

Математический кружок 7 класс

Занятие 8

Принцип крайнего.

27.11.2008

Идея 1. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший) объект.

1. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что некоторая ладья бьет не более двух других.
2. В порядке возрастания весов лежат несколько мешков. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний кладовщик Васильич может проверить, что любая пара мешков тяжелее любого другого мешка?
3. На листке написано несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число кратное им обоим. Докажите, что на листке есть число кратное всем.

Идея 2. В задачах на доказательство иногда полезно начать рассуждение с рассмотрения этого крайнего объекта (или объектов).

4. По кругу написано 20 чисел, так что каждое равно полусумме своих соседей. Докажите, что все выписанные числа равны.
5. На окружности записаны 12 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
6. На бесконечном клетчатом листе бумаги 100 клеток закрашены в чёрный цвет, а все остальные — в белый. За один ход разрешается перекрасить в противоположный цвет любые четыре клетки, образующие квадрат 2×2 . Известно, что любая горизонталь и любая вертикаль листа содержит чётное число чёрных клеток. Верно ли, что за несколько ходов всегда можно добиться того, что все клетки окажутся белыми?
7. На каждой из 1001 планеты некоторой системы, расстояния между которыми попарно различны, находится астроном, наблюдающий ближайшую планету.
 - а) Докажите, что найдутся две планеты, астрономы которых наблюдают друг друга.
 - б) Докажите, что какую-нибудь планету никто не наблюдает.

