Напоминаем, что номер 4.6 означает 6ая задача 4ой серии, f означает задание на осенние каникулы, w — на зимние.

Заметим, что предложенный список — лишь некоторые общие названия для семейств задач. В билете вам будет предложено рассказать решение одной или нескольких задач, указанных в скобках, возможно, с небольшими измененниями, не влияющими на рассуждения..

1. Четность (задачи 1.3a, 14.1).

2. Десятичная запись числа (задачи 1.6, 2.2, 3.3, f.4).

3. Подсчет двумя способами (задачи 2.4, 3.6, f.8).

4. Признаки равноостаточности при делении на 3, на 9 (задачи 5.6, f.11, 6.2, 12.4).

5. Арифметика остатков (задачи 3.4, 3.5, 4.1, w.1; 9.4, 10.4).

6. Зацикливание (задачи 3.1d, 4.4b, 5.1, 12.6).

7. Доказательство от противного. Принцип Дирихле (задачи 5.3, 5.5, 6.5, 13.3, 17.2).

8. Графы. Подсчет числа ребер (задачи 9.3, 10.3, 16.6).

9. Графы. Разное (задачи 10.1, 11.3, 11.4, w.4, w.9).

10. Принцип крайнего (задачи 13.1, 14.7, 15.1b, 17.5).

11. Раскраски. Разное (задачи 15.5, 16.3).

12. Алгебра. Работа с выражениями (задачи 7.4, 9.6, 10.5, 16.2).

13. Алгебра. Диофантовы уравнения (задачи 12.7, 13.7, 14.5, 14.6).

1. Четность (задачи 1.3а, 14.1).

• Существуют ли 3 натуральных числа, попарные суммы которых равны а) 1542, 1543, 1544?

• Магическим квадратом называется квадрат, в котором суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке равны между собой. Можно ли составить магический квадрат из первых 64 простых чисел?

2. Десятичная запись числа (задачи 1.6, 2.2, 3.3, f.4).

• Умная девочка Маша взяла трехначное число и написала его дважды. Докажите, что полученное число делится на 7.

• Из пятизначного числа вычли число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что получившееся число делится на 11.

• Леонид Андреевич утверждает, что если к любому двухзначному числу приписать справа число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получим четырехзначное число, делящееся на 11 без остатка. Докажите, что ваш преподаватель прав.

• Докажите, что число $\overline{ababab}$ делится на 37.

3. Подсчет двумя способами (задачи 2.4, 3.6, f.8).

• Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64, так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма записанных чисел была равна 120?

• В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце — по 10, а в каждой строке — по 20. Сколько в таблице строк?

• Можно ли в клетках прямоугольной таблицы 15×43 расставить числа так, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 239, а в каждом столбце — 146 ?

4. Признаки равноостаточности при делении на 3, на 9 (задачи 5.6, f.11, 6.2, 12.4).

• Изначально на доске написано 1. К числу прибавляют сумму его цифр, после этого старое число стирают и записывают новое. Докажите, что мы никогда не получим число вида $99\ldots9$.

• Может ли быть квадратом число, составленное из 30-ти единиц и сколько угодно нулей?

• На доске написано число, записанное одними 9 и 0. Каждую минуту число на доске стирают и вместо него записывают сумму его цифр. Так продолжается, пока на доске не останется однозначное число. Какое?

• Настя переставила цифры в некотором натуральном числе, и от этого оно уменьшилось ровно в три раза. Докажите, что Настино число делилось а) на 9; b) на 27.

5. Арифметика остатков (задачи 3.4, 3.5, 4.1, w.1; 9.4, 10.4).

• Докажите, что n^5+4n делится на 5 при любом натуральном n.

• Докажите, что n^2+1 не делится на 3 ни при каком натуральном n.

• Докажите, что n^3+2n делится на 3 при любом натуральном n.

• Докажите, что n^3-n делится на 24 при любом нечетном n.

• Для натуральных x, y, z известно, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3.

• Для натуральных x, y, z известно, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 5.

6. Зацикливание (задачи 3.1d, 4.4b, 5.1, 12.6).

• Найдите остаток от деления d) 2^{2010} на 5.

• Вычислите остаток при делении b) 3^{100} на 7;

• Найдите остаток от деления 10^{100} при делении на 7.

• На какую цифру оканчивается число $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{50}$?

7. Доказательство от противного. Принцип Дирихле (задачи 5.3, 5.5, 6.5, 13.3, 17.2).

• К празднику зал украсили 50 воздушными шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 шариков разных цветов.

• Докажите, что из любых 7 чисел можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10. b) Докажите, что из любых 11 чисел можно выбрать два сумма или разность которых делится на 19.

• 16 мальчиков пошли в лес за грибами. Всего они набрали 100 грибов. Докажите, что какие-то два мальчика набрали одинаковое количество грибов.

• **Нечетные** числа от 1 до 169 разбили на 13 групп. Докажите, что сумма чисел в какой-то из них не превосходит 555.

• На конференцию приехали 100 учёных из четырёх стран. Оказалось, что среди любых 13 участников есть, по крайней мере, двое одного возраста. Докажите, что или из какой-то страны приехали двое участников одного возраста и одного пола.

8. Графы. Подсчет числа ребер (задачи 9.3, 10.3, 16.6).

• В стране некоторые города соединены дорогами. Из каждого города выходит по 5 дорог. Могло ли всего в стране быть 99 дорог?

• В психиатрической больнице есть главный врач и много сумасшедших. В течение недели каждый сумасшедший один раз в день кусал кого-нибудь (возможно и себя). В конце недели оказалось, что у каждого из больных по два укуса, а у главного врача — сто укусов. Сколько сумасшедших в больнице?

• В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с 4 девочками, а каждая девочка с 5 мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

9. Графы. Разное (задачи 10.1, 11.3, 11.4, w.4, w.9).

• В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

• Несколько шахматистов играют в однокруговой турнир по шашкам. Вечером одного из дней соревнований, попивая чай, каждый из них назвал сколько он сыграл партий на данный момент. Докажите, что какие-то два шахматиста назвали одно и то же число.

• У каждого пациента спецлечебницы №239 ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разделить на две нейтральные палаты. (То есть так, чтобы у каждого пациента в палате не было ни друзей, ни врагов.)

• Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

• В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

10. Принцип крайнего (задачи 13.1, 14.7, 15.1b, 17.5).

• Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы любые два соседних отличались хотя бы на 50?

• В вершинах куба расставлены цифры 1, 2, …, 8. Докажите, что есть ребро, цифры на концах которого отличаются не менее, чем на 3.

• b) Докажите, что числа от 1 до 16 нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

• По старому закону в деревне Вишкиль растояния между домами попарно различны. Каждый житель наблюдает за своим ближайшим соседом. Докажите, что какие-то два жителя деревни Вишкиль наблюдают друг за другом.

11. Раскраски. Разное (задачи 15.5, 16.3).

• На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и каждый приземляется на соседнюю по **вертикали** клетку этой доски. После этого посчитали количество свободных клеток. Какое наименьшее число могло получиться?

• На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и каждый приземляется на соседнюю по **диагонали** клетку этой доски. Докажите, что хотя бы 5 клеток доски окажутся свободными.

12. Алгебра. Работа с выражениями (задачи 7.4, 9.6, 10.5, 16.2).

• Известно, что $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$? (Как обычно, нужно найти все варианты и показать, что других нет.)

• Целые числа a, b, c и d таковы, что $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$, и $ad = 60$. Найдите произведение всех четырех чисел.

• Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей — a/b или b/a — меньше отличается от числа 1?

• Докажите, что числа a) 8999999; b) 100020001; c) 1003003001 составные.

13. Алгебра. Диофантовы уравнения (задачи 12.7, 13.7, 14.5, 14.6).

• Натуральное число n равно произведению двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел на 100 больше, чем число n. Чему может быть равно число n?

• Найдите все такие пары натуральных чисел x и y, что выполнено равенство a) $x^2 - y^2 = 97$; b) $x^2 = y^2 + 91$.

• К простому числу прибавили 400 и получили полный квадрат. Найдите это простое число.

• Найдите все такие целые числа x и y, что a) $x^2 + y^2 = 99$; b) $x^2 + y^2 = 9999$.