Обязательные упражнения, 2 четверть
Разбор задач

8.1. a) Докажите самостоятельно, что если $a \vdots b$ ($a \equiv b \pmod m$), то для любого натурального n выполнено $a^n \vdots b^n$ ($a^n \equiv b^n \pmod m$).

Решение. Пусть $a \vdots b$, то есть $a = bx$ для некоторого целого x, возводя это равенство в степень n получаем $a^n = b^n x^n$, то есть $a^n \vdots b^n$.

Пусть $a \equiv b \pmod m$, то есть $a - b \vdots m$, тогда $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}) \vdots m$, то есть $a^n \equiv b^n \pmod m$.

8.1. b) Найдите остаток при делении 11^{100} на 12.

Ответ. 1. Решение. $11^{100} \underset{12}{\equiv} (-1)^{100} \underset{12}{\equiv} 1$.

8.2. Даны целые числа a, b и c. Известно, что $a^2 - ab + b^2$ и $b^2 + bc + c^2$ делятся на 101. Докажите, что $a^3 + c^3$ делится на 101

Решение. $a^3 + c^3 = (a^3 + b^3) - (b^3 - c^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (b-c)(b^2 + bc + c^2)$.

8.3. Докажите, что если у натурального числа нечетное число натуральных делителей, то оно — полный квадрат.

Решение. Пусть исходное число n. Разобьем его делители на пары вида d и n/d (то есть такие, которые в произведении дают число n). Так как делителей нечетно, то в какой-то паре числа совпали, т.е. $d = n/d$ и $n = d^2$.

На этом решение заканчивается, но давайте заметим, что если число — полный квадрат, то числа могли совпасть только в одной паре и поэтому у полного квадрата нечетное число делителей.

9.1. a) Для каких натуральных n число C_n^2 — четное? b) А сумма чисел от 1 до n?

Ответ. a) $n \underset{4}{\equiv} 0, 1$; b) $n \underset{4}{\equiv} 0, 3$. Решение. a) Заметим, что $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Если $n(n-1)/2 \vdots 2$, то $n(n-1) \vdots 4$, значит нас интересует только остаток n при делении на 4. Если $n \underset{4}{\equiv} 0$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 0$, если $n \underset{4}{\equiv} 1$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 0$, если $n \underset{4}{\equiv} 2$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 2$, если $n \underset{4}{\equiv} 3$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 2$. Пункт b) решается аналогично, так как $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

9.2. Докажите, что количество счастливых билетов делится на 2.

Решение. Заметим, что счастливые билеты разбиваются на пары вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ и $\overline{(9-a_1)(9-a_a)(9-a_3)(9-a_4)(9-a_5)(9-a_6)}$. (По другому — на номера с суммой 999999.)

9.3. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

Ответ. Например, 340. Решение. Заметим, что 340 не делится на 102. Далее, заметим, что число $\underbrace{340\ldots340}_{\text{15 раз}} = 340 \cdot \underbrace{1001\ldots001}_{\text{15 единиц}}$. Заметим, что это число является произведение числа, кратного 34 и числа, кратного 3, значит оно делится на $34 \cdot 3 = 102$.

10.1. Докажите, что граф K_5 не планарен.

Решение. Предположим, что K_5 планарен, тогда для него должно выполняться неравенство $\text{Р} \leqslant 3\text{В} - 6$, однако это не так: $\text{Р} = 5 \cdot 4/2 = 10$, $3 \cdot \text{В} - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$, $10 \nleqslant 9$.

10.2. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

Решение. Посмотрим на НОД числителя и знаменателя (по сути НОД — наибольшее число, на которое мы сможем сократить дробь, поэтому посмотреть на НОД логично): $(12n+1, 30n+2) = (12n+1, 30n+2-2(12n+1) = (12n+1, 6n) = (1, 6n) = 1$. Значит, дробь несократима.

10.3. Найдите наибольшее девятизначное число, составленное из различных ненулевых цифр, которое делится на 45. Не забудьте пояснить, почему вам кажется, что оно наибольшее.

Ответ. 987643215. Решение. Заметим, что наше число должно делится на 5 и на 9. Для того, чтобы оно делилось на 5, оно должно оканчиваться либо на 5, либо на 0, а поскольку наше число состоит из ненулевых цифр, оно оканчивается на 5. Заметим, что делимость на 9 выполнена автоматически: сумма цифр равна $1 + \ldots + 9 = 9 \cdot 5$.

Дальше, из всех чисел наибольшим будет очевидно то, которое начинается на 9. Из всех таких чисел наибольшее то, у которого на втором месте 8 и так далее, получаем ответ.

11.1. 2013 год — первый со времён Средневековья, в записи которого использованы четыре последовательные цифры. Сколько таких лет (до 10000 г.) ещё будет?

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. 149. Решение. Всего есть семь четвёрок последовательных цифр: от 0, 1, 2, 3 до 6, 7, 8, 9. У каждой — по 24 перестановки, всего — 168. Из них 6 перестановок начинаются с нуля, и не годятся для обозначения лет, 12 — с единицы, и эти годы уже прошли, 2013 тоже не считается. Остается $168 - 19 = 149$ лет.

11.2. Имеется 2014 подряд идущих натуральных чисел. Известно, что наибольшее из них делится на наименьшее. Каким может быть наибольшее из этих чисел? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ. 2014, 2016, 2024, 2046, 2074, 2196, 2684, 4026. Решение. Пусть исходные числа $x, x+1, \ldots, x + 2013$. Тогда, по условию, $x + 2013 \,\vdots\, x$ и $2013 \,\vdots\, x$. То есть x должен быть делителем числа 2013. Заметим, что любой делитель 2013 подходит, откуда и берется ответ.

11.3. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{y} = 7$.

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. $(\pm 2, 1)$, $(\pm 3, 2)$, $(\pm 4, -5)$. Решение. Приведём равенство из условия к виду $y(14 - x^2) = 10$. Видим, что y — делитель числа 10. Перебирая все делители числа 10, получаем ответ.