# Старые задачи.

**3.6.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D$. Серединные перпендикуляры к сторонам $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$, лежащей на стороне $AD$. Докажите, что диагонали $AC$ и $BD$ равны.

**4.10.** В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, $n$ столбцов) расставлены фишки трех цветов по $n$ штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

**5.9.** В графе степень каждой вершины хотя бы $k \geqslant 2$. Докажите, что в нем есть a) простой путь длины хотя бы $k$; b) простой цикл длины хотя бы $k+1$.

**6.8.** На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым - второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

**7.5.** b) Есть связный граф на $n$ вершинах. Докажите, что существует маршрут, содержащий все вершины, такой, что его длина не превосходит $2n-3$ и по каждому ребру он проходит не более двух раз (возможно, ноль).

**8.7.** В гимназии есть несколько кружков, каждый из которых посещает не менее двух гимназистов. Оказывается, что для любых двух кружков найдутся два гимназиста, которые посещают одновременно оба этих кружка. Докажите, что на нескольких гимназистов можно вылить банку красной краски, а на других — синей так, чтобы в каждом кружке, был как красный, так и синий гимназист.

**11.9.** Некоторые города Графландии соединены двусторонними авиарейсами компании "Графские авиалинии" так, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно, с пересадками. Авиакомпания открыла новый рейс между двумя городами, и оказалось, что из любого города теперь можно долететь до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Какое наибольшее количество рейсов могло быть необходимо, чтобы добраться из одного города в другой до этого?

**11.10.** В левом нижнем углу таблицы $7 \times 7$ стоит число 1, а в правом верхнем — число 9. Можно ли заполнить остальные клетки натуральными числами так, чтобы у каждого числа соседи справа и сверху (если есть) были не меньше этого числа, и во всех квадратах $2 \times 2$ суммы чисел были различны?

**12.3.** Ненулевые числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что $x + y + z = 1$ и $1/x + 1/y + 1/z = 0$. Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

**12.4.** Натуральное $n$ называется *избыточным*, если сумма всех его натуральных делителей, кроме него самого, больше $n$. Докажите, что кратное избыточного числа тоже избыточно.

**12.5.** Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

**12.6.** $M$ — конечное множество точек на плоскости. Для каждого натурального $i \leqslant 7$ существует окружность, проходящая ровно через $i$ точек $M$. Какое наименьшее количество точек может быть в $M$?

**12.7.** Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое количество правильных треугольников, большее 5. (Треугольники не обязаны быть одинаковыми.)

**12.9.** Несколько семиклассниц собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассницы раздают каждой из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Гертруды осталось 23 шишки, а у Нинели — 6 шишек. Сколько было семиклассниц?

**13.3.** Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k+1$ и $3k+2$?

**15.5.** В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

**15.7.** a) Докажите, что для любого натурального $n$ числа

$$2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ \ldots,\ 2^{2^n}+1$$

попарно взаимно просты.
b) Выведите из пункта a), что простых чисел бесконечно много.

**16.3.** $a$, $b$ — целые числа. Оказалось, что $(a,b)+[a,b]=a+b$. Докажите, что одно из чисел делится на другое.

**16.4.** На диагонали $AC$ прямоугольника $ABCD$ выбраны точки $E$ и $F$ такие, что $AE=AB$ и $AF=AD$. Пусть $G$ и $H$ — основания перпендикуляров, опущенных на сторону $AB$ из точек $E$ и $F$ соответственно. Докажите, что $AG+FH=AC$.

**20.6.** Назовем раскраску доски $8\times 8$ в три цвета *хорошей*, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем $6^8$.

**20.7.** В квадрате $3\times 3$ расставлены числа от 1 до 9 так, что суммы чисел в любой строке, столбце и главных диагоналях равны. Докажите, что сумма квадратов чисел в верхней строчке равна сумме квадратов чисел в нижней.

**21.7.** Про натуральные числа $a$, $b$, $n>1$ известно, что $[a,b]=(a-b)^n$. Докажите, что $n=2$.

**23.5.** В некоторых деревнях России существовало когда-то следующее гадание:

Девушка зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж.

Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

**23.6.** Дана последовательность $x_1$, $x_2$, $\ldots$, заданная следующим образом: $x_1=1$, а при $k\geqslant 2$ каждый член $x_k$ на $k$ больше суммы всех предыдущих членов. Найдите сумму первых 100 членов последовательности.

**24.6.** Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $(a,b)\neq(1,1)$ и $a^2+b \,\vdots\, b^2+a$. Докажите, что $b^2+a$ — составное.

**24.7.** На сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ взяты точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Пусть $p=BA_1/BC$, $q=CB_1/CA$, $r=AC_1/AB$.
b) Пусть отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, пожалуйста, что $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC}\leqslant 1/4$.

**25.3.** В таблице $2011\times 2011$ расставляются числа 1 и $-1$ так, чтобы произведения чисел a) во всех строках; b) во всех строках и во всех столбцах были равны 1. Сколькими способами это можно сделать?

**25.5.** Найдите все натуральные $n$ такие, что $n \vdots \varphi(n)$.

**25.6.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке $O$. Точка $P$ внутри треугольника $AOD$ такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка $P$ лежит на биссектрисе угла $AOD$.

**25.7.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \\ \dfrac{1}{x_2} = x_1 + x_3 + \cdots + x_{10} \\ \quad \ldots \\ \dfrac{1}{x_{10}} = x_1 + x_2 + \cdots + x_9 \end{cases}.$$