Напоминаем, что номер 4.6 означает 6ая задача 4ой серии, f означает задание на осенние каникулы, w — на зимние.

Заметим, что предложенный список — лишь некоторые общие названия для семейств задач. В билете вам будет предложено рассказать решение одной или нескольких задач, указанных в скобках, возможно, с небольшими измененниями, не влияющими на рассуждения.

1. Суммирование (задачи 1.7, 2.5).

2. Признаки равноостаточности при делении на 2, 4, 8 и другие степени двойки (задачи 4.2, f.2c).

3. Признаки равноостаточности при делении на 3, на 9 (задачи 4.3, f.2b).

4. Правила сложения и умножения остатков (задачи 3.1c, 4.4a, f.2a).

5. Принцип Дирихле (задачи 3.2, 7.7).

6. Комбинаторика (задачи f.5, 7.1, 7.2).

7. Комбинаторика. Перестановки, факториал (задачи 6.4, 8.1).

8. Комбинаторика. Идея дополнения (задачи 6.3b, 9.1).

9. Графы. Лемма о рукопожатиях (задачи 9.2, 15.7).

10. Раскраски (задачи 13.4, 16.4).

1. Суммирование (задачи 1.7, 2.5).

• Найдите, пожалуйста, сумму натуральных чисел от 1 до 1543.

• Найдите, пожалуйста, сумму **нечетных** чисел от 1 до $2n-1$. (Ответ выразите в зависимости от n.)

2. Признаки равноостаточности при делении на 2, 4, 8 и другие степени двойки (задачи 4.2, f.2c).

• a) Докажите, что если из числа вычесть число образованное двумя его последними цифрами, то получится число кратное 4. b) Докажите, что если из числа вычесть число образованное четырмя его последними цифрами, то получится число кратное 16.

Комментарий. Заметим, что из этой задачи и идеи из 4ой серии следует, что число дает такой же остаток при делении на 4 как и число, образованное двумя его последними цифрами.

• Вычислите остаток при делении c) 354169888123 на 4.

3. Признаки равноостаточности при делении на 3, на 9 (задачи 4.3, f.2b).

• Докажите, что четырехзначное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении a) на 3; b) на 9.

• Вычислите остаток при делении b) 354169888123 на 9.

4. Правила сложения и умножения остатков (задачи 3.1c, 4.4a, f.2a).

• Найдите остаток от деления c) 9^{100} на 8

• Вычислите остаток при делении a) $88 \cdot 35 \cdot 43 + 74 \cdot 71$ на 3.

• Вычислите остаток при делении a) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ на 7.

5. Принцип Дирихле (задачи 3.2, 7.7).

• a) Докажите, что из любых 11 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 10. b) Докажите, что из любых 20 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 19.

• На квадратной площади со стороной 1 км стоит 51 памятник И.П.Г.Л. Дирихле. Докажите, что какие-то три памятника помещаются на квадратном участке со стороной 200 м.

6. Комбинаторика (задачи f.5, 7.1, 7.2).

• В магазине "Все для чая" продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

• Ксения Юрьевна посчитала, сколько существует 6-значных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность. Докажите, что вы тоже можете это сделать — посчитайте!

• Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две (одинаковые) ладьи так, чтобы они не били друг друга?

7. Комбинаторика. Перестановки, факториал (задачи 6.4, 8.1).

• Имеется 8 полотен различных цветов. Сколькими способами можно сшить из них флаг, состоящий из 8 различных горизонтальных полос?

• Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове a) “МАМА”; b) “МАТЕМАТИКА”? (Словом называется произвольная последовательность букв.)

8. Комбинаторика. Идея дополнения (задачи 6.3b, 9.1).

• b) Сколько существует 9-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четверка?

• В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

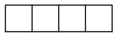
9. Графы. Лемма о рукопожатиях (задачи 9.2, 15.7).

• Несколько друзей гномов встречаются по двое и выпивают на двоих одну бутылку кефира. Докажите, что гномов, которые пили нечетное количество раз всегда четное количество.

• Можно ли в квадрате 5×5 закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки было нечетное число закрашенных соседей?

10. Раскраски (задачи 13.4, 16.4).

• a) Хромой король (король не может ходить по диагоналям) обошел несколько клеток шахматной доски и вернулся на прежнее поле. Докажите, что количество ходов, сделанных королем, четно.
b) Можно ли обойти хромым королём все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?

• Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигурки вида ?