Рекомендуем всем поучаствовать в олимпиаде. Подробней о ней на сайте:
http://www.mccme.ru/zmk/aut12/a12_1-20.htm

Остатки

Идея! Если разность двух чисел делится на m, то они дают одинаковые остатки при делении на m. И наоборот: если числа дают одинаковые остатки при делении на m, то их разность делится на m.

3.2. a) Докажите, что из любых 11 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 10. b) Докажите, что из любых 20 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 19.

3.5. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

1. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n.

2. a) Докажите, что если из числа вычесть число образованное двумя его последними цифрами, то получится число кратное 4. b) Докажите, что если из числа вычесть число образованное четырмя его последними цифрами, то получится число кратное 16.

3. Докажите, что четырехзначное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении a) на 3; b) на 9.

4. Вычислите остаток при делении
a) $88 \cdot 35 \cdot 43 + 74 \cdot 71$ на 3
b) 3^{100} на 7;
c) $4 + \ldots + 1543$ на 19.
d) $2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17}$.

5. Найдите все натуральные n, для которых все числа $3n - 4$, $4n - 5$ и $5n - 3$ являются простыми.

6. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

7. Точка C — середина AB. Через A и B проходят прямые, перпендикулярные AB. Прямая l, проходящая через C, пересекает их в точках X и Y. Докажите, что $CX = CY$.