Предновогодняя

10.1. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

1. В новогоднюю ночь Дед Мороз поставил на подоконнике в ряд (слева направо) крокус, фикус и кактус. Каждое утро Ваня, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

2. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

3. Несколько шахматистов играют в однокруговой турнир по шашкам. Вечером одного из дней соревнований, попивая чай, каждый из них назвал сколько он сыграл партий на данный момент. Докажите, что какие-то два шахматиста назвали одно и то же число.

4. У каждого пациента спецлечебницы №239 ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разделить на две нейтральные палаты. (То есть так, чтобы у каждого пациента в палате не было ни друзей, ни врагов.)

5. У Коли и Юры были одинаковые прямоугольные открытки с одной стороной 12 см. Коля разрезал открытку на две равные прямоугольные половинки, одну половинку выкинул, другу снова разрезал на две равные прямоугольные половинки и одну половинку выкинул. Юра разрезал свою открытку на две равные прямоугольные половинки, и одну половинку выкинул. Выяснилось, что оставшиеся у Коли и Юры прямоугольники имеют одинаковый периметр. Чему могла быть равна другая сторона открытки?

6. В мешочек с подарками Снегурочка положила 9 мешочков поменьше. В каждый из вложенных мешкочков либо положили 9 еще поменьше, либо ничего не положили. В каждый из меньших опять положили или 9, или ни одного, и т.д. После этого оказался ровно 251 мешочек с содержимым. А сколько пустых?

7. Для натуральных x, y, z известно, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 4.