Обязательные упражнения, 1 четверть

Разбор задач

1.1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решение. *Первое решение.* По определению, C_n^k — это количество k–элементных подмножеств n–элементного множества. Это наводит на мысль о следующем решении.

Пусть исходное n-элементное множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим два множества: первое будет состоять из всех k–элементных подмножеств множества A, а второе — из всех $n-k$–элементных. Устроим между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Сопоставим каждому k–элементному подмножеству $B \subset A$ его *дополнение* $A \setminus B$ — $n-k$–элементное подмножество. Осталось показать, что это соответствие является взаимно однозначным. Для этого достаточно заметить, что каждому $n-k$–элементному подмножеству C соответствует его дополнение $A \setminus C$ (это рассуждение показывает, что каждому что-то да соответствует и притом ровно одно).

Учитывая, что в первом множестве ровно C_n^k элементов, а во втором — C_n^{n-k}, получаем требуемое.

Второе решение. На лекции было доказано, что C_n^k равно количеству полследовательностей длины n из 0 и 1, содержащих ровно k единиц.

Рассмотрим два множества: одно состоит из всех последовательностей (длины n), содержащих ровно k единиц, а другое – содержащих ровно $n-k$ единиц. Установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ сопоставим последовательность $(1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_n)$ (то есть заменим все 1 на 0, а все 0 на 1). Можно показать, что полученное сопоставление задает взаимно однозначное соответствие между нашими двумя множествами.

Дальнейшее аналогичному первому решению.

1.2. Найдите количество чисел, не превосходящих 120, и a) делящихся на 2 или на 3; b) делящихся на 2, на 3 или на 5.

a) Ответ. 80 . Решение. Обозначим через A_k множество чисел, не превосходящих 120, которые делятся на k.

Нам нужно найти мощность объединения $|A_2 \cup A_3|$. По формуле включений–исключений получаем

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

В пересечении A_2 и A_3 лежат числа, которые делятся на 2 и на 3, стало быть, делятся на 6 и $A_2 \cap A_3 = A_6$. Учитывая, что $|A_2| = 60$, $|A_3| = 40$, $|A_6| = 20$, получаем $|A_2 \cup A_3| = 60 + 40 - 20 = 80$.

b) Ответ. 88 . Решение. Аналогично решению пункта a) получаем

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_5| - |A_5 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \\ &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{15}| - |A_{10}| + |A_{30}| = \\ &= 60 + 40 + 24 - 20 - 8 - 12 + 4 = 88. \end{aligned}$$

1.3. Самый высокий математик среди шахматистов и самый высокий шахматист среди математиков — всегда ли это один и тот же человек?

Ответ. Да. Решение. Этот человек — самый высокий человек среди людей, которые одновременно являются и математиками, и шахматистами.

2.1. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Решение. Посчитаем количество подмножеств n–элементного множества.

С одной стороны, оно равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ (количество 0–элементных плюс количество 1–элементных плюс и так далее плюс количество n–элементных).

С другой стороны, на лекции было доказано, что количество подмножеств n–элементного множества равно 2^n.

2.2. Сколькими способами можно разделить 10 человек на две команды по 5 человек?

Ответ. $C_{10}^5/2$. Решение. Давайте для начала выберем первую команду из 5 человек. Это можно сделать C_{10}^5 способами.

Тогда вторая команда определится однозначно. Давайте теперь посмотрим на какой-то вариант разделить 10 человек на две команды: команда A и команда B. Заметим, что этот вариант мы посчитали два раза: первый раз, когда первой командой была A, а второй — B; второй раз, когда первой командой была B, а второй — A.

Таким образом **каждый** вариант мы посчитали два раза, поэтому C_{10}^5 нужно поделить на 2.

2.3. a) Найдите явную формулу для C_n^2. b) Найдите явную формулу для C_n^3.

Ответ. a) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; b) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. *См. решение задачи 3.1.*

3.1. Выведите явную формулу для C_n^k.

Ответ. $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Решение. На лекции было доказано, что C_n^k равняется количеству последовательностей длины n из 0 и 1, в которых ровно k единиц.

Первое решение. Давайте пытаться выбирать те k мест, на которых в нашей поледовательности могут стоять 1.

Первая единица может стоять на одном из n мест.

Для каждого из этих n вариантов есть $n-1$ вариант, где может стоять вторая единица. Таким образом выбрать первые две единицы есть $n(n-1)$ вариантов.

Для каждого из этих $n(n-1)$ вариантов есть $n-2$ варианта, где может стоять третья единица. Таким образом выбрать первые три единицы есть $n(n-1)(n-2)$ вариантов. И так далее.

Получается, что выбрать последовательно k мест для единиц есть $n(n-1)\dots(n-k+1)$ вариант.

Однако каждый вариант мы посчитали далеко не один раз. Например, для $k=3$ и варианта $\{1,2,3\}$ порядок, в котором мы могли выбрать эти 3 места мог быть $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$ — 6 вариантов.

Теперь становится понятно, что для k мест **каждый** вариант мы посчитали $k!$ способами. Для варианта $\{a_1,\dots,a_k\}$, первым выбранным местом может быть одно из k мест. Для каждого из этих k вариантов есть $k-1$ вариант выбрать то место, которое было вторым и так далее.

Стало быть, $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Второе решение. Давайте считать, для начала, что у нас все нули различны и все единицы различны (то есть у нас последовательности из 0_1, 0_2, …, 0_{n-k}, 1_1, 1_2, …, 1_k). Тогда количество различных последовательной из (различных) 0 и 1 будет равно $n!$ (на первое место — любую из n цифр, для каждого варианта первой цифры на второе — любую из $n-1$ оставшихся и так далее).

Давайте для улучшения понимая выпишем все эти варианты на доску. После этого давайте сотрем все индексы у нулей. Тогда **каждая** из оставшихся последовательностей будет написана $(n-k)!$ раз (поскольку именно столько способов для одной последовательности написать индексы у нулей). Поэтому различных вариантов на доске останется $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Сотрем некоторые варианты так, что каждый вариант присутствовал ровно один раз.

Теперь сотрем индексы у всех единиц. Тогда каждый вариант окажется написан на доске $k!$ раз (так как именно столько у нас есть способов для варианта приписать индексы единицам). Поэтому различных вариантов на доске останется $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Замечание. Некоторым это решение должно напомнить, как мы переставляли буквы в словах. Так оно и есть: мы переставляет “буквы”-цифры в слове $00\dots011\dots1$ ($n-k$ нулей, k единиц).

3.2. *Номером* будем называть произвольную последовательность цифр (в отличие от числа, номер может начинаться на 0). Сколько существует шестизначных номеров, у которых ровно три цифры чётные?

Ответ. $C_6^3\cdot 5^6$. Решение. Для начала выберем те 3 места, на которых у нас будут стоять четные цифры. Это можно сделать C_6^3 способами.

Для каждого из этих способов есть 5^6 вариантов записать номер, у которого четные цифры будут именно на этих местах: на каждом месте может стоять одна из 5 цифр.

3.3. На плоскости лежат несколько прямых, разбивающих ее на части. Докажите по индукции, что эти части можно закрасить в 2 цвета правильным образом, то есть так, чтобы любые две части, граничащие по отрезку, были закрашены в разные цвета.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по числу прямых.

База. $n=0$.

Если прямых нет, то красим плоскоть в один цвет и тогда любые две части, граничащие по отрезку, будут закрашены в разные цвета, поскольку попросту нет частей, граничащих по отрезку.[1]

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции: Если на плоскости лежат k прямых, то части, на которые они разбивают плоскость, можно закрасить в 2 цвета правильным образом.

У нас есть $k + 1$ прямая на плоскости. Давайте уберем одну из прямых. Тогда на плоскости останется k прямых и мы можем применить предположение индукции. Закрасим части на которые эти k прямых разбивают плоскость правильным образом.

Теперь вспомним об убраной, $k + 1$–ой, прямой. Она поделит плоскость на две полуплоскости. Давайте в одной из полуплоскостей изменим все цвета на противоположные.

Теперь надо проверить, что получившаяся раскраска является правильной. Для этого рассмотрим два случая: если части граничат по отрезку, не лежащему на $k + 1$–ой прямой, или по отрезку, на ней лежащему.

В первом случае части будут разного цвета, так как они были разного цвета до добавления $k+1$–ой прямой, после добавления и после перекрашивания. Во втором случае, так как после добавления $k + 1$–ой прямой, но до перекрашивания эти части были одного цвета, а потом мы изменили цвет в одной из частей. Переход доказан.[2]

4.1. Найдите, пожалуйста, количество способов разбить 16 человек на пары.

Ответ. $\dfrac{16!}{2^8 \cdot 8!}$. Решение. *Первое решение.* Давайте выберем первую пару. Это можно сделать C_{16}^2 способами.

Для каждого из этих способов есть C_{14}^2 способов выбрать вторую пару. Стало быть, выбрать первые две пары есть $C_{16}^2 \cdot C_{14}^2$ способа. И так далее.

Выбрать последовательно 8 пар есть $C_{16}^2 \cdot C_{14}^2 \cdot \ldots \cdot C_2^2 = \dfrac{16 \cdot 15}{2} \cdot \dfrac{14 \cdot 12}{2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2 \cdot 1}{2} = \dfrac{16!}{2^8}$ способов.

Аналогично решению задачи 3.1 вариант $\{a_1, \ldots, a_8\}$ разбиения на пары мы посчитали 8! раз..

Второе решение. Давайте расставим всех людей по порядку и в первую пару отправим первых двух людей, во вторую — следующих двоих и так далее. Расставить людей по порядку есть 16! способов.

Из-за чего в таком решении мы посчитаем один и тот же вариант несколькими способами? Во-первых, потому что если мы поменяем двух человек местами в одной паре, то от этого разбиение не изменится. Поэтому надо 16! поделить на 2^8 (по одной двойке на каждую пару).

Во-вторых, если мы теперь переставим пары местами, то разбиение также не изменится. Переставить 8 пар местами есть 8! способов. Поэтому $16!/2^8$ надо поделить еще и на 8!. Теперь каждый вариант мы посчитали ровно один раз.

План *третьего решения.* Давайте выберем из 16 человек каких-то 8. Это можно сделать C_{16}^8 способами. После этого для каждого из этих вариантов есть 8! способов поставить в соответствие каждому человеку из выбранных кого-то одного из оставшихся. Таким образом у нас получается $C_{16}^8 \cdot 8!$ способов.

Но заметим, что каждый вариант мы посчитали 2^8 раз, так как мы можем для каждой пары или поменять в ней двух человек местами (то есть выбрать в первоначальное множество из 8 человек не самого человека, а его партнера, от этого разбиение не изменится), или не поменять.

Стало быть ответ $\dfrac{C_{16}^8 \cdot 8!}{2^8} = \dfrac{\frac{16!}{8! \cdot 8!} \cdot 8!}{2^8} = \dfrac{16!}{2^8 \cdot 8!}$.

4.2. Докажите алгебраически (т.е. используя формулу), что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Решение.

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

[1]Почему в поездах стоп-краны красные, а в самолетах — голубые?

[2]Дружеский совет: нарисуйте картинку.

4.3. В графе на n вершинах степень каждой вершины не превосходит 9. Докажите, что его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то есть так, чтобы вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$ — очевидно (уж одну то вершину мы точно покрасим).

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. Если в графе на k вершинах степень каждой вершины не превосходит 9, то его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом.

Рассмотрим граф на $k + 1$–ой вершине, степень каждой из вершин которого не превосходит 9. Выберем какую-нибудь вершину и забудем о ней. Тогда в оставшемся графе будет k вершин и степень каждой не превосходит 9. Тогда, по предположению индукции их можно покрасить в 10 цветов правильным образом.

Вспомним о забытой, $k + 1$–ой, вершине. Ее степень не превосходит 9, значит среди вершин, с которыми она соединена, не более 9 цветов. Значит, существует цвет, которого среди них нет. Покрасим эту вершину в этот цвет. Очевидно, что получившаяся раскраска — правильная. Переход доказан.

5.1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) три ладьи; b) двух королей?

Ответ. а) $\dfrac{64 \cdot 49 \cdot 36}{3!}$; b) $\dfrac{4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55}{2}$. Решение. а) Поставить первую ладью есть 64 способа. Для каждого из этих 64 способов есть 49 способов поставить вторую ладью (так как у нас есть 7 строк и 7 столбцов, на которые мы можем поставить). Аналогично, поставить третью ладью у нас есть 36 способов. Таким образом, поставить последовательно 3 ладьи есть $64 \cdot 49 \cdot 36$ способов.

Если мы теперь возьмем вариант расстановки ладей на места a, b, c, то существует 3! в каком порядке мы могли их выбирать (первым одно из трех мест, вторым — одно из двух оставшихся). Поэтому каждый вариант мы посчитали 3! способами, откуда и следует ответ.

b) Интерес этой задачи в том, что не для каждого из 64 вариантов поставить первого короля одинаковое количество способов поставить второго.

Если мы поставим первого короля в угол, то у нас будет 60 вариантов поставить второго короля. Если на край, но не в угол, то 58. Если не на край, то 55. Таким образом поставить последовательно двух королей есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55$ вариантов.

Заметим, что каждый вариант мы посчитали дважды, откуда и следует ответ.

5.2. В маленьком приходе графства Липшир всего 5 усадеб, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся три усадьбы, никакие две из которых не соединены дорогой.

Решение. Если дорог нет вообще, то утвереждение задачи очевидно. Иначе рассмотрим какую-нибудь дорогу, соедияющую усадьбы A и B. Тогда любая оставшаяся дорога имеет один из концов или A или B, а значит между оставшимися тремя усадьбами дорог нет.

5.3. Докажите по индукции, что для любого натурального $n > 1$ выполнено равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

Решение. *Первое решение.* Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 2$: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{2-1}{2}$.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(k-1) \cdot k} = \dfrac{k-1}{k}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k^2 - 1 + 1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}. \end{aligned}$$

Первое равенство — здравый смысл, второе — предположение индукции, все остальные — результат преобразований. Переход доказан.

Второе решение.[3] Заметим, что $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

6.1. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Ответ. $9\cdot 10^9 - 9\cdot 9!$. Решение. Заметим, что всего 10-значных чисел $9\cdot 10^9$ (на первое место ...).

Посчитаем количество чисел, в которых нет двух одинаковых цифр. Иными словами, в которых все цифры различны. Легко понять, что их $9\cdot 9!$ (на первое место ...), откуда и следует ответ.

6.2. *Последовательность Фибоначчи* задается следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и для любого натурального n выполнено $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Докажите, что для любого натурального n выполнено $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$: Для начала заметим, что $F_2 = F_1 + F_0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$. Теперь база очевидна: $F_1 = F_3 - 1$ или $1 = 2 - 1$.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k+1$.

Предположение индукции. $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$.

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Первое равенство — здравый смысл, второе — предположение индукции, третье — определение чисел Фибоначчи. Переход доказан.

6.3. Докажите, что в дереве, в котором хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

Решение. Решение в точность повторяет доказательство утвереждения про 1 висячую вершину (см. лекции по графам), только в качестве начальной вершины нужно выбрать висячую (которая есть по доказанному утверждению).

7.1. Докажите, что если степени всех вершин связного графа равны 10, то после удаления любого ребра граф останется связным.

Решение. Предположим, что после удаления ребра граф распался на две компоненты связности.

Заметим, что концы ребра лежат в разных компонентах связности. Действительно, если это не так, то между ними есть путь. Покажем, что тогда граф остался связным. Рассмотрим любые две вершины. По условию, в исходном графе между ними был путь. Его могло не стать только изз-за того, что он проходил через выкинутое ребро. Заменив это ребро в пути на путь между ними, мы получим маршрут, соединяющий две выбранные вершины.

Итак, вершины ребра лежат в разных компонентах связности. Значит, в каждой из них ровно по одной вершине степени 9, а все остальные степени 10, противоречие с леммой о рукопожатиях.

7.2. Найдите коэффициент при $a^k b^l c^{n-k-l}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b+c)^n$.

Ответ. $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$. Решение.

$$(a+b+c)^n = \underbrace{(a+b+c)\cdot\ldots\cdot(a+b+c)}_{n \text{ раз}}$$

Аналогично доказательству бинома Ньютона (см. лекцию по комбинатрике) заметим, что для того, чтобы получить одночлен $a^k b^l c^{n-k-l}$ нам нужно из k скобок выбрать a, из l скобок выбрать b, а из остальных — c. Сделать это можно $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$ способами.

7.3. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2.$$

[3] Да-да, не по индукции, но решение же классное.

Решение. Заметим, что $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, поэтому нам достаточно доказать равенство

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Докажем его индукцией по n.

База. $n=1$: $1^3=\dfrac{1^2 2^2}{4}$.

Переход. $n=k \longrightarrow n=k+1$.

Предположение индукции. $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

переход доказан.