Обязательные упражнения, 3 четверть
Разбор задач

13.0. Разложите 2014 на простые множители. Запомните это разложение!

Ответ. $2 \cdot 19 \cdot 53$

13.1. Чему равен $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{m \text{ единиц}})$?

Ответ. $\underbrace{11\ldots1}_{(n,m) \text{ единиц}}$ Решение. Пусть $n \geqslant m$. Согласно лемме из алгоритма Евклида:

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m}\underbrace{00\ldots0}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m} \cdot 10^m, \underbrace{11\ldots1}_{m}).$$

Заметим, что $(10^m, 11\ldots1) = 1$, поэтому 10^m можно убрать. Имеем:

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m}, \underbrace{11\ldots1}_{m}).$$

Заметим, что для пары количества единиц $(n; m)$ мы проделали одну операцию алгоритма Евклида (из большего числа вычли меньшее). Продолжая таким образом, через несколько действий, количества единиц станет равно (n, m) и 0. То есть

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = \ldots = (\underbrace{11\ldots1}_{(n,m)}, 0) = \underbrace{11\ldots1}_{(n,m)}.$$

13.2. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$. Докажите, что

a) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y;

b) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\max(x, y)$ — это наибольшее из чисел x и y;

c) $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Решение. а) Пусть d — общий делитель a и b. Тогда в разложение d не могут входить простые делители, отличные от $p_1, \ldots, p_s$. Действительно, пусть $d \,\vdots\, q \neq p_i$. Тогда у числа a будет два канонических представления: в одном q нет, в другом $a = d \cdot y = q \cdot xy$ — есть. Противоречие с основной теоремой арифметики. Значит $d = p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\delta_s}$.

Аналогично можно показать, что $\delta_i \leqslant \alpha_i$ (если не так, то у a будут два канонических представления: в одном p_i в степени α_i, в другом — в степени строго большей, чем α_i). Аналогично $\delta_i \leqslant \beta_i$, значит $\delta_i \leqslant \min(\alpha_i, \beta_i)$.

Заметим, что любой набор δ_i, удовлетворяющих этому условию соответствует некоторому общему делителю a и b. Наибольшим из них, очевидно, является то, в котором δ_i максимально, то есть $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$.

b) Аналогично, пусть $c = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\gamma_s} \cdot q_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_t^{\varepsilon_t}$ — общее кратное a и b. Аналогично рассуждению пункта а) можно показать, что $\gamma_i \geqslant \alpha_i$, $\gamma_i \geqslant \beta_i$, про ε_i можно только сказать, что они неотрицательны.

Значит $\gamma_i \geqslant \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\varepsilon_i \geqslant 0$. Заметим, что любой набор γ_i, ε_i, удовлетворяющих этим условиям соответствует некоторому общему кратному этих двух чисел. Наименьшим из них является то, для которого $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\varepsilon_i = 0$.

c) Следует из пунктов а) и b) и того факта, что $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ для любых x и y.

14.1. Пусть $a > 1$ — натуральное число. Найдите $(a^n - 1, a^m - 1)$.

Ответ. $a^{(n,m)} - 1$. Решение. Пусть $n \geqslant m$. По лемма из алгоритма Евклида

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^n - a^m, a^m - 1) = (a^m(a^{n-m} - 1), a^m - 1).$$

Заметим, что $(a^m, a^m - 1) = (1, a^m - 1) = 1$, поэтому a^m можно убрать. Значит,

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^{n-m} - 1, a^m - 1).$$

Таким образом для пары степеней $(m; n)$ мы из большего числа вычли меньшее. Продолжая, рано или поздно (согласно алгоритму Евклида) мы получим пару (n, m) и 0, то есть

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^{n-m} - 1, a^m - 1) = \ldots = (a^{(n,m)} - 1, a^0 - 1) = a^{(n,m)} - 1.$$

14.2. Пусть p — простое и $n < p < 2n$. Докажите, что C_{2n}^n делится на p.

Решение. $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot n!}$. Заметим, что числитель делится на простое p, а знаменатель — нет. Тогда, так как C_{2n}^n — целое, то оно делися на p.

15.1. Пусть a) $n = pqr^2$; b) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Найдите сумму делителей числа n.

Ответ. a) $(1+p)(1+q)(1+r+r^2)$; b) $(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot(1+p_s+\ldots+p_s^{\alpha_s})$. Решение. Докажем только пункт b) (поскольку пункт a) является его частным случаем). Заметим, что все делители числа n имеют вид $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Легко заметить, что после раскрытия скобок каждое из этих слагаемых получится, получится ровно один раз и никаких других слагаемых не возникнет (достаточно взять из первой скобки $p_1^{\beta_1}$, из второй — $p_2^{\beta_2}$, …, из последней — $p_s^{\beta_s}$).

Замечание. Учитывая, что $1 + x + \ldots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$, ответ в пункте b) можно переписать в виде $\dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$

15.2. Может ли число делится на 8 и давать остаток остаток 10 при делении на 12?

Ответ. Нет, не может. Решение. Заметим, что если число дает остаток 10 при делении на 12, то оно имеет вид $12k+10$, и дает остаток 2 при делении на 4. А число, которое делится на 8, делится и на 4, то есть дает остаток 0 при делении на 4.

Замечание. Если число делится на 4, то при делении на 12 оно может давать остатки только 0, 4 и 8.