

Комбинаторика и разнбой

1. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?
2. Несколько друзей гномов встречаются по двое и выпивают на двоих одну бутылку кефира. Докажите, что гномов, которые пили нечетное количество раз всегда четное количество.
3. В стране некоторые города соединены дорогами. Из каждого города выходит по 5 дорог. Могло ли всего в стране быть 99 дорог?
4. Для натуральных x, y, z известно, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3. Указание: что-то мы похожее когда-то делали, только вот что?
5. Сколькими способами можно расставить 4 ладьи на шахматной доске так, чтобы каждая била ровно две?
6. Целые числа a, b, c и d таковы, что $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$, и $ad = 60$. Найдите произведение всех четырех чисел.
7. Делится ли на 3 количество решений уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{100}$? (У уравнения $x + 2y + 2z = 3$ решение $x = 1, y = 1, z = 0$ и решение $x = 1, y = 0, z = 1$ считаются разными.)