числу Фибоначчи и найдите это число (в зависимости от n).

5. a) Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы граф остался связным.
b) Есть связный граф на n вершинах. Докажите, что существует маршрут, содержащий все вершины, такой, что его длина не превосходит $2n-3$ и по каждому ребру он проходит не более двух раз (возможно, ноль).

6. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

7. Докажите, что любой связный граф, степени вершин которого не превосходят 2, есть либо простой цикл, либо простой путь.

8. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или по 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?

9. Известно, что $a+b+c=7$, а $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0.7$. Чему может быть равна сумма

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\ ?$$

10. Докажите, что произведение k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.

И вновь продолжается бой...

1. a) Докажите самостоятельно, что если $a \vdots b$ ($a \equiv b \pmod m$), то для любого натурального n выполнено $a^n \vdots b^n$ ($a^n \equiv b^n \pmod m$).
b) Найдите остаток при делении 11^{100} на 12.

2. Даны целые числа a, b и c. Известно, что $a^2 - ab + b^2$ и $b^2 + bc + c^2$ делятся на 101. Докажите, что $a^3 + c^3$ делится на 101

3. Докажите, что если у натурального числа нечетное число натуральных делителей, то оно — полный квадрат.

---

4. Докажите, что $43^{23} + 23^{43}$ делится на 66.

5. Шестизначный номер будем называть *счастливым билетом*, если сумма первых трех его цифр равна сумме последних трех. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 999999.

6. Будем говорить, что натуральное число a *загадочнее* числа b, если при делении 839 на a в остатке получается b. Докажите, что не существует 10 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых (кроме самого меньшего из них) загадочнее предыдущего.

7. В гимназии есть несколько кружков, каждый из которых посещает не менее двух гимназистов. Оказывается, что для любых двух кружков найдутся два гимназиста, которые посещают одновременно оба этих кружка. Докажите, что на нескольких гимназистов можно вылить банку красной краски, а на других — синей так, чтобы в каждом кружке, был как красный, так и синий гимназист.

8. Докажите, что если в графе на n вершинах рёбер не меньше чем n, то в нём есть цикл.

9. На 22 карточках написали натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целое значение?

10. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Ровно треть команд хотя бы раз сыграли вничью, а ровно 75 % остальных команд не обошлись без поражений. Сколько результативных матчей было сыграно в турнире?

Выданная $2\cdot 11$ **дня** $1\cdot 11$ **месяца** $183\cdot 11$ **года**

1. a) Для каких натуральных n число C_n^2 — четное? b) А сумма чисел от 1 до n?

2. Докажите, что количество счастливых билетов делится на 2.

3. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

---

4. Чему может быть равно $(2n+3, 7n+6)$?

5. В доме 1000 комнат с номерами $1, \ldots, 1000$. Изначально все двери закрыты. Ночью 1000 призраков летают по дому и открывают дверь, если она закрыта, либо закрывают ее, если она открыта. Известно, что k-тый призрак подлетает к каждой двери с номером, кратным k, причем только один раз. Сколько дверем будет открыто утром?

6. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?

7. Шестизначный номер будем называть *билетом, счастливым по-ленинградски*, если сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах.

a) Докажите, что количество счастливых билетов и количество билетов, счастливых по-лениградски, совпадают.

b) Докажите, что количество счастливых билетов меньше 90910.

Указание. Что можно сказать про числа, у которых сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных?

8. Докажите, что для любых натуральных n и k выполнено равенство

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k\ .$$

9. Куб $11 \times 11 \times 11$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Сколько существует путей из углового кубика в противоположный? (За шаг разрешается сдвигаться вправо, вверх или “вглубь” на 1 кубик.)

10. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

Найдите наименьшее двузначное число

1. Докажите, что граф K_5 не планарен.

2. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

3. Найдите наибольшее девятизначное число, составленное из различных ненулевых цифр, которое делится на 45. Не забудьте пояснить, почему вам кажется, что оно наибольшее.

---

4. Докажите, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.

5. Хулиган Юра отобрал у милой девочки Полины открытку размерами $m \times n$ сантиметров и начал ее резать. Каждый раз он отрезает от открытки квадрат с максимально возможной стороной. Добрый преподаватель Максим Амирьянович отобрал у хулигана Юры остаток открытки, который имеет форму квадрата. С какой стороной?

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено $(F_{n-1}, F_n) = 1$.

7. Можно ли записать 1 в виде суммы 2014 слагаемых вида $\dfrac{1}{3k-1}$ с натуральными k?

8. В кружке прикладного прикалывания 14 человек прикалываются кнопками, 13 — значками и 13 — булавками. Всего в кружке 20 приколистов и каждый из них прикалывается не менее чем двумя предметами. Сколько кружковцев прикалываются кнопками, булавками и значками одновременно?

9. Докажите, что $2009!! + 2010!!$ делится на 2011, где $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots$.

10. Через клетчатый квадрат 1000×1000 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся при этом прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Докажите, что количество черных клеточек четно.

Уральская

1. 2013 год — первый со времён Средневековья, в записи которого использованы четыре последовательные цифры. Сколько таких лет (до 10000 г.) ещё будет?

2. Имеется 2014 подряд идущих натуральных чисел. Известно, что наибольшее из них делится на наименьшее. Каким может быть наибольшее из этих чисел? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

3. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{y} = 7$.

---

4. На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Точка F пересечения биссектрис углов DEB и ADE лежит на основании AB. Докажите, что F — середина AB.

5. a) В связном графе степени всех вершин не превосходят 10, а у одной строго меньше 10. Докажите, что его можно покрасить в 10 цветов правильным образом. Можно ли отказаться от условия, что граф связен?
b) Докажите, что планарный граф можно покрасить в 6 цветов правильным образом.

6. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC. Биссектриса угла A пересекает ℓ в точке M, а биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает ℓ в точке N. Найдите MN, если известно, что $AB = 20$ и $BC = 13$.

7. При каких $n > 3$ число $n!$ делится на число $(n-1)! + (n-2)! + (n-3)!$?

8. Диего хочет покрыть квадрат 6×6 восемнадцатью фигурками домино. a) Может ли он так разместить в квадрате 3 фигурки домино (без наложений), чтобы оставшуюся часть таблицы можно было покрыть оставшимися фигурками единственным способом? b*) А две?

9. Некоторые города Графландии соединены двусторонними авиарейсами компании "Графские авиалинии" так, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно, с пересадками. Авиакомпания открыла новый рейс между двумя городами, и оказалось, что из любого города теперь можно долететь до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Какое наибольшее количество рейсов могло быть необходимо, чтобы добраться из одного города в другой до этого?

10. В левом нижнем углу таблицы 7×7 стоит число 1, а в правом верхнем — число 9. Можно ли заполнить остальные клетки натуральными числами так, чтобы у каждого числа соседи справа и сверху (если есть) были не меньше этого числа, и во всех квадратах 2×2 суммы чисел были различны?

КолХоз “Пятница тринадцатое”

1. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что a) $C_p^k \vdots p$, где $0 < k < p$; b) $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.

c) **(Малая теорема Ферма)** Докажите, что для любого натурального n верно $n^p \underset{p}{\equiv} n$.

2. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

3. Ненулевые числа x, y и z таковы, что $x+y+z = 1$ и $1/x+1/y+1/z = 0$. Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

4. Натуральное n называется *избыточным*, если сумма всех его натуральных делителей, кроме него самого, больше n. Докажите, что кратное избыточного числа тоже избыточно.

5. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

6. M — конечное множество точек на плоскости. Для каждого натурального $i \leqslant 7$ существует окружность, проходящая ровно через i точек M. Какое наименьшее количество точек может быть в M?

7. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое количество правильных треугольников, большее 5. (Треугольники не обязаны быть одинаковыми.)

8. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Из вершины A проведена высота AD. В треугольнике ABD проведена биссектриса BE. Докажите, что $AB + AE = BC$.

9. Несколько семиклассниц собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассницы раздают каждой из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Гертруды осталось 23 шишки, а у Нинели — 6 шишек. Сколько было семиклассниц?

10. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах, так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он может открыть все комнаты.

Чертова дюжина

0. Разложите 2014 на простые множители. Запомните это разложение!

1. Чему равен $(\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{m\text{ единиц}})$?

Указание: алгоритм Евклида

2. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$. Докажите, что

a) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_s, \beta_s)}$, где $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y;

b) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(\alpha_s, \beta_s)}$, где $\max(x, y)$ — это наибольшее из чисел x и y;

c) $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

---

3. Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k + 1$ и $3k + 2$?

4. Среди нескольких команд провели круговой турнир по волейболу (каждая команда сыграла с каждой по одному разу, ничьих не бывает). Команда A называется сильнее команды B, если A выиграла у B или, если есть команда C, которая выиграла у B и проиграла A. Доказать, что победитель турнира (набравший наибольшее число очков) сильнее всех.

5. Биссектриса угла A и внешняя биссектриса угла C треугольника ABC пересекаются в точке I_A. Оказалось, что $\angle I_ABC = \angle B$. Найдите угол B.

6. a и b — натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится на 441.

7. Три числа a, b, c выбраны так, что выполнены равенства $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$. Найдите все значения, которые может принимать величина

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Числа Ферма

1. Пусть $a > 1$ — натуральное число. Найдите $(a^n - 1, a^m - 1)$.

2. Пусть p — простое и $n < p < 2n$. Докажите, что C_{2n}^n делится на p.

---

3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

4. Про целые числа x, y, z известно, что $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Докажите, что $x+y+z$ делится на 27.

5. Для любого положительного числа a докажите неравенство

$$a + a^9 + a^{25} < 1 + a^4 + a^{16} + a^{36}.$$

6. Точки K и L на стороне AB треугольника ABC таковы, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на BC такова, что $\angle MKC = \angle BKM$. ML — биссектриса угла KMB. Найдите угол MLC.

7. Докажите, что если число $2^n + 1$ — простое, то n — степень двойки.

Историческая справка. Числа вида $2^{2^n}+1$ называются *числами Ферма.* Ферма выдвинул гипотезу, что все они простые. Однако эта гипотеза была опровергнута Эйлером в 1732 году, нашедшим разложение числа $2^{2^5}+1$ на простые делители:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Меж двух

1. Пусть a) $n = pqr^2$; b) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Найдите сумму делителей числа n.

2. Может ли число делится на 8 и давать остаток остаток 10 при делении на 12?

---

3. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

4. Есть 4 натуральных числа. Могут ли их попарные НОДы образовывать шесть последовательных чисел?

5. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

6. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?

7. a) Докажите, что для любого натурального n числа

$$2^{2^0} + 1,\ 2^{2^1} + 1,\ \ldots,\ 2^{2^n} + 1$$

попарно взаимно просты.

b) Выведите из пункта a), что простых чисел бесконечно много.

Два в степени два в степени два

1. Сумма двух натуральных чисел равна 153. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

2. Имеется n целых чисел $(n > 1)$. Известно, что каждое из них сравнимо по модулю n с произведением всех остальных. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на n.

---

3. a, b — целые числа. Оказалось, что $(a, b) + [a, b] = a + b$. Докажите, что одно из чисел делится на другое.

4. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F такие, что $AE = AB$ и $AF = AD$. Пусть G и H — основания перпендикуляров, опущенных на сторону AB из точек E и F соответственно. Докажите, что $AG + FH = AC$.

5. Какое число больше: 31^{11} или 17^{14}?

6. Дан правильный 45–угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры 0–9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

7. Имеется 7 палок длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что из каких-то трех из них можно сложить треугольник.

Мгновенья перед весной

1. Найдите наименьшее натуральное число половина которого точный квадрат, треть — точный куб, пятая часть — пятая степень.

2. Положительное целое число делится на 18, а после прибавления 1 делится на 17. Может ли так быть?

---

3. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

4. Можно ли, используя только цифры 2, 3, 7, 8 (возможно, по несколько раз), составить квадрат натурального числа?

5. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

6. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

7. В городе X с любой станции метро метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

Уральская

1. На доске написаны несколько дробей. Сумма всех дробей с нечетными знаменателями равна произведению всех дробей с четными знаменателями. Могут ли все дроби быть несократимыми?

2. В лагерь заехало несколько детей, среди которых есть двое знакомых и есть двое незнакомых. Докажите, что среди них можно выбрать троих таким образом, чтобы один из этих троих был знаком ровно с одним из двоих оставшихся.

---

3. Натуральное число $n < 10000$ таково, что число $n + 100!$ — простое. Докажите, что число n тоже простое или равно 1.

4. В таблице 3×3 расставлены 9 чисел так, что 6 сумм этих чисел во всех строках и столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться единице?

5. Квадрат 40×40 разбит на 400 Г-тетрамино. Докажите, что найдется прямая, идущая по линии сетки, которая хотя бы 6 из них разрезает на две доминошки.

6. Можно ли первые 1000 простых чисел, больших двойки, разбить на две группы по 500 чисел таким образом, чтобы суммы квадратов чисел в этих группах были равны?

7. Игорь отметил внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ две точки P и Q. Ему показалось, что каждый из отрезков DP и BP больше, чем каждый из отрезков AP и CP, а каждый из отрезков DQ и BQ, наоборот, меньше, чем каждый из отрезков AQ и CQ. Докажите, что Игорь заблуждается.

За неделю до контрольной

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть равно 0.

2. Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

---

3. Каждый из 102 кроликов имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

4. В каждой клетке квадратной таблицы 25×25 стоит одно из чисел $1, 2, \ldots, 25$ таким образом, что в каждой строчке и в каждом столбце все числа различны. Оказалось, что в клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа. Докажите, что все числа, стоящие на главной диагонали попарно различны.

5. Найдется ли такое натуральное n, что $n^2 + n + 1$ делится на 1955?

6. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $AP = CQ$. Точка такова, что $PM \parallel AD$ и $QM \parallel AB$. Докажите, что точка M лежит на диагонали BD.

7. Дан связный граф на 100 вершинах, в котором 199 ребер. Докажите, что из него можно выкинуть ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

Ферма и Эйлер

1. В треугольнике ABC проведена чевина CK. На CK выбрана точка L. Докажите, что а) $S_{BLK} : S_{ALK} = S_{BCK} : S_{ACK}$; b) $S_{BLC} : S_{ALC} = S_{BCK} : S_{ACK}$.

2. Вспомните доказательство Малой теоремы Ферма через приведенную систему вычетов и докажите **теорему Эйлера**: пусть $(a,n)=1$ тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

---

3. Числа p, $2p+1$ и $4p+1$ — простые. Найдите p.

4. Пусть $p>5$ — простое. Докажите, что существует такое натуральное n, что число $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}}$ делится на p.

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{ABO} = S_{CDO}$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — трапеция.

Задумайтесь, а что если пересекаются не отрезки AC и BD, а прямые?

6. Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета *хорошей*, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 6^8.

7. В квадрате 3×3 расставлены числа от 1 до 9 так, что суммы чисел в любой строке, столбце и главных диагоналях равны. Докажите, что сумма квадратов чисел в верхней строчке равна сумме квадратов чисел в нижней.

Вильсон

1. Докажите, что $(2p-1)!-p$ делится на p^2.

2. a) Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX}+S_{CDX}=S_{BCX}+S_{ADX}$.
b) Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. С помощью понятно чего найдите его высоту, опущенную на гипотенузу.

---

3. Для скольких натуральных чисел $i<1000$ существует натуральное число $j<1000$ такое, что $2^j-1 \,\vdots\, i$?

4. Назовем натуральное число n *удобным*, если n^2+1 делится на 1000001. Докажите, что среди чисел 1, 2, …, 1000000 четное число удобных.

5. a) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$. Докажите, что $S_{ABC}:S_{A_1B_1C_1}=(AB\cdot AC):(A_1B_1\cdot A_1C_1)$.

Указание: постройте треугольник, равный $A_1B_1C_1$, у которого одна вершина совпадает с A, а две другие лежат на лучах AB и AC.

b) Докажите с помощью площади, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

6. Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы минимум половина рёбер оказались разноцветными.

7. Про натуральные числа a, b, $n>1$ известно, что $[a,b]=(a-b)^n$. Докажите, что $n=2$.

Кармайкл и Герон

1. Для каких простых p выполнено $29^p + 1 \,\vdots\, p$?

2. Найдите вероятность того, что, извлекая наудачу 5 флажков из ящика, в котором 8 красных и 7 желтых флажков, мы вытащим ровно 3 красных и 2 синих флажка.

---

3. (Число Кармайкла) Докажите, что для любого целого a выполнено $a^{561} - a \,\vdots\, 561$.

4. Докажите, что из ста чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

5. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, O — точка пересечение AC и BD. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_{BOC} \cdot S_{DOA}}$.

6. Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

7. (Формула Герона) Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, b и c равна

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

где p — полупериметр.

Роковая серия

1. Девочка Настя сошла с ума от математики, сделала игральный икосаэдр и стала его подкидывать. Какова вероятность, что за 2 последовательных броска сумма выпавших очков будет от 11 до 30 включительно?

2. В жезле n полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переворотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?

---

3. Найдите остаток $6^{83} + 8^{83}$ при делении на 49.

4. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, можно указать такую группу стоящих подряд цифр последовательности, что записываемое этими цифрами число делится на n.

5. В некоторых деревнях России существовало когда-то следующее гадание:

Девушка зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж.

Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

6. Дана последовательность $x_1, x_2, \ldots$, заданная следующим образом: $x_1 = 1$, а при $k \geqslant 2$ каждый член x_k на k больше суммы всех предыдущих членов. Найдите сумму первых 100 членов последовательности.

7. Вспомните разбор задачи 20.1b и попробуйте доказать **теорему Чевы** :
На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно.
a) Если чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \tag{1}$$

b) Если выполнено (1), то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Замечание. Полная формулировка теоремы Чевы звучит так:
На прямых BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причем нечетное число (три или одна) из них лежат на сторонах, а остальные – на продолжениях сторон. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

c) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, называемой **точкой Жергона**.

Странная

1. Calculuate the remainder when 2013^{2012} is divided by 1000.

2. Мальчик Степа пришел в тир и стреляет до первого попадания. Найдите вероятность того, что Степа сделает не более 10 выстрелов, если он попадает в мишень с вероятностью p.

Замечание: вероятность — некое число (не процент!) между 0 и 1. События, вероятность которых равна 1, называют достоверными.

Если вероятность события равна 0 это ***не*** *значит, что оно не может произойти! (например, представьте, что вы случайным образом выбираете число от 0 до 1)*

---

3. Знайдіть найбільший спільний дільник усіх десятизначних чисел, у яких всі цифри різні.

4. a) Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых меньше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько, сумма которых равна 100. b) Можно ли отказаться от условия, что все числа меньше 100?

5. Докажите, что для данного простого $p > 2$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $n2^n + 1 \,\vdots\, p$.

6. Натуральные числа a и b таковы, что $(a, b) \neq (1, 1)$ и $a^2 + b \,\vdots\, b^2 + a$. Докажите, что $b^2 + a$ — составное.

7. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть $p = BA_1/BC$, $q = CB_1/CA$, $r = AC_1/AB$.

a) Найдите отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

b) Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, пожалуйста, что $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} \leqslant 1/4$.

Функция Эйлера

1. Пусть p_i — различные простые числа. Найдите a) $\varphi(p_1^{\alpha_1})$; b) $\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s})$.

2. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

---

3. В таблице 2011×2011 расставляются числа 1 и -1 так, чтобы произведения чисел a) во всех строках; b) во всех строках и во всех столбцах были равны 1. Сколькими способами это можно сделать?

4. Докажите, что граф является двудольным (т.е. его вершины можно покрасить правильным образом в два цвета) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

5. Найдите все натуральные n такие, что $n \vdots \varphi(n)$.

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \\ \dfrac{1}{x_2} = x_1 + x_3 + \cdots + x_{10} \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{1}{x_{10}} = x_1 + x_2 + \cdots + x_9 \end{cases}.$$

Хорошая

1. Имеются натуральные числа n и a. Известно, что a^2 при делении на n дает остаток 8, а a^3 — остаток 25. Найдите n.

2. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

3. Найдите все простые p такие, что $p^6 + 6$ — простое.

4. Докажите, что из произведения $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ можно вычеркнуть один из факториалов так, чтобы оставшееся число было точным квадратом.

5. На каждом поле таблицы $n \times n$ стоит буква. Известно, что все строки различны. Докажите, что существует столбец, после удаления которого все строки останутся различными.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ пересекаются на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle D$ пересекаются на диагонали AC.

7. а) Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя провести более $n-3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек. *Вопрос: можно ли в n-угольнике провести $n-3$ непересекающиеся диагонали?*

b*) В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведенная диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведенных диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.