Летний зачет, 8 класс

Комбинаторика

1. Отображения. Биекция. Биекции между конечными множествами. Обратное отображение. Биективность обратного отображения.

2. Числа сочетаний. Определение, явная формула.

3. Бином Ньютона.

4. Треугольник Паскаля. Три определения, их эквивалентность.

5. Формула включений–исключений. Явная формула для функции Эйлера.

Графы

6. Основные понятия теории графов. Связь количества ребер в графе и степеней его вершин. Лемма о рукопожатиях.

7. Маршрут, путь, простой путь, цикл, простой цикл. Существование простого пути между вершинами, соединенными маршрутом.

8. Связный граф, компонента связности графа. Любой граф есть объединение (непересекающихся) компонент связности.

9. Дерево, лес. Существование висячей вершины в дереве. Количество ребер в дереве на n вершинах.

10. Остовное дерево. Существование остовного дерева в связном графе. Минимальное количество ребер в связном графе на n вершинах.

11. Эйлеров путь/цикл. Критерий существования эйлерового пути/цикла в графе без изолированных вершин.

12. Планарный граф. Формула Эйлера.

13. Неравенства в планарном графе. Непланарность $K_{3,3}$ и K_5.

Теория чисел

14. Делимость. Определение и основные свойства. Деление с остатком, остаток и неполное частное, их единственность.

15. Критерий того, что числа дают одинаковые остатки при делении на m. Сравнения. Определение и основные свойства.

16. Признаки равноостаточности при делении на 2^k, 5^k, 3, 9, 11.

17. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД.

18. Простейшие следствия из существования линейного представления НОД.

19. Простые числа. Лемма Евклида. Основная теорема арифметики.

20. Малая теорема Ферма: доказательство по индукции.

21. Системы вычетов, теорема Эйлера: доказательство через приведенную систему вычетов. Малая теорема Ферма, как следствие теоремы Эйлера.

22. Обратный элемент, его существование и единственность. Теорема Вильсона.

23. Малая теорема Ферма: доказательство через циклы.

24. Малая теорема Ферма: комбинаторное доказательство.

25. Теорема Вильсона: комбинаторное доказательство.

26. Мультипликативные функции, примеры. Функция Эйлера, ее мультипликативность. Явная формула для функции Эйлера.

Четность биномиальных коэффициентов

27. C_N^K нечетно для любого K тогда и только тогда, когда $N = 2^l - 1$. C_N^K четно для любого $k \neq 0, N$ тогда и только тогда, когда $N = 2^l$.

28. Количество нечетных биномиальных коэффициентов является степенью двойки

Избранные задачи

1. Найдите количество чисел, не превосходящих 120, и делящихся на 2, на 3 или на 5.

2. Докажите, что среди чисел, меньших 1000, поровну чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 12.

3. Докажите, что a) $C_n^k = C_n^{n-k}$; b) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; c) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
d) $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$; e) $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.

4. Докажите, что для любого натурального n выполнены равенства:
a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

5. Сколько существует способов разбить прямоугольник $2 \times n$ на доминошки?

6. Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы граф остался связным.

7. Докажите, что если в связном графе $2k$ вершин нечетной степени, то его ребра можно разбить на k непересекающихся (по ребрам) путей.

8. Докажите, что произведение k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.

9. Докажите, что у натурального числа нечетное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно — полный квадрат.

10. Докажите, что если в графе на n вершинах рёбер не меньше чем n, то в нём есть цикл.

11. a) Докажите, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.
b) Докажите, что планарный граф можно покрасить в 6 цветов правильным образом.

12. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$. Докажите, что
a) $(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\min(x,y)$ — это наименьшее из чисел x и y;
b) $[a,b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\max(x,y)$ — это наибольшее из чисел x и y;
c) $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

13. Пусть $a > 1$ — натуральное число. Найдите $(a^n - 1, a^m - 1)$.

14. Назовем натуральное число n *удобным*, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел 1, 2, …, 1000000 четное число удобных.

15. Докажите, что из ста чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

16. Докажите, что граф является двудольным (т.е. его вершины можно покрасить правильным образом в два цвета) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Геометрия

17. В треугольнике ABC проведена чевина CK. На CK выбрана точка L. Докажите, что a) $S_{BLK} : S_{ALK} = S_{BCK} : S_{ACK}$; b) $S_{BLC} : S_{ALC} = S_{BCK} : S_{ACK}$.

18. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что

$$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = (AB \cdot AC) : (A_1B_1 \cdot A_1C_1).$$

19. (Формула Герона) Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, b и c равна

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

где p — полупериметр.

20. Докажите **теорему Чевы** :
На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно.
a) Если чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \qquad (1)$$

b) Если выполнено (1), то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.