МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Малый механико-математический факультет

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ВЕЧЕРНЕГО ОТДЕЛЕНИЯ МММФ

**В. О. Бугаенко**

# Математический кружок
# 9 класс

Москва — 2000

УДК 51(023)
Б90
ББК 22.1

**В. О. Бугаенко.**

Б90 Математический кружок. 9 класс. Методическая разработка вечернего отделения МММФ. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ и центра прикладных исследований, 2000, — 72 с.

Брошюра написана по материалам заданий математического кружка для 9 класса, проходившего в 1999–2000 уч. году на Малом мехмате.

# Оглавление

# От автора

Каждую субботу к 16 часам сотни школьников стекаются в высотное здание МГУ на Воробьёвых горах. На механико-математическом факультете проходят занятия Малого мехмата — сети математических кружков для школьников 6–11 классов. Количество участников кружков настолько велико, что свободных аудиторий на факультете в это время найти практически невозможно, хотя в расписании занятий «большого» мехмата субботний вечер свободен.

По традиции, берущей начало ещё с тридцатых годов, основным содержанием занятий является решение нестандартных задач. Каждый школьник получает в начале занятия листок с задачами, которые, как правило, объединены одной темой. Школьники учатся решать задачи и излагать найденные решения. Преподаватели разбирают решения некоторых задач, предлагавшихся на прошлых занятиях.

Основные принципы кружков Малого мехмата: они открыты для всех желающих и бесплатны для школьников. Более того, можно начать посещать кружок с любого занятия, и, естественно, в любой момент прекратить. Такая демократичная форма позволяет избежать отношения к занятиям, как к чему-то обязательному. Однако, она же делает очень ответственной методическую разработку занятий. Нужно учитывать различный уровень участников, чтобы занятия были посильны новичкам и одновременно не были скучны для тех, кто уже имеет некоторую подготовку.

Участие в кружке не даёт никаких льгот при поступлении и других формальных преимуществ. Поэтому сюда приходят только те, кто хочет научиться решать задачи, и кому интересен сам процесс решения задач. А это, по большому счёту, оказывается значительно существеннее всевозможных льгот.

Все школьники каждой параллели от 6 до 9 класса (а их обычно бывает от ста до двухсот, и занимают они от 5 до 8 аудиторий) получают одинаковые задания. Подготовить эти задания — обязанность руководителя параллели. Имея листок с заданиями как основу, преподаватель в своей аудитории может по-своему построить само занятие.

Ведущую роль в проведении кружков Малого мехмата играет механико-математический факультет МГУ. Основная часть преподавателей кружков, хотя и не все, — студенты и аспиранты мехмата. Встречаются преподаватели, закончившие вуз много лет назад. Бывает, что к ведению кружков 6–7 классов привлекаются старшеклассники московских математических школ. И всё же подавляющее большинство преподавателей связаны с мехматом либо в настоящем, либо в прошлом, либо в будущем.

Содействие и организационную помощь в проведении кружков оказывают дружественные организации: Московский Центр непрерывного математического образования и Дом научно-технического творчества молодёжи.

В первой части этой брошюры собраны материалы работы математического кружка Малого мехмата для школьников 9 класса, проходившего в 1999–2000 учебном году под руководством автора этих строк. Фактически, это собрание листочков, которые получали участники кружка в течение года. В них внесена лишь незначительная правка и исправлены замеченные опечатки. Кроме условий задач там содержатся теоретический материал и решения отдельных задач предыдущих занятий. Большинство листочков озаглавлены. Это значит, что многие (но не все!) предлагаемые задачи посвящены какой-то определённой теме. Обычно в заданиях можно встретить задачи на темы прошлого и следующего занятий.

В подготовке занятий активное участие принимали студенты первого и второго курсов мехмата Андрей Болтенков, Александр Водомеров, Александр Климентов, Сергей Михайлов, Иван Муханов, Яков Шапиро и Данил Шаповалов. Фактически, все они являются соавторами брошюры.

Во второй части брошюры помещены листки двух математических кружков 8 класса (что соответствует нынешнему 9 классу одиннадцатилетней школы), которые вёл в МГУ в 1972–1973 учебном году Николай Николаевич Константинов. Эти материалы публикуются здесь с его любезного согласия.

Брошюру могут использовать как школьники, которые любят решать математические задачи, так и руководители кружков при подготовке занятий. Конечно, книга не заменит полноправного «живого» участия в кружке. И руководителям кружка я не советую один к одному копировать приведённые листочки. Однако надеюсь, что собранный материал сможет оказать помощь и тем, и другим.

# ЧАСТЬ I. 1999–2000 уч. год
# Математический кружок Малого мехмата

**Занятие №1** *2 октября 1999 года*

## Письменная работа

1. Аня, Боря, Вася и Галя собирали грибы. Аня собрала грибов больше всех, Галя не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

2. Число при делении на 1980 и 1981 даёт одинаковый остаток 35. Какой остаток оно может давать при делении на 14?

3. Могут ли две бесконечных арифметических прогрессии положительных чисел иметь ровно два общих члена?

4. Каждый из 65 школьников написал по три контрольных работы и получил за каждую из них одну из оценок 2, 3, 4 или 5. Докажите, что найдутся по крайней мере два школьника, получившие одинаковые оценки за каждую из работ.

5. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел быть а) квадратом; б) кубом натурального числа?

6. Контрольная работа считается лёгкой, если на любой парте существует ученик, решивший её наполовину, и не менее половины класса решило её полностью. Дайте определение сложной контрольной работы.

7. Провести через данную точку прямую, высекающую на двух данных равных окружностях хорды равной длины.

8. Докажите, что не существует многогранника, имеющего нечётное число граней, любая грань которого имеет нечётное число сторон.

9. Существует ли плоскость, пересекающая куб по шестиугольнику?

**Занятие №2** *9 октября 1999 года*

## Принцип Дирихле

Вначале приведём решение задачи 4 письменной работы.

Выясним прежде всего, сколько существует различных наборов оценок, которые может получить школьник за три контрольных работы. За первую контрольную работу можно получить одну из четырёх оценок. В каждом из этих случаев за вторую работу можно получить также одну из четырёх оценок. Значит, оценки за две работы можно получить $4 \times 4 = 16$ способами. Опять же, в каждом из 16 случаев, можно получить одну из четырёх оценок за третью работу. Итого имеется $16 \times 4 = 64$ вариантов оценок за три работы.

Поэтому, если бы все школьники получили различные наборы оценок, то общее число школьников было бы не больше 64. А по условию их 65. Полученное противоречие показывает, что предположение было неверным, значит, какие-то два школьника получили одинаковые наборы оценок.

Приведённое рассуждение использует *принцип Дирихле*, одна из возможных формулировок которого следующая: «Если в $n$ клетках сидит $n+1$ кролик, то хотя бы в одной из клеток находятся не менее двух кроликов». Несмотря на очевидность этого утверждения, его применение позволяет решать и более сложные задачи. В большинстве задач этого задания применение принципа Дирихле или аналогичных соображений помогает найти решение.

* * *

1. Докажите, что в классе из 25 учеников найдутся трое, отмечающих свой день рождения в одном месяце.

2. В мешке лежат шарики трёх цветов: чёрного, белого и синего. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них заведомо оказалось три одноцветных?

3. В каждую клетку таблицы $3 \times 3$ записали одно из чисел $-1$, 0 или 1, а затем нашли суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали. Докажите, что среди полученных чисел имеются равные.

4. В футбольном турнире в один круг (это значит, что каждая команда играет с каждой по одному разу) принимают участие 16 команд. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

5. В классе 25 учеников. Известно, что среди любых трёх из них двое дружат между собой. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

6. Аня, Боря, Вася, Галя, Даша и Егор собирали грибы. Больше всех грибов собрала Аня, а меньше всех — не Галя и не Даша. Верно ли, что девочки собрали грибов не меньше, чем мальчики?

7. Числа от 1 до 64 расставили в клетках таблицы $8 \times 8$ (по одному в каждую клетку). Докажите, что найдутся две соседних (имеющих общую сторону) клетки, разность чисел в которых не менее 5.

8. На квадратном столе со стороной 70 см лежит 100 квадратных салфеток со стороной 10 см. Докажите, что в стол можно вбить гвоздь, который проткнёт не менее трёх салфеток.

9. Докажите, что из любых ста натуральных чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

10. В ряд стоят 30 сапог: 15 правых и 15 левых. Обязательно ли среди них найдутся а) 20; б) 10 подряд стоящих сапог, среди которых правых и левых поровну?

## Письменная работа (для новичков)

1. Аня, Боря, Вася, Галя, Даша и Егор собирали грибы. Больше всех грибов собрала Аня, а меньше всех — не Галя и не Даша. Верно ли, что девочки собрали грибов не меньше, чем мальчики?

2. Является ли точным квадратом число, десятичная запись которого состоит из 1999 троек?

3. Даны две окружности и точка. Построить отрезок, концы которого лежат на данных окружностях, а середина — в данной точке.

4. В каждую клетку таблицы $3 \times 3$ записали одно из чисел $-1$, 0 или 1, а затем нашли суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали. Докажите, что среди полученных чисел имеются равные.

5. Вася сказал, что поедет в воскресенье в лес, если не будет дождя и хотя бы один из его друзей — Петя или Коля тоже поедет. Сформулируйте, в каком случае Вася не поедет в воскресенье в лес.

6. Может ли прямая, нарисованная на клетчатой бумаге, проходить ровно через два центра клеток?

7. Может ли тень от куба иметь форму шестиугольника?

**Занятие №3** *16 октября 1999 года*

## «Верно ли, что ...?»

Часто вопрос задачи начинается словами «Верно ли, что ...?» или «Можно ли утверждать, что ...?» Если ответ в такой задаче отрицательный, то для его обоснования достаточно привести один пример, для которого сформулированное условие не выполняется (такой пример называется *контрпримером*). Если же ответ положительный, то нужно *доказать*, что условие выполняется *во всех возможных случаях*.

Обратно, если в задаче спрашивается «Существует ли ...?» или «Можно ли ...?», то обоснованием положительного ответа может служить один пример, а в случае отрицательного ответа нужно привести доказательство.

Приведём решения двух задач.

*Задача А.* Аня, Боря, Вася и Галя собирали грибы. Аня собрала грибов больше всех, Галя не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

*Ответ*: да, верно. Докажем это. Поскольку Галя собрала грибов не меньше всех, то один из мальчиков собрал меньше неё или столько же. Пусть это Вася (случай Бори разбирается аналогично). Кроме того, поскольку Аня собрала больше всех, то, тем самым, больше Бори. Имеем $А > Б$, $Г \geqslant В$ (через $А$, $Б$, $В$ и $Г$ обозначены количества грибов, собранных детьми с именами на соответствующую букву). Сложив два этих неравенства, получаем $А+Г > Б+В$, а это и значит, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики.

*Задача Б*. Аня, Боря, Вася, Галя, Даша и Егор собирали грибы. Больше всех грибов собрала Аня, а меньше всех — не Галя и не Даша. Верно ли, что девочки собрали грибов не меньше, чем мальчики?

*Ответ*: нет, не верно. Например, пусть количества собранных грибов распределились так: Аня — 6, Боря — 5, Вася — 5, Галя — 2, Даша — 2, Егор — 1. Больше всех собрала Аня, меньше всех — Егор; однако у мальчиков 11 грибов, а у девочек только 10.

*Замечание*. При решении задачи Б можно рассуждать следующим образом. По условию, кто-то из мальчиков собрал грибов меньше, чем Галя, и кто-то — меньше, чем Даша. Если это разные мальчики, то рассуждения аналогичные приведённым в решении задачи А, показывают, что девочки собрали грибов больше. Значит, контрпример можно построить только если дети расположились по количеству собранных грибов в таком порядке: сначала Аня, потом два мальчика, потом две другие девочки, и в конце ещё один мальчик.

Это рассуждение помогает найти контрпример в задаче, однако для обоснования полученного ответа его приводить не надо. Контрпример сам по себе доказывает, что утверждение не верно, независимо от того, каким образом он был найден.

* * *

1. Две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

2. а) Можно ли расставить знаки + или − между каждыми двумя соседними цифрами числа 123456789 так, чтобы полученное выражение равнялось нулю?

   б) Тот же вопрос, только знаки можно ставить между некоторыми (не обязательно всеми) цифрами.

3. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники, никакие два из которых не имели бы общей стороны.

4. Числа от 1 до 97 расставили по окружности в произвольном порядке. Может ли сумма любых трёх стоящих подряд чисел быть чётной?

5. Существует ли самопересекающаяся а) 6-звенная; б) 9-звенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно один раз?

6. Верно ли, что при любом целом $n$ число $n^2 + n + 41$ — простое?

7. а) Взвод солдат построили в шеренгу. При этом оказалось, что рост каждого солдата (кроме крайних) равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста?

   б) Взвод солдат построили по кругу. При этом оказалось, что рост каждого солдата равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста?

8. Можно ли некоторый выпуклый четырёхугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, разрезать прямой на две равные части?

9. Верно ли, что при любом целом $n$ число $n^3 - n$ делится на 6 ?

10. Докажите, что среди ныне живущих на Земле людей есть двое, родившихся одновременно, с точностью до секунды. (Всего на земле 6 миллиардов жителей; людей старше 150 лет не существует.)

**Занятие №4** *23 октября 1999 года*

## Чётность, делимость, остатки

В сегодняшнем задании большинство задач (но не все) используют понятия делимости, деления с остатком, чётности. Напомним вначале вкратце основные определения.

Говорят, что целое число $a$ *делится* на целое число $b$, не равное нулю, если существует такое целое число $c$, что $a = b \cdot c$. В этом случае число $a$ называется *кратным* числа $b$, а число $b$ — *делителем* числа $a$. Число 0 делится на все числа (кроме себя самого); любое же целое число, кроме нуля, имеет лишь конечное количество делителей.

Пусть даны целое число $a$ и целое положительное число $b$. Тогда *поделить* число $a$ на $b$ *с остатком* — значит найти такие целые числа $q$ и $r$, что $0 \leqslant r < b$ и $a = bq + r$. Такая пара чисел всегда существует и единственна. Число $q$ называется *частным*, а $r$ — *остатком* от деления $a$ на $b$. Остаток от деления числа $a$ на $b$ равен нулю тогда и только тогда, когда $a$ делится на $b$.

Числа, дающие при делении на 2 остаток 0, называются *чётными*, а остаток 1 — *нечётными*.

Остаток от деления числа на 10 равен последней цифре десятичной записи этого числа.

*Упражнение.* Поделите число $-1$ на 1999 с остатком (т. е. найдите частное и остаток).

*Решение задачи* 3.5. а) *Ответ*: да.

На рис. 1 изображена замкнутая ломаная, удовлетворяющая условиям. (Незамкнутую ломаную нарисуйте сами.)

б) *Ответ*: нет.

Найдём, чему может равняться количество точек самопересечения такой ломаной. Так как каждая точка самопересечения принадлежит двум звеньям, то их количество должно быть вдвое меньше количества звеньев. Но число звеньев нечётное, поэтому искомое количество точек самопересечения не может равняться никакому целому числу. Значит, такой ломаной не существует.

* * *

1. Докажите, что количество людей, живущих и когда либо живших на Земле, совершивших нечётное количество рукопожатий, чётно.

2. Игра «15» представляет собой поле — коробочку размером $4 \times 4$, в которой находятся 15 фишек (квадратиков $1 \times 1$), пронумерованных числами от 1 до 15; при этом одно поле остаётся пустым. В начале игры пустое поле находилось в правом нижнем углу (рис. 2). Я начал двигать фишки по полю. За один ход я передвигал на пустое поле одну из фишек, находившуюся на соседнем поле. В результате порядок расположения фишек изменился, но пустое поле вновь оказалось в правом нижнем углу. Докажите, что я сделал чётное число ходов.

3. Решить в целых положительных числах уравнения

   а) $x^2 - y^2 = 1998$;
   б) $x^2 - y^2 = 1999$.

   *Примечание.* Решить уравнение значит найти *все* значения неизвестных (в случае двух неизвестных — все пары), удовлетворяющие уравнению, и доказать, что других нет.

4. В Советском Союзе находились в обращении денежные купюры в 1, 3, 5, 10 и 25, 50 и 100 рублей. Леонид Ильич захотел разменять 25 рублей на купюры достоинством менее 10 рублей так, чтобы всего получилось 10 купюр. Удалось ли ему это сделать?

5. На доске выписаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Разрешается одновременно прибавлять единицу к любым двум числам. Можно ли за несколько таких операций добиться, чтобы все числа стали равными?

6. На какую цифру оканчивается число а) $1999^{1999}$; б) $7^{7^{7^7}}$?

7. Целое число возвели в квадрат и разделили на 8. Какой остаток мог получиться?

8. Найдите наименьшее целое положительное число, дающее при делении на 13 остаток 12, при делении на 12 остаток 11, а при делении на 11 остаток 10.

9. У Васи имеется шахматная доска, из которой вырезали два угловых поля a1 и h8 (рис. 3), и 31 кость домино размера в две клетки шахматной доски каждая. Сможет ли Вася покрыть доминошками всю доску?

10. Докажите, что число $8^{101} + 8^{102} + \ldots + 8^{107}$ делится на 7.

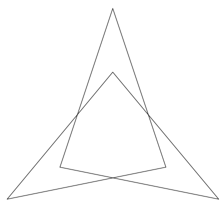


Рис. 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| **5** | **6** | **7** | **8** |
| **9** | **10** | **11** | **12** |
| **13** | **14** | **15** | |

Рис. 2

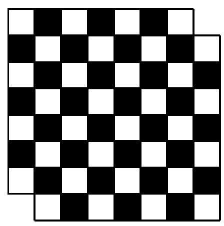


Рис. 3

**Занятие №5** *30 октября 1999 года*

## Раскраски

Приведём решения двух задач из прошлого занятия.

Сначала разберём *задачу* 4.2.

*Первое решение.* Будем следить за движением пустого поля внутри коробочки. За один ход оно может сместиться либо вправо, либо влево, либо вверх, либо вниз. Количество ходов вправо должно равняться количеству ходов влево (в противном случае, пустое поле не оказалось бы в том же вертикальном ряду, что и вначале). Значит, общее количество ходов по горизонтали чётно. Аналогично доказывается, что и количество ходов по вертикали тоже чётно. Поэтому количество всех ходов чётно.

*Второе решение.* Раскрасим клетки игровой доски в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Тогда при каждом ходе цвет клетки, в которой находится пустое поле меняется. Изначально пустое поле находится в правой нижней клетке, которая окрашена в белый цвет. Значит, после каждого нечётного хода пустое поле находится на чёрной клетке, а после чётного — на белой. В результате оно оказалось на белой клетке, значит всего было сделано чётное число ходов.

Теперь приведём *решение задачи* 4.9 (про «изуродованную» шахматную доску). То, что осталось от шахматной доски, содержит всего 62 клетки и, казалось бы, они могут быть покрыты 31 доминошкой размером в две клетки. Однако... обе вырезанные клетки чёрные, поэтому из оставшихся клеток 30 чёрных и 32 белых. А каждая доминошка, как бы её ни положили на доску, покроет одну чёрную и одну белую клетки! Значит, положить 31 доминошку на доску без наложений невозможно (для этого нужно иметь 31 чёрную клетку, а их только 30). Следовательно, ответ в задаче отрицательный.

Два раза в предыдущих решениях нам помогала шахматная раскраска доски. В случае шахматной доски нам нужно было лишь вспомнить о её существовании, а в случае доски для игры в «15» пришлось таковую раскраску ввести самим. Часто удачная раскраска (не обязательно шахматная) данного в задаче объекта помогает решить задачу. Задачи, решить которые помогает раскраска, вы найдёте среди предложенных ниже.

* * *

1. Можно ли обойти шахматную доску ходом коня, побывав на каждом поле по одному разу, начав в левом нижнем углу доски (на поле a1) и закончив в правом верхнем (на поле h8)?

2. Можно ли фигуру из 60 клеток (рис. 4) замостить двадцатью прямыми тримино (рис. 5а; размер клетки тримино совпадает с размером клетки фигуры)?

3. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $O$ — точка пересечения диагоналей. Докажите, что площади треугольников $AOD$ и $BOC$ равны.

4. Фигура «слонёнок» ходит по шахматной доске, как и слон, по диагонали, но только на одно поле. Можно ли перекрасить клетки шахматной доски (используя чёрный и белый цвета, при этом часть клеток можно оставить покрашенными в свой цвет, а часть — перекрасить на противоположный), чтобы при каждом ходе «слонёнка» цвет поля менялся?

5. Какое минимальное количество выстрелов нужно сделать в игре «морской бой», чтобы наверняка «ранить» четырёхпалубный корабль?

6. В прямоугольную коробочку были сложены несколько прямых тримино (рис. 5а) так, что они заполняли её целиком (коробочка такова, что лежащие в ней фигурки не могут налегать друг на друга). Затем одно прямое тримино заменили на тримино-уголок (рис. 5б). Докажите, что образовавшийся набор не поместится в коробочку.

7. Пространственный лабиринт состоит из 27 кубических комнат, расположенных в виде куба $3 \times 3 \times 3$. Из любой комнаты можно перейти в любую соседнюю (через любую стену, пол или потолок). Исследователь лабиринта находится в центральной комнате. Он хочет пройти по всем комнатам, не проходя никакой комнаты дважды. Удастся ли ему это?

8. Можно ли прямоугольник $11 \times 12$ разрезать на Т-тетрамино (рис. 5в)?

9. Можно ли число 1999 представить в виде суммы квадратов трёх нечётных чисел?

10. Разрежьте уголок (рис. 5б) на четыре равные части.

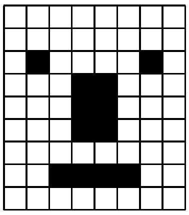
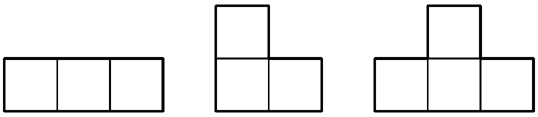


Рис. 4



а) Прямое тримино

б) Тримино-уголок

в) Т-тетрамино

Рис. 5

**Занятие №6** *6 ноября 1999 года*

## Площади многоугольников

Строгое введение понятия площади фигуры оказывается значительно более сложным делом, чем это может показаться на первый взгляд. Мы не будем этим заниматься, ограничившись лишь рассмотрением площадей многоугольников. Более того, из всех свойств площади будет достаточно использовать лишь следующие три.

- Площадь любого многоугольника — положительное число.
- Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих частей.
- Площадь треугольника равна половине произведения длины любой его стороны на длину высоты, опущенной на эту сторону (говоря короче, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту).

Многоугольники, имеющие равные площади, называются *равновеликими.* Если один из многоугольников можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить другой, то эти многоугольники называются *равносоставленными.* Очевидно, что любые равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Действительно, разрезанием и складыванием невозможно изменить площадь. Гораздо сложнее доказать обратное утверждение, которое, тем не менее, верно. Любые два равновеликих многоугольника являются равносоставленными.

Часто использование понятия площади многоугольника позволяет решить задачу, в формулировке которой понятие площади само по себе не фигурирует.

*Решение задачи* 5.3. Треугольники $ABC$ и $ABD$ равновелики, так как они имеют общее основание $AB$ и равные высоты, опущенные на него. Вычитая площадь их общей части — треугольника $AOB$, получаем, что площади треугольников $BOC$ и $AOD$ равны.

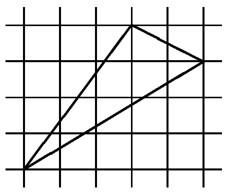


Рис. 6

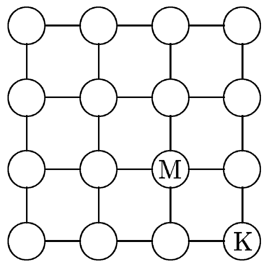



Рис. 7а

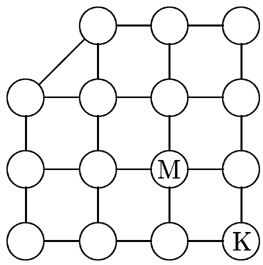



Рис. 7б

* * *

1. а) Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.

   б) докажите, что три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

2. а) В треугольнике $ABC$ точка $C_1$ лежит на стороне $AB$, точка $K$ на отрезке $CC_1$. Докажите, что
$$\frac{S_{\triangle ACK}}{S_{\triangle BCK}} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

   б) *Теорема Чевы.* Три точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ выбраны на сторонах $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$ так, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, что
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle DOA}$.

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от положения этой точки.

5. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагонали.

6. Найдите площадь треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге (рис. 6). Площадь одной клетки равна 1.

7. Могут ли длины высот треугольника равняться 1, 2 и 3 ?

8. Длины сторон треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1 ?

9. Кошка бегает за мышкой по доске, изображённой на а) рис. 7а); б) рис. 7б). За один ход можно перейти в соседнее поле, по нарисованному отрезку. Начинает кошка. Кошка съедает мышку, если оказывается с ней в одной точке. Удастся ли ей это?

10. Разрежьте квадрат со стороной 5 на несколько частей, из которых можно сложить два квадрата со сторонами 3 и 4.

**Занятие №7** *13 ноября 1999 года*

## Математические игры

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики–нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики–нолики (на доске $3 \times 3$) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

Игра в кошки–мышки (задача 6.9), является выигрышной для мышки в случае а) и для кошки в случае б). Действительно, раскрасим узлы доски в два цвета в шахматном порядке. После каждого хода кошки она оказывается с мышкой в узлах разного цвета, поскольку любой ход меняет цвет. Значит, чтобы всё время убегать от кошки, мышка может ходить как угодно, лишь бы не прыгать самой в лапы кошке. В случае же б) имеется ход, позволяющий кошке не сменить цвет (ход по наклонной линии в левом верхнем углу). Сделав этот ход, кошка без труда загонит мышку в любой другой угол и поймает (докажите это строго сами).

Большинство из задач этого занятия представляют собой правила некоторой математической игры. Ваша цель — определить, является ли игра выигрышной (и для какого из игроков) или ничейной, предъявив соответствующую стратегию. Заметим, что требуется не только уметь выигрывать, но и составить «инструкцию», следуя которой, выиграет любой человек. Для начала предлагаем поиграть в эти игры между собой.

* * *

1. *Спички.* В кучке лежат 100 спичек. Двое по очереди берут

спички из кучки. За один ход разрешается взять одну или две спички. Взявший последнюю спичку выигрывает.

2. *Щёлк.* «Доска» представляет собой прямоугольную шоколадку, разделённую бороздками на дольки. Ход состоит в том, что игрок выбирает любую ещё не съеденную дольку и съедает её, а также все дольки, расположенные от выбранной выше и левее (иными словами, съедает уголок). Съевший последнюю дольку, проигрывает. Рассмотрите случаи размера шоколадки а) $2 \times 8$; б) $8 \times 8$.

3. *Крестьяне и свиньи.* Двое крестьян (К) ловят двоих свиней (С) на доске (рис. 8). Ходят по очереди. За каждый ход, ходит либо один из крестьян, либо одна из свиней. Смогут ли крестьяне поймать свиней?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| С | | К | | | К | | С |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Рис. 8

4. *Лото*–15. На столе лежат 9 карточек с цифрами от 1 до 9. Двое по очереди берут карточки. Выигрывает тот, у кого на руках окажутся три карточки с суммой 15.

5. *Ним.* Имеются несколько кучек камней. Двое по очереди берут камни. За один ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучи. Выигрывает взявший последний камень. Рассмотрите случаи начального количества камней: а) две кучки по 10 камней; б) три кучки по 10 камней.

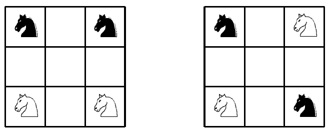
6. *Кони.* На доске $3 \times 3$ стоят два белых и два чёрных коня. Можно ли, двигая коней по правилам шахмат (в любом порядке) из позиции а) получить позицию б) (рис. 9)?

7. *Ладьи.* На доске $2 \times 8$ стоят две белых и две чёрных ладьи (рис. 10). Двое ходят по очереди.

а) За один ход первый передвигает одну из белых ладей на любое количество полей вправо, а второй — одну из чёрных ладей на любое количество полей влево. Перепрыгивать через чужую ладью нельзя. Тот, кто не может сделать ход, проиграл.

б) То же условие, но все ладьи могут ходить как вправо, так и влево.

8. *Сеанс одновременной игры.* Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с гроссмейстерами Гарри Каспаровым и Анатолием Карповым. С одним из соперников он играл белыми фигурами, а с другим — чёрными. Несмотря на то, что Бендер играл в шахматы всего третий раз в жизни, и предыдущий его опыт в Васюках был весьма плачевным, ему удалось взять в этом сеансе одно очко. (За победу в шахматной партии даётся 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?



а) б)

Рис. 9

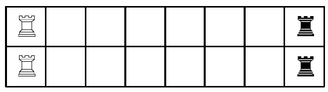


Рис. 10

**Занятие №8** *20 ноября 1999 года*

## Графы

Если на плоскости (или в пространстве) отмечено несколько точек, некоторые из них соединены между собой отрезками, то говорят, что имеется *граф*. Отмеченные точки называются его ***вершинами***, а отрезки — ***рёбрами***.

Примеры графов:

- каркас любого многогранника в пространстве (т. е. множество его вершин и рёбер);
- схема линий метро;

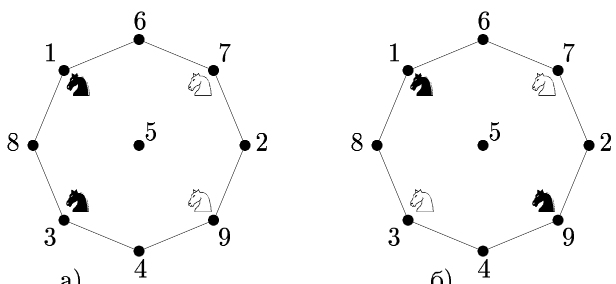
- граф знакомств для некоторой компании людей (вершины соответствуют людям, вершины соединены ребром, если соответствующие им люди знакомы).

Часто решение задачи значительно упрощается, если представить условие в виде графа, обозначив какие-либо объекты точками, а отношения между ними — отрезками.

Приведём *решение задачи* 7.6 («кони»). Занумеруем клетки доски числами 1, 2, ..., 9 как показано на рис. 11. Каждой клетке сопоставим точку плоскости, и соединим соответствующие точки отрезком в случае, если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня. В результате мы получим граф в виде восьмиугольника и одной изолированной точки. Исходная и требуемая расстановка коней изображены на рис. 12 а) и б) соответственно. Теперь каждый ход состоит в передвижении коня на соседнюю вершину восьмиугольника. Ясно, что при этом порядок следования коней вдоль периметра восьмиугольника поменяться не может, поэтому получить из позиции а) позицию б) невозможно.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Рис. 11




а) б)

Рис. 12

*   *   *

1. В некоторой стране 100 городов. Из каждого города выходит 6 дорог. Сколько всего дорог в этой стране?

2. Двое по очереди проводят диагонали выпуклого 20-угольника. Запрещается проводить диагонали, имеющие общие точки (даже вершины) с уже проведёнными. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из соперников имеет выигрышную стратегию?

3. На занятие математического кружка пришло 10 школьников, им было предложено 10 задач. Каждую задачу решило два школьника, и каждый школьник решил по две задачи. Докажите, что можно организовать рассказ решений так, чтобы каждый школьник рассказывал решение одной из решённых им задач, и решения всех задачи были рассказаны.

4. Можно ли фигуры, изображённые на рис. 13, нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя ни по какой линии дважды?

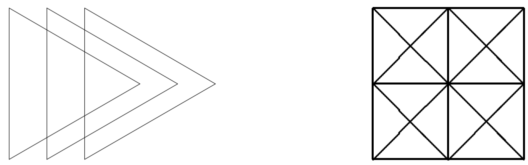


Рис. 13

5. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

6. Докажите, что в любом графе количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, чётно.

7. В Флатландии столица соединена авиалиниями с 21 городом, город Дальний — с одним, все остальные города — с 20 городами. Докажите, что из столицы можно прилететь в Дальний (быть может, с пересадками).

8. В городе $M$ с любой станции метро до любой другой можно проехать (быть может, с пересадками). Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт так, чтобы с любой оставшейся станции до любой другой можно было бы по прежнему проехать на метро.

9. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны попарно параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$). Докажите, что площадь треугольника $ACE$ составляет не менее половины площади шестиугольника.

10. Может ли сумма квадратов трёх целых чисел быть равна 1999 ?

**Занятие №9** *27 ноября 1999 года*

## Делимость, остатки

Пусть даны целое число $a$ и целое положительное число $b$. Тогда *поделить* число $a$ на $b$ *с остатком* значит найти такие целые числа $q$ и $r$, что $0 \leqslant r < b$ и $a = bq + r$. Такая пара чисел всегда существует и единственна. Число $q$ называется *частным*, а $r$ *остатком* от деления $a$ на $b$. Остаток от деления числа $a$ на $b$ равен нулю тогда и только тогда, когда $a$ делится на $b$.

Если числа $a$ и $b$ дают одинаковые остатки при делении на число $m$, то говорят, что $a$ *сравнимо* с $b$ по модулю $m$ и записывают

$$a \equiv b \pmod m$$

Два числа $a$ и $b$ сравнимы по модулю $m$ тогда и только тогда, когда их разность делится на $m$.

Сравнения можно складывать и умножать. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, $n$ — произвольное целое положительное число, то $a + c \equiv b + d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$ и $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Каждое число сравнимо ровно с одним из чисел $0, 1, \ldots, m-1$ по модулю $m$.

Натуральное число называется *простым* если у него только два делителя — единица и оно само. Натуральное число $n$ называется *составным* если у него более двух делителей. Единица не является ни простым, ни составным. Например 2, 3, 5, 7 — простые числа, а 4, 6, 8, 9 — составные.

Приведём *решение задачи* 8.10. Посмотрим какие остатки может давать квадрат числа при делении на 8. Для этого достаточно посмотреть только остатки чисел $0, 1, \ldots, 7$, так как если $a \equiv b \pmod m$, то $a^2 \equiv b^2 \pmod m$:

$$1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod 8; 2^2 \equiv 6^2 \equiv 4 \pmod 8; 0^2 \equiv 4^2 \equiv 0 \pmod 8.$$

Откуда видно, что сумма трёх квадратов не может быть сравнима с 7 по модулю 8, в частности не может быть равна 1999, так как $1999 \equiv 7 \pmod 8$.

Приведём *решение задачи* 4.10. Так как $8 \equiv 1 \pmod 7$, то $8^{101} + 8^{102} + \ldots + 8^{107} \equiv 1^{101} + 1^{102} + \ldots + 1^{107} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$, т. е. делится на 7.

* * *

1. Хулиганы Вася и Петя рвут школьную стенгазету. Вася рвёт каждый попавшийся ему кусок на 4 части, а Петя — на 7 частей. На следующий день уборщица нашла 2000 кусков. Докажите, что не все куски найдены.

2. На шахматной доске отметили 16 клеток так, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали оказалось по 2 отмеченные клетки. Докажите, что на отмеченные клетки можно так поставить 8 белых и 8 чёрных ладей (по одной на каждую клетку), чтобы на каждой вертикали и на каждой горизонтали стояло по одной белой и одной чёрной ладье.

3. Докажите, что существуют 1999 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого.

4. Можно ли переставив цифры ненулевой степени двойки получить степень тройки?

5. Докажите, что при нечётном $n$ число $11^n + 12^n$ делится на 23.

6. Докажите, что при любом натуральном $n$ число $n^7 - n$ делится на 7.

7. Семь целых чисел таковы, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что все они делятся на 5.

8. Через точку внутри угла провести прямую так, чтобы точка оказалась серединой отрезка, высекаемого углом на прямой.

**Занятие №10** *4 декабря 1999 года*

## Геометрические преобразования

Параллельный перенос, поворот вокруг точки, осевая симметрия, гомотетия — это различные примеры преобразований плоскости. Три первые из них — это движения, поскольку они сохраняют расстояния между точками. Гомотетия (с коэффициентом отличным от $\pm 1$) движением не является. Преобразования плоскости часто помогают при решении геометрических задач.

Приведём *решение задачи* 9.8. Отразим угол центрально симметрично относительно данной точки (рис. 14). В получившемся параллелограмме диагональ будет искомым отрезком.

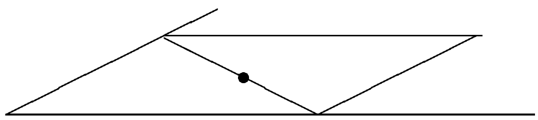


Рис. 14

*   *   *

1. На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ построены квадраты $ABB'A'$ и $BCC'B''$ (во внешнюю сторону). Докажите, что отрезки $B'C$ и $AB''$ равны и перпендикулярны.

2. Где нужно расположить станцию на прямой железной дороге, чтобы суммарное расстояние до двух деревень $A$ и $B$ (рис. 15) было минимальным?

3. Остров имеет форму острого угла. Леснику требуется пройти до каждого из двух берегов и вернуться к себе в хижину (рис. 16). Как он должен идти, чтобы пройти наименьшее расстояние?

4. Какое минимальное расстояние должна проползти муха по поверхности кубика, чтобы попасть из одного угла в противоположный?

5. Постройте правильный треугольник, одна вершина которого лежит в данной точке, вторая на данной прямой, а третья на данной окружности.

6. Для натурального числа $a$ существует число вида 22...22, делящееся на $a$, а для натурального числа $b$ число вида 33...33, делящееся на $b$. Докажите, что существует число вида 66...66, делящееся как на $a$, так и на $b$.

7. В кошельке лежат две монеты на сумму 15 копеек. Одна из них — не пятак. Какие это монеты?

8. В каком месте надо построить мост через реку, чтобы путь из одной деревни в другую через мост был самым коротким (рис. 17)?

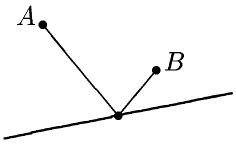



Рис. 15

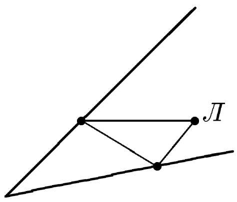



Рис. 16

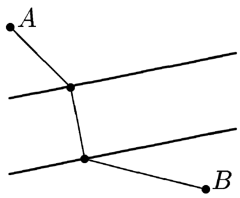



Рис. 17

9. Постройте квадрат, все вершины которого лежат на сторонах данного треугольника.

10. Двое играют в следующую игру. Они по очереди прибавляют к записанному на доске числу какой-нибудь его делитель, после чего на доску записывают результат, а старое число стирают. Проигрывает тот, кто запишет трёхзначное число. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если вначале на доске написана единица?

**Занятие №11** *11 декабря 1999 года*

## Математическая логика

Математическая логика имеет дело с утверждениями. *Утверждением* называется предложение, относительно которого можно определить истинно оно или ложно.

Если $A$ и $B$ — утверждения, то можно строить новые утверждения с помощью следующих операций.

| Операция | Определение | Обозначение |
|---|---|---|
| Отрицание | Не $A$ | $\overline{A}$ |
| Конъюнкция | $A$ и $B$ | $A \wedge B$ |
| Дизъюнкция | $A$ или $B$ | $A \vee B$ |
| Импликация | Если $A$, то $B$ | $A \Rightarrow B$ |

Если утверждение $A$ истинно, а утверждение $B$ ложно, то импликация $A \Rightarrow B$ ложна; во всех остальных случаях импликация истинна (в частности, даже в том случае, если оба утверждения $A$ и $B$ ложны!).

Сформулируйте самостоятельно, в каких случаях истинны отрицание, конъюнкция и дизъюнкция.

Часто в задачах встречаются рыцари и лжецы. *Рыцари* произносят только истинные утверждения, а *лжецы* — только ложные.

* * *

1. При любом ли значении $x$ истинно следующее утверждение:
$$\text{если } 3x - x^2 = 1, \text{ то } \frac{|x|}{x} = 1 \ ?$$

2. Путешественник приехал в страну, где имеются всего два города. В одном из них живут рыцари, а в другом — лжецы. При этом жители одного города могут приезжать в гости в другой город. В одном из городов путешественник встретил местного жителя. Можно ли, задав ему один вопрос (на который можно ответить «да» или «нет»), выяснить

   а) в каком городе он находится,

   б) жителем какого города является встреченный абориген?

3. Между Колей и Сашей, увлекающимися решением логических задач, произошёл следующий разговор:

   Коля: Я купил три полки для книг и расставил на них все свои учебники. Когда я сосчитал, сколько книг стоит на каждой полке и перемножил эти три числа, у меня получилось 72. Ты ведь знаешь, сколько у меня учебников?

   Саша: Да, знаю.

   Коля: Тогда скажи, сколько книг стоит на каждой полке?

   Саша: У меня не хватает данных.

   Коля: Полка, где было меньше всего книг, выглядела хуже остальных, и я поставил туда вазу с цветами.

   Саша: Теперь мне ясно, вот ответ ...

И Саша точно сказал, сколько книг стоит на каждой полке.

Скажите и Вы.

4. За круглым столом сидят рыцари и лжецы — всего 12 человек. Каждый произнёс: «Все, кроме меня и моих соседей — лжецы». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидело за столом?

5. Вася задумал число 1, 2 или 3. Петя хочет отгадать задуманное число, задав один вопрос, допускающий три ответа: «да», «нет» или «не знаю». Какой вопрос следует задать?

6. Каждый из четырёх гномов — Беня, Веня, Женя, Сеня — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор: Беня — Вене: «Ты врун»; Женя — Бене: «Сам ты врун»; Сеня — Жене: «Да оба они вруны, — (подумав), — впрочем, ты тоже». Кто из них говорит правду?

7. Предположим, что следующие утверждения истинны:

   - Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
   - люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

   Является ли в таком случае истинным утверждение, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

8. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что она переходит в себя при повороте на угол $48^\circ$. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте на а) $72^\circ$; б) $90^\circ$ ?

9. Сколько существует пятизначных чисел, получаемых из числа 12345 перестановкой цифр и у которых чётные цифры не стоят рядом?

10. Имеются две шкатулки, в одной из которых лежит ключ. На первой шкатулке написано: «Ключ находится во второй шкатулке». На второй написано: «Одно из двух утверждений, записанных на этих шкатулках, истинно, а второе — ложно». В какой из шкатулок находится ключ?

**Занятие №12** *18 декабря 1999 года*

## Комбинаторика. Вероятность

Задачи, в которых требуется найти количество способов что-то сделать или количество случаев, при которых имеет место какое-то событие, относятся к комбинаторике.

Предположим, нам надо подсчитать, сколькими способами можно осуществить некоторое действие. Предположим также, что нам удалось разбить это действие на две части, причём первую часть можно осуществить $n$ способами, а вторую часть — $m$ способами. Тогда очевидно, что всё действие целиком можно осуществить $n \cdot m$ способами. Это утверждение называется *основным правилом комбинаторики.*

Например, если в меню в столовой вам предлагается два варианта первого блюда, четыре варианта второго и три варианта третьего, то выбрать обед из трёх блюд можно $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ способами.

Родственными к комбинаторным являются вероятностные задачи. *Вероятностью* события называется отношение количества случаев, при которых данное событие имеет место, к общему количеству возможных случаев.

К примеру, при бросании игральной кости возможны шесть различных результатов; из них лишь в одном выпадает шестёрка. Поэтому вероятность выпадания шестёрки равна $1/6$.

* * *

1. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно составить переставляя следующие карточки:

$$\boxed{\text{М}}\boxed{\text{А}}\boxed{\text{Т}}\boxed{\text{Е}}\boxed{\text{М}}\boxed{\text{А}}\boxed{\text{Т}}\boxed{\text{И}}\boxed{\text{К}}\boxed{\text{А}}\ ?$$

2. Сколько различных календарей нужно напечатать, чтобы из них наверняка можно было выбрать календарь на любой год?

3. Найти сумму коэффициентов многочлена $(x-2)^{1999}$.

4. Грани кубика раскрашиваются в шесть данных цветов. Сколькими способами это можно сделать? Раскраски, получаемые друг из друга вращениями кубика, считаются а) различными; б) одинаковыми.

5. После окончания спектакля «Ревизор» Бобчинский и Добчинский начали препираться на сцене по поводу того, кто первый сказал «Э!».

   Бобчинский: Это Вы, Пётр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами раньше так говорили.

   Добчинский: Нет, Пётр Иванович, я так не говорил. Это Вы сёмгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

   Бобчинский: Что я сёмгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но всё-таки это Вы первый сказали «Э!».

   Выясните, кто первый сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесённых фраз нечётное число верных.

6. В колоде 52 карты. Какова вероятность, что две наугад выбранные карты из колоды окажутся тузами?

7. Какой результат более вероятен при бросании двух игральных костей: 7 или 8 ?

8. Какова вероятность, что при бросании трёх игральных костей выпадет хотя бы одна шестёрка?

9. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

10. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что все числа равны. Рассмотрим два произвольных числа $a$ и $b$ и запишем равенство
$$a = b + c.$$
    Умножив обе его части на $a - b$, получим
$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$
    Перенесём $ac$ в левую часть:
$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$

и разложим на множители:

$$a(a-b-c)=b(a-b-c).$$

Разделив обе части равенства на $a-b-c$, получаем

$$a=b.$$

**Занятие №13** *25 декабря 1999 года*

## Математические софизмы

1. *Принцип Дирихле опровергнут!*

   Их было десять чудаков, тех спутников усталых,
   Что в дверь решили постучать таверны «Славный малый».

   — Пусти, хозяин, ночевать, не будешь ты в убытке,
   Нам только ночку переспать, промокли мы до нитки.

   Хозяин тем гостям был рад, да вот беда некстати:
   Лишь девять комнат у него и девять лишь кроватей.

   — Восьми гостям я предложу постели честь по чести,
   А двум прийдётся ночь проспать в одной кровати вместе.

   Лишь он сказал, и сразу крик, от гнева красны лица:
   Никто из всех десятерых не хочет потесниться.

   Как охладить страстей тех пыл, умерить те волненья?
   Но старый плут хозяин был и разрешил сомненья.

   Двух первых путников пока, чтоб не судили строго,
   Просил пройти он в номер *А* и подождать немного.

   Спал третий в *Б*, четвёртый в *В*, в *Г* спал всю ночь наш пятый.
   В *Д*, *Е*, *Ж*, *З* нашли ночлег с шестого по девятый.

   Потом, вернувшись снова в *А*, где ждали его двое,
   Он ключ от *И* вручить был рад десятому герою.

   Хоть много лет с тех пор прошло, неясно никому,
   Как смог хозяин разместить гостей по одному.

   Иль арифметика стара, иль чудо перед нами,
   Понять, что, как и почему, вы постарайтесь сами.

2. *36=35* (См. рис. 18.)

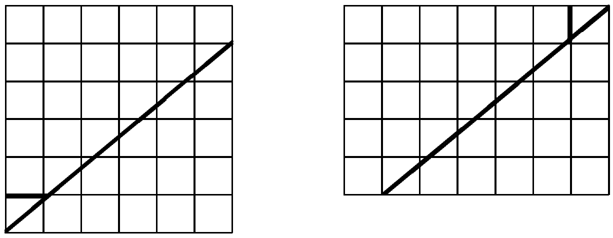


Рис. 18

## Задачи на каникулы

1. Можно ли расположить в пространстве четыре (не обязательно одинаковых) шара так, чтобы любой луч, с началом в данной точке, пересёк по крайней мере один из них?

   Другая формулировка: можно ли четырьмя непрозрачными шарами полностью закрыть точечный источник света?

2. Чему равен радиус наибольшей окружности на шахматной доске, проходящей только по чёрным клеткам? (Сторона клетки имеет длину 1.)

3. Имеется стакан, наполненный водой, и стакан, наполненный вином. Несколько раз производится следующая операция. Берётся ложка жидкости из одного стакана и переливается во второй и наоборот. После каждого переливания содержимое стаканов тщательно перемешивается. Может ли в результате оказаться равная концентрация вина в обоих стаканах?

4. Четыре жука, расположенные в вершинах квадрата $ABCD$ со стороной 1 м, начинают ползти так, что $A$ в каждый момент ползёт в направлении $B$, $B$ — в направлении $C$, $C$ — в направлении $D$, а $D$ — в направлении $A$. Какое расстояние они проползут до встречи?

5. Шахматный король обошел все клетки шахматной доски ровно по одному разу и вернулся в исходную клетку, причём его путь не имел самопересечений. Какова могла быть наибольшая длина его пути? (Сторона клетки равна 1.)

6. Можно ли составить куб $6 \times 6 \times 6$ из кирпичей-параллелепипедов размером $1 \times 2 \times 4$?

7. Постройте квадрат, зная по одной точке на каждой его стороне.

8. В равнобедренном треугольнике угол при основании $AC$ равен $80°$. Из вершин $A$ и $C$ проведены лучи до пересечения с боковыми сторонами в точках $D$ и $E$ соответственно. $\angle CAD = 60°$, $\angle ACE = 50°$. Определить величину угла $ADE$.

9. Разложите многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на четыре множителя.

10. Докажите, что при любом натуральном $n$ число $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

**Занятие №14** *12 февраля 2000 года*

## Разные задачи

1. Числа от 1 до 100 записали в клетки таблицы $10 \times 10$, по одному числу в каждую клетку. В каждой строке выбрали наибольшее число, среди полученных 10 чисел наименьшее обозначили $a$. Затем в каждом столбце выбрали наименьшее число, среди полученных 10 чисел — наибольшее обозначили $b$. Верно ли, что $a = b$? Может ли быть $a > b$? Может ли быть $b > a$?

2. Карусель представляет собой круг, разделённый на 7 равных секторов. Каждый сектор покрашен в свой цвет. Имеются 7 дверей, причём при остановке карусели каждый сектор оказывается напротив одной из дверей. Можно ли раскрасить двери в 7 цветов так, чтобы всегда хотя бы один сектор останавливался напротив двери того же цвета? А если секторов и дверей по 8?

3. Пусть $AK$ — биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$. Докажите, что
$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC}.$$

4. а) Докажите, что произвольный треугольник можно разрезать на $n^2$ равных треугольников (для любого натурального $n$).

б) Докажите, что для любых натуральных $n$ и $m$ найдётся треугольник, который можно разрезать на $n^2 + m^2$ равных треугольников.

5. Докажите, что существуют 2000 различных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{2000}$ таких, что

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_{2000}} = 1.$$

**Занятие №15** *19 февраля 2000 года*

## Инварианты

1. Круг разделён радиусами на 6 равных секторов. В каждом секторе стоит фишка. Разрешается одновременно перемещать две любые фишки в соседние сектора — одну по часовой стрелке, а другую — против. Можно ли таким образом собрать все фишки в одном секторе?

2. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

3. Имеется $n$ целых чисел ($n > 1$). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное $n$. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на $n$.

4. На доске записана дробь 10/97. Разрешается прибавлять к числителю и знаменателю одно и то же число или умножать числитель и знаменатель на одно и то же ненулевое число. Можно ли в результате нескольких таких действий получить дробь, равную а) 1/2; б) 1 ?

5. На шахматной доске разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в чёрный цвет? Рассмотрите случаи размера доски а) $8 \times 8$; б) $9 \times 9$.

6. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

7. В алфавите племени Мумбу-Юмбу есть лишь две буквы $A$ и $Б$. Два разных слова обозначают одно и то же понятие, если одно из них может быть получено из другого с помощью следующих операций:

   - в любом месте слова комбинацию букв $АБА$ можно заменить на $БАБ$;
   - из любого места можно выкидывать две одинаковые буквы, идущие подряд.

   Может ли дикарь племени сосчитать все пальцы на своей руке? А дни недели?

8. Докажите, что предпоследняя цифра любой степени тройки чётна.

**Занятие №16** *26 февраля 2000 года*

## Геометрические построения

1. Постройте параллелограмм по высоте, основанию и углу между диагоналями.

2. Постройте треугольник по трём медианам.

3. В квадрате отметили по точке на каждой стороне, а сам квадрат стёрли. Восстановите его.

4. В треугольнике отметили середины сторон, а сам треугольник стёрли. Восстановите его.

5. Через данную точку на стороне треугольника проведите прямую, делящую площадь треугольника пополам.

6. Внутри треугольника $ABC$ найдите такую точку $M$, что $S_{AMB}$ : $S_{BMC} : S_{CMD} = 1 : 2 : 3$.

7. а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

   б) На плоскости нарисованы две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Имея только линейку, найдите середину отрезка.

   *Замечание.* С помощью линейки можно проводить прямую через любые две имеющиеся точки. Никакие другие операции невозможны. («Делений» на линейке нет!)

8. Число $x + \dfrac{1}{x}$ целое. Докажите, что число $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ тоже целое.

9. Найдите все натуральные числа $n$ такие, что числа $n$, $n+2$ и $n+4$ — простые.

**Занятие №17** *4 марта 2000 года*

## Десятичная запись чисел

Для того, чтобы записать натуральное число $A$ в десятичной системе счисления, мы его представляем в виде

$$A = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — цифры от 0 до 9, причём $a_n \neq 0$. При этом цифра единиц $a_0$ — это остаток от деления числа $A$ на 10.

Рассмотрим примеры задач.

*Задача.* Между цифрой единиц и цифрой десятков двузначного числа вставили ноль, и оказалось, что полученное число в девять раз больше исходного. Найти исходное число.

*Решение.* Запишем исходное число в виде $10a+b$, где $a$ — частное, а $b$ — остаток от деления числа на 10.

Теперь заметим, что после того, как мы впишем нуль между цифрой десятков и единиц наше число станет равным $100a+b$. Запишем:

$9(10a+b) = 100a+b$, откуда $10a = 8b$, $5a = 4b$. Значит, цифра $b$ делится на 5, откуда $b = 0$ или $b = 5$. Поскольку $a$ и $b$ — не нули одновременно, $a = 4$ и $b = 5$. Исходное число — 45.

*Задача.* Может ли квадрат натурального числа кончаться на 7?

*Решение.* Пусть число $a$ делится на 10 с остатком $r$, т. е. $r$ — последняя цифра $a$. Тогда число $a^2$ делится на 10 с тем же остатком, что и $r^2$ (остатки можно умножать). Перебрав все цифры, убеждаемся, что ни у одной из них квадрат не кончается на 7.

*Задача* 15.8. Докажите, что предпоследняя цифра любой степени тройки чётна.

*Доказательство* будем проводить по индукции.

*База*: у $3^1$ предпоследняя цифра чётна (ноль).

*Шаг*: пусть $3^n = 10a + b$, где $a$ — частное, а $b$ — остаток от деления $3^n$ на 10. Поскольку $b$ нечётно и не делится на 5, то оно может принимать значения 1, 3, 7 или 9. В любом из этих четырёх случаев цифра десятков числа $3b$ чётна (она равна нулю, если $b = 1$ или 3 и двойке, если $b = 7$ или 9).

Чётность предпоследней цифры числа $3^n$ означает чётность числа $a$. Тогда $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3(10a + b) = 30a + 3b$. У этого числа цифра единиц такая же, а цифра десятков имеет ту же чётность, как и у числа $3b$. Значит, цифра десятков чётна.

* * *

1. а) Докажите, что число $\overline{XAXA}$ делится на 101 (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры).

   б) Докажите, что число $\overline{XAXAXA}$ делится на 7.

2. а) Докажите, что число $111\ldots11$ (81 единица) делится на 81.

   б) Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 81, то и оно само делится на 81?

3. Предпоследняя цифра числа, являющегося точным квадратом, нечётна. Докажите, что последняя цифра равна 6.

4. Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, у которого две первые цифры совпадают и две последние тоже совпадают.

5. Решите ребус: $ОДИН + ОДИН = МНОГО$ (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные).

6. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться на четыре одинаковые цифры.

7. Восстановить треугольник по двум его вершинам и прямой, содержащей биссектрису, выходящую из третьей вершины.

8. В шести секторах круга стоят числа: $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Разрешается одновременно прибавлять по единице к двум соседним числам. Докажите, что с помощью таких операций нельзя сделать все числа равными.

9. Десятичная запись числа начинается с единицы, а если её перенести в конец записи, то число увеличится в три раза. Найти такое число.

10. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел $a$, $b$, $c$, что $a! = b!c!$. (*Факториалом* $n!$ натурального числа $n$ называется произведение всех натуральных чисел от единицы до него: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

**Занятие №18** *11 марта 2000 года*

## Геометрические задачи

1. Окружность касается стороны $AB$ треугольника $ABC$ в точке $C'$ и продолжения сторон $CA$ и $CB$ в точках $A'$ и $B'$ соответственно. Найдите длины отрезков $AA'$, $BB'$, $AC'$ и $BC'$, если известны длины сторон треугольника $ABC$.

2. На плоскости нарисована окружность с центром в точке $O$ и радиусом $r$. Прямая, проходящая через точку $A$ пересекает окружность в точках $M$ и $N$. Докажите, что $AM \cdot AN = AO^2 - r^2$.

3. Вершины равностороннего треугольника находятся на сторонах $AB$, $CD$ и $EF$ правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что центры треугольника и шестиугольника совпадают.

4. Найти на гипотенузе прямоугольного треугольника точку $M$, для которой расстояние между её проекциями на катеты минимально.

5. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше четырёх.

7. Точка $M$ лежит внутри квадрата $ABCD$, причём треугольник $AMB$ равнобедренный с углом при вершине $150°$. Докажите, что треугольник $CMD$ равносторонний.

8. Через центр окружности $\omega_1$ проведена окружность $\omega_2$; $A$ и $B$ — точки пересечения окружностей. Касательная к окружности $\omega_2$ в точке $B$ пересекает окружность $\omega_1$ в точке $C$. Докажите, что $AB = BC$.

9. Известно, что $a^2 + b^2 = 9$ и $c^2 + d^2 = 16$. Докажите, что

$$1 \leqslant (a-c)^2 + (b-d)^2 \leqslant 49.$$

10. Докажите следующее утверждение. Если для некоторого числа сумма его цифр, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, то число делится на 11. Верно ли обратное утверждение?

**Занятие №19** *18 марта 2000 года*

## Уравнения

*Решение задачи* 18.9. Рассмотрим на координатной плоскости (с началом в точке $O$) две точки: $M$ с координатами $(a, b)$ и $N$ с координатами $(c, d)$. Условие задачи говорит, что $OM = 3$, $ON = 4$. Согласно неравенству треугольника, $ON - OM \leqslant MN \leqslant ON + OM$, т. е. $1 \leqslant MN \leqslant 7$. А это и требуется доказать.

Разобранное решение является иллюстрацией того, как геометрическая интерпретация помогает решить уравнение. При решении различных уравнений бывает также полезно воспользоваться заменой переменных, соображениями монотонности, построить график.

Напоминаем, что решить уравнение — значит найти *все* его решения и доказать, что других нет.

* * *

Решите уравнения (1–5):

1. $\dfrac{5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}} + \dfrac{3}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x-7}} = 2.$

2. $2^x + 1 = 3^x$.

3. $|||\ldots|x-1|-2|-3|\ldots-99| = 100.$

4. $(x-3)x(x+3)(x+6) = 40.$

5. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$

6. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, у которого $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$.

7. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = 2.$$

8. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

9. Точки $M_1$ и $M_2$ — середины отрезков, высекаемых на параллельных прямых параболой $y = x^2$. Докажите, что прямая $M_1M_2$ параллельна оси ординат.

10. Докажите тождество $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{n-1}{n}.$

**Занятие №20** *1 апреля 2000 года*

## Разные задачи

0. Упростить выражения:

   а) $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-z)$;

   б) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdots\sin\omega$.

1. Некий грек родился 1 апреля 40 г. до Рождества Христова и умер 1 апреля 40 г. от Рождества Христова. Сколько лет он прожил?

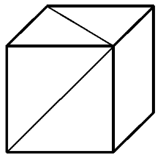


Рис. 19

2. Чему равен угол между двумя диагоналями граней куба, изображёнными на рис. 19?

3. Участок представляет собой равносторонний треугольник. Где нужно построить дом, чтобы сумма расстояний от него до сторон участка была минимальной?

4. Найдите такое натуральное число, что если его умножить на 2, то получится точный квадрат, если умножить на 3, то получится точный куб, а если умножить на 5, то получится точная пятая степень.

5. Найдите а) одно решение; б) все решения уравнения

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{x}}}=x.$$

   (дробь состоит из 2000 «этажей»).

6. Канава имеет ширину 2 м и поворачивает под прямым углом. Как организовать переправу, имея две доски длиной по 1.9 м?

7. Разрежьте два а) равных б) произвольных квадрата на части, из которых можно сложить один квадрат.

8. Предположим, что кто-нибудь предлагает Вам заключить пари на следующих условиях: если Вы даёте своему партнёру некоторую сумму денег, то он Вам незамедлительно возвращает вдвое большую сумму. Ставка в пари — 1 рубль. Согласитесь ли Вы заключить пари? Как следует действовать заключившим такое пари?

9. Предлагаем Вам следующую вариацию игры в крестики-нолики на доске $3 \times 3$. Двое ходят по очереди, но каждый сам выбирает, что поставить: крестик или нолик. Выигрывает тот, кто завершит ряд из трёх одинаковых значков. Как закончится игра, если оба игрока будут действовать оптимальным образом?

**Занятие №21** *8 апреля 2000 года*

## Векторы

1. а) Три вектора равной длины образуют между собой углы по $120°$. Докажите, что их сумма равна нулю.

   б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

   в) Дано: $\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0. \end{cases}$

   Доказать: $\begin{cases} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0. \end{cases}$

2. Точки $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$ делят окружность с центром в точке $O$ на $n$ равных частей. Докажите, что $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\ldots+\overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{0}$.

3. Медианы треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Докажите:

   а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$;

   б) для любой точки $O$ плоскости $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

4. Может ли фигура на плоскости иметь ровно два центра симметрии?

5. Треугольник лежит внутри круга радиуса 1. Может ли радиус окружности, описанной около этого треугольника, быть больше 1?

6. На стороне $CD$ квадрата $ABCD$ со стороной 1 во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник $CDE$. Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника $ABE$?

7. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число. При этом оказалось, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Докажите, что все числа равны между собой.

**Занятие №22** *15 апреля 2000 года*

## Метод математической индукции

Пусть мы имеем бесконечную последовательность утверждений $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, занумерованных натуральными числами, причём:

— утверждение $P_1$ истинно;

— если некоторое утверждение $P_k$ истинно, то следующее утверждение $P_{k+1}$ тоже истинно.

Тогда *принцип математической индукции* утверждает, что все утверждения последовательности истинны.

Другими словами принцип математической индукции можно сформулировать так: если в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди — женщины.

Способ рассуждений, основанный на принципе математической индукции называется *методом математической индукции.*

Для решения задач методом математической индукции необходимо:

1) сформулировать утверждение задачи в виде последовательности утверждений $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$

2) доказать, что утверждение $P_1$ истинно (этот этап называется *базой индукции*);

3) доказать, что если утверждение $P_n$ истинно при некотором $n = k$, то оно истинно и при $n = k + 1$ (этот этап называется *шагом индукции*).

Для примера докажем по индукции следующее равенство (которое, конечно, допускает и другие доказательства).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*База.* При $n = 1$ равенство превращается в тождество $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.
*Шаг.* Пусть равенство выполнено при $n = k$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $k + 1$. В левой части мы получим сумму

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1),$$

а в правой —

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

а это и есть требуемое равенство при $n = k + 1$.

* * *

Во всех задачах $n$ означает произвольное натуральное число.

1. Докажите следующие равенства:

   а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Из доски $1024 \times 1024$ вырезали а) кусок $512 \times 512$ из угла; б) одну угловую клетку; в) одну произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

3. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из 243 единиц, делится на 243.

4. Докажите, что число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

5. Докажите, что для любого числа $x \geq -1$ справедливо *неравенство Бернулли*:
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

6. Число $x + \dfrac{1}{x}$ целое. Докажите, что число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ тоже целое.

7. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что все лошади одной масти. Будем доказывать индукцией по $n$ следующее утверждение: «В любом табуне из $n$ лошадей, все они одной масти».

   *База* ($n = 1$) очевидна: в этом случае все лошади — это одна лошадь, она очевидно одной масти.

   *Шаг*: пусть в любом табуне из $k$ лошадей все лошади имеют одну масть. Рассмотрим табун из $k+1$ лошади. Выберем в нём двух лошадей $A$ и $B$ и рассмотрим оставшиеся $k-1$ лошадь. Составим табун из этих оставшихся лошадей, добавив к ним $A$. В нём $k$ лошадей, поэтому по предположению индукции, все они одной масти. Значит, лошадь $A$ имеет ту же масть, что и оставшиеся лошади. Аналогично доказывается, что ту же масть имеет лошадь $B$. Значит, все $k+1$ лошадь имеют одинаковую масть. Утверждение доказано.

8. На бесконечном клетчатом листе бумаги 100 клеток закрашены в чёрный цвет, а все остальные — в белый. За один ход разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые четыре клетки, образующие квадрат $2 \times 2$. Докажите, что за несколько ходов можно добиться того, что все клетки окажутся белыми тогда и только тогда, когда любая горизонталь и любая вертикаль содержит чётное число чёрных клеток.

**Занятие №23** *22 апреля 2000 года*

## Метод «крайнего»

Иногда решить некоторые задачи помогает рассмотрение какого-либо «крайнего» объекта (наибольшего или наименьшего из фигурирующих в задаче чисел, самой «верхней» или самой «нижней» из данных точек и т. п.)

*Решение задачи* 21.7. Выберем наименьшее из чисел, записанных в клетках (если наименьших несколько, то одно из них). Так как это число равно среднему арифметическому своих соседей, все соседние числа равны выбранному. Действительно, если бы среди соседних чисел были большие выбранного, то были бы и меньшие, что невозможно в силу выбора числа. Аналогично, все соседи соседей также равны исходному числу и т. д. Двигаясь от клетки с исходным числом, мы сможем попасть в любую клетку. Значит, все числа равны между собой.

*Указание к задаче* 22.8. Начните рассмотрение с самой левой полоски, в которой есть чёрные клетки.

* * *

1. Можно ли отметить на плоскости 100 точек так, чтобы любая из отмеченных точек лежала в середине отрезка, соединяющего две другие отмеченные точки? А в пространстве?

2. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ равна 1. Докажите неравенство
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{99}x_{100} \leqslant \frac{1}{4}.$$

3. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, все грани которого имеют различное количество сторон.

4. В течение рабочего дня каждый депутат посетил заседание парламента. Все депутаты приходили и уходили в разное время, но никто из них уходя больше не возвращался. Оказалось, что любые два депутата встретились на заседании. Докажите, что был момент, когда все депутаты присутствовали.

5. На столе лежат несколько одинаковых монет без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

6. Про 21 число известно, что сумма любых пяти из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел положительна.

7. По окружности расположены 6 чисел, при этом каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна единице. Найдите эти числа.

8. Али-Баба пытается проникнуть в пещеру. У входа стоит квадратный стол, в углах которого расположено по сосуду. В каждый сосуд вставлено по селёдке, причём селёдка может располагаться вверх либо головой, либо хвостом. Снаружи расположение селёдок не видно. Али-Баба может засунуть руки в любые два сосуда, нащупать, как расположены селёдки, и установить их в любое положение (т. е. может оставить всё как было, а может перевернуть одну селёдку или обе). Эту операцию можно проводить несколько раз, однако после каждого раза стол начинает быстро вращаться, так что после его остановки невозможно определить, в какие именно сосуды Али-Баба засовывал руки. Дверь в пещеру открывается, если все селёдки стоят одинаково. Помогите Али-Бабе попасть в пещеру.

9. *Ханойская башня.* Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три штырька, на один из которых нанизаны семь колец убывающих размеров, как показано на рис. 20. Разрешается снимать по одному кольцу с любого штырька и нанизывать его на любой другой штырёк, но при этом запрещается класть большее кольцо поверх меньшего. Можно ли, соблюдая эти правила, переложить все кольца на другой штырёк?

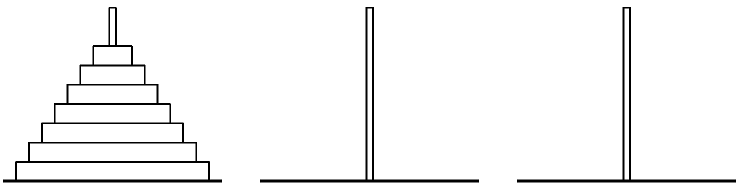


Рис. 20

10. На плоскости проведены 100 прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей они делят плоскость?

**Занятие №24** *29 апреля 2000 года*

## Целые числа и другие задачи

1. Докажите, что натуральное число имеет нечётное количество натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

2. а) Какой остаток может давать квадрат целого числа при делении на 8?

   б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.

3. Произведение двух целых чисел в два раза больше их суммы. Какие это числа? Найдите все такие пары.

4. Докажите, что не существует целых чисел $m$ и $n$, удовлетворяющих уравнению $15m^2 - 7n^2 = 9$.

5. Докажите равенство
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{2000}.$$

6. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на $90^\circ$ (направо или налево) через каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое количество часов.

7. Каждое из пяти чисел $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ равны 1 или $-1$. Разрешается выбирать любые три из них и спросить, чему равно их произведение. Как, задав три таких вопроса, узнать, чему равно значение $a$?

8. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления.

| | |
|---|---|
| Браун: | Я не делал этого. |
| | Джонс не делал этого. |
| Джонс: | Браун не делал этого. |
| | Смит сделал это. |
| Смит: | Я не делал этого. |
| | Браун сделал это. |

Было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий — раз солгал, раз сказал правду. Кто совершил преступление?

**Занятие №25** *6 мая 2000 года*

## Разные задачи

1. На плоскости отмечены 2000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести прямую, (не проходящую ни через одну из отмеченных точек), по обе стороны которой лежит по 1000 точек.

2. Дано 1001 различное натуральное число, меньшее 2000.* Докажите, что одно из них равно сумме двух других. Останется ли условие задачи верным, если заменить число 1001 на 1000 ?

3. Построить треугольник $ABC$, если даны две его вершины $A$ и $B$ и прямая, содержащая биссектрису угла $C$.

4. На продолжении $CE$ стороны $AC$ равностороннего треугольника $ABC$ построен другой равносторонний треугольник $CDE$. Через $M$ и $P$ обозначены середины отрезков $AD$ и $BE$ соответственно. Докажите, что треугольник $CMP$ равносторонний.

5. а) Я задумал три цифры $x$, $y$ и $z$. Вы можете называть любые три целых числа $a$, $b$ и $c$ и спрашивать, чему равно $ax + by + cz$? За какое минимальное количество вопросов Вы определите задуманные мной цифры?

   б) Я задумал три натуральных числа $x$, $y$ и $z$. Тот же вопрос.

6. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых значениях $x$.

   а) Следует ли из этого, что $c$ — целое число?

   б) Следует ли из этого, что $a$ и $b$ — целые числа?

---

*Данная фраза, хоть и звучит несколько нелепо, грамматически правильна. Имеется в виду, что чисел у нас 1001, все они различны и меньше 2000. Правила русского языка предписывают применять единственное число в такого типа конструкциях.

7. На шахматной доске $8 \times 8$ расставили 8 ладей так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали оказалось по одной ладье. Доску разбили на 4 квадрата $4 \times 4$. Верно ли, что в двух из них количества ладей равны?

8. Улицы города идут в трёх направлениях и разбивают его на кварталы — равные правильные треугольники. Согласно правилам дорожного движения, разрешается поворачивать только на угол $120°$ (углом поворота называется угол между направлениями движения до и после поворота). Два автомобиля начали движение из одной точки в одном направлении. Может ли оказаться, что в какой-то момент они будут двигаться по одной улице навстречу друг другу?

**Занятие №26** *13 мая 2000 года*

## Задачи «на прощание»

Сегодняшнее занятие — последнее в учебном году. Кроме обычного набора задач на сегодняшний день мы предлагаем Вам несколько задач для длительного решения. Эти задачи достаточно сложные, и решение любой из них может стать для Вас небольшим открытием. Не огорчайтесь, если задача в течение длительного времени не поддаётся Вашим усилиям. Решение сложных задач — это и есть то, чем занимаются математики. А порой, на решение одной задачи уходят годы. Не бойтесь также, если тема той или иной задачи вам не знакома. Например, некоторые предложенные задачи на стереометрию, которую Вы в школе ещё не начали проходить. Для их решения не нужно никаких особых знаний, а только здравый смысл и немного пространственного воображения.

* * *

1. Король со свитой движется из пункта $A$ в пункт $Б$ со скоростью 5 км/час. Каждый час он высылает гонцов в пункт $Б$, которые движутся со скоростью 20 км/час. С какими интервалами прибывают гонцы в $Б$ ?

2. Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых $x$ тогда и только тогда, когда $2a$, $a + b$ и $c$ — целые.

3. Парус имеет вид невыпуклого четырёхугольника $ABCD$, у которого углы $A$, $B$ и $D$ равны $45°$. Найдите площадь паруса, если $AC = 4$ м.

4. Можно ли разложить 552 гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г на три равные по весу кучки?

5. В большую шкатулку положили 10 шкатулок поменьше. В некоторые из вложенных шкатулок положили ещё по 10 шкатулок поменьше, и так далее. В результате оказалось 222 шкатулки с содержимым. А сколько пустых шкатулок?

6. Через точку пересечения биссектрис $AD$ и $CE$ треугольника $ABC$ проведена прямая, параллельная стороне $AC$ и пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что $MN = AM + CN$.

7. Три положительных числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что $a^2 - ab + b^2 = c^2$. Докажите, что $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

8. Точки $K$, $L$, $M$ и $N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Внутри четырёхугольника выбрали такую точку $S$, что четырёхугольник $AKSN$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник $CLSM$ — тоже параллелограмм.

## Задачи для длительного решения

1. В турнире по волейболу участвовало $n$ команд. Каждая сыграла с каждой по одному разу. Для каждой команды посчитали количество её побед (получились числа $v_1$, $v_2$, ..., $v_n$) и поражений (получились числа $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$). Докажите, что

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2.$$

2. Можно ли четырьмя сферическими непрозрачными шарами (не обязательно равных радиусов) закрыть точечный источник света в пространстве?

*Другая формулировка.* В пространстве задана точка. Можно ли расположить четыре непересекающихся шара так, чтобы данная точка не принадлежала ни одному из них, а любой луч с началом в ней пересекал хотя бы один из шаров?

3. Как нужно расположить спичечный коробок в пространстве, чтобы площадь его тени была минимальна?

   *Другая формулировка.* В пространстве задан прямоугольный параллелепипед. Провести плоскость так, чтобы площадь проекции параллелепипеда на неё была минимальна.

4. На плоскости отмечено несколько точек, причём расстояние между любыми двумя из них меньше 1. Докажите, что все их можно покрыть кругом радиуса $\sqrt{3}/3$.

5. Существует ли многочлен от двух переменных $P(x, y)$, областью значений которого является множество всех положительных чисел?

6. Существует ли такая ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что для любых $n$ и $m$ выполнено неравенство

$$|x_n - x_m| > \frac{1}{|n-m|}\ ?$$

7. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{\log_{\frac{1}{16}} x = (1}{16) : x\ ?}$$

8. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы различных чисел, обратных натуральным.

9. Докажите, что если сечение пространственной фигуры любой плоскостью есть круг, то эта фигура — шар.

10. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени $n$ принимает целые значения при $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, то он принимает целые значения при всех целых $x$.

# ЧАСТЬ II. 1972–1973 уч. год
# Математические кружки при МГУ

(*руководитель — Н. Н. Константинов*)

## Кружок по средам

### Листок №1

1. Дан отрезок $AB$ и прямая, пересекающая отрезок в некоторой его внутренней точке. Найти на прямой такую точку $C$, чтобы данная прямая была биссектрисой треугольника $ABC$. При каких взаимных расположениях отрезка и прямой решений больше одного? Не существует?

2. Пусть $k$ — целое число. $k^2$ делим на 4. Какой остаток может получиться?

3. Можно ли все косточки домино выложить, следуя правилам игры, в одну цепочку так, чтобы на одном конце была единица, а на другом — шестёрка?

4. Доказать, что $k^3-k$ всегда делится на 6 без остатка ($k$ — целое).

5. Точка $A$ лежит внутри окружности. Найти геометрическое место середин хорд этой окружности, проходящих через точку $A$.

6. Дано 80 золотых монет. Из них одна фальшивая (более лёгкая, чем остальные). С помощью четырёх взвешиваний на обыкновенных двухчашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

7. Рассматривается самопересекающийся пятиугольник, имеющий форму пятиконечной звезды (не обязательно правильной формы). Найти сумму углов при концах «лучей» звезды.

8. В бассейне первоначально находилось 10 щук разного размера. Затем их стало меньше, так как щуки глотали друг друга. Назовём щуку «сытой», если она два раза глотала других щук. Если сытую щуку съели, она продолжает считаться сытой. Какое наибольшее количество сытых щук могло получиться?

### Листок №2

1. Дан угол и точка $A$ внутри него. Провести через точку $A$ прямую так, чтобы её отрезок, отсекаемый сторонами угла, делился в точке $A$ пополам.

2. Из комплекта домино выбросили все кости, содержащие шестёрку. Можно ли после этого сделать «рыбу» (т. е. выложить все косточки в одну цепочку)?

3. Дано 12 золотых монет, из них одна фальшивая (она отличается по весу от остальных, но не известно тяжелее или легче). С помощью обыкновенных двухчашечных весов без гирь найти фальшивую монету. Более трудный вариант: найти фальшивую монету и определить, в какую сторону она отличается от остальных.

4. Можно ли пройти шахматным конём из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле доски ровно по одному разу?

5. Тот же вопрос про ладью (считается, что если ладья одним ходом пошла на несколько клеток, то она побывала во всех промежуточных клетках).

6. Доказать, что $\left(\frac{p}{k}\right)^2 \neq 2$ ($p$ и $k$ — целые).

7. На какую цифру оканчивается число $7^{1972}$?

8. На какую цифру оканчивается число $7^{7^{7^7}}$? (Порядок возведения в степень такой: $7^{(7^{(7^7)})}$).

9. Доказать, что если две высоты в треугольнике равны, то он равнобедренный.

### Листок №3

1. Построить треугольник по центру тяжести, центру описанного круга и одной из вершин.

2. Если точку пересечения высот треугольника симметрично отразить относительно его сторон, то полученные три точки лежат на описанной окружности. Доказать.

3. Фигура «лев» ходит по шахматной доске следующим образом.

   Пусть лев стоит на поле “а”. Он может пойти на поле, соседнее с “а” сверху, на соседнее справа или да поле, которое от “а” находится сверху и справа и имеет с “а” общую вершину. То есть «лев» ходит как король, но не может двигаться влево и вниз. Первоначально на доске «лев» стоит в левом нижнем углу, и никаких других фигур нет. Играют двое, ходят по очереди. Выигравшим считается тот, кто поставит «льва» в верхний правый угол. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру, или тот, кто ходит вторым?

4. Тот же вопрос, но проигравшим считается тот, кто поставил льва в угол.

5. Те же вопросы, что в задачах 3 и 4, но для доски размером $m \times n$.

6. Если две медианы равны, то треугольник равнобедренный. Доказать.

7. Найти все целые решения уравнения $xy = x + y$ и доказать, что других решении нет.

8. Если две медианы треугольника не равны, то та сторона больше, которую делит меньшая медиана.

**Листок №4**

1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане между ними.

2. Построить треугольник по трём медианам.

3. Числа от 1 до 64 как-то записаны в клетках шахматной доски, по одному числу в клетке. Доказать, что найдутся два соседних числа, отличающиеся не меньше, чем на 5.

4. Пусть $m$ — остаток от деления числа $a$ на $p$, $n$ — остаток от деления числа $b$ на $p$. Доказать, что остаток от деления числа $a + b$ на $p$ равен остатку от деления числа $m + n$ на $p$.

5. Сформулировать и доказать аналогичное правило вычисления остатков от деления на $p$ для произведения чисел $a$ и $b$.

6. Доказать признаки делимости на 3 и на 9.

7. Найти признак делимости на 11 и доказать его.

8. Если две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный. Доказать.

9. Какое максимальное число слонов можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга? Доказать, что число способов расстановки этого количества слонов есть квадрат некоторого целого числа.

10. Шоколадка имеет углубления в виде трёх продольных и четырёх поперечных канавок, по которым её можно разламывать. Какое минимальное количество разломов необходимо, чтобы разломать её на кусочки, не имеющие канавок? (При разломах не разрешается прикладывать отдельные куски друг к другу, так чтобы одним разломом сломать два куска).

## Листок №5

1. Плоскость раскрашена двумя красками. Доказать, что найдутся две точки, расстояние между которыми равно одному метру и которые раскрашены одинаково.

2. Плоскость раскрадена тремя красками. Доказать, что найдутся две точки, расстояние между которыми равно одному метру и которые окрашены одинаково.

3. В условиях первой задачи доказать, что найдутся две точки, которые окрашены различно и отстоят друг от друга на 1 метр.

4. 11 команд принимают участие в чемпионате. Может ли случиться так, что в какой-то момент соревнований каждая команда сыграла ровно по три игры?

5. Внутри круга с центром $O$ находится точка $A$, отличная от $O$. Найти на окружности такую точку $X$, чтобы угол $AXO$ был максимальным.

6. На бесконечной клетчатой бумаге записаны целые числа, в каждой клетке по числу. При этом каждое число равно среднему арифметическому своих четырёх соседей. Доказать, что все числа равны между собой.

7. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины.

8. Дано 100 целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать несколько (может быть, одно или все) так, что их сумма делится на 100.

9. Дано целое число $n$. Доказать, что существует число, десятичная запись которого содержит только нули и единицы, и которое делится на $n$ без остатка.

### Листок №6

1. Каждый из людей, когда-либо живших на земле, сделал определённое количество рукопожатий. Доказать, что число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, четно.

2. Даны: угол, точка вне его и отрезок. Провести через точку прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник, периметр которого равнялся бы данному отрезку.

3. Может ли фигура на плоскости иметь ровно два центра симметрии?

4. Может ли быть полным квадратом число, десятичная запись которого состоит из 300 единиц и некоторого количества нулей?

5. В квадрат со стороной 1 помещён выпуклый многоугольник площади 1/2. Доказать, что найдётся отрезок длины 1/2, параллельный данной стороне квадрата и целиком принадлежащий многоугольнику.

6. Доказать, что произведение двух целых положительных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

7. Построить окружность, равноудалённую от четырёх данных точек плоскости. Сколько решений имеет задача?

8. Квадрат со стороной 6 выложен косточками домино размером $1 \times 2$. Доказать, что существует прямая, по которой можно разрезать квадрат, не повредив косточек домино.

### Листок №7

1. На участке квадратной формы находятся человек и две собаки. Максимальные скорости их равны. Доказать, что существуют такие правила поведения собак, что если собаки придерживаются этих правил, то человек не сможет увернуться.

2. «Двойными шахматами» называется игра, которая отличается от обычных шахмат только тем, что каждый играющий делает по два ходя подряд. Выигрыш присуждается тому, кто съест короля противника. Доказать, что у белых существует тактика, следуя которой они не проигрывают (находить эту тактику не требуется).

3. Дана бесконечная клетчатая бумага (из тетради по арифметике) с клеточкой площади единица. Из картона вырезана фигура неправильной формы площади меньше единицы. Доказать, что фигуру можно так положить на бумагу, что ни одна вершина квадрата не окажется внутри фигуры.

4. В стране имеется $n$ городов. Каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что можно так выбрать начало путешествия, что все города можно объехать, побывав в каждом городе ровно по одному разу.

5. Три разбойника делят добычу. Добыча разнородна, и не существует объективного измерителя её ценности. Однако каждый разбойник монет разделить всю добычу или любую её часть на любое количество частей, «равноценных» с его точки зрения.

Как могут разбойники организовать раздел добычи так, чтобы каждый считал, что он получил не меньше трети всей добычи.

6. Аналогичная задача про $k$ разбойников.

### Листок №8

1. Построить треугольник по высоте, основанию и разности углов при основании.

2. Даны две окружности. На одной произвольно расположено 100 точек, на другой — некоторое количество дуг, сумма длин которых равна $1/101$ длины окружности. Длины этих двух окружностей равны. Доказать, что модно так наложить одну из них на другую, что ни одна из точек не окажется внутри дуг.

3. Дорожки зоопарка имеют форму равностороннего треугольника, в котором проведены средние линии. Обезьянку, сбежавшую из клетки, ловят два сторожа. Бегают они только по дорожкам, и максимальные скорости их равны. Поймают ли сторожа обезьянку?

4. На плоскости нарисована окружность и прямая, проходящая через её центр (центр не дан). С помощью одной линейки опустить из данной точки на прямую перпендикуляр. Рассмотреть различные случаи расположения точки: вне окружности, на окружности, внутри окружности, на прямой.

5. Через центр окружности проходит прямая $MK$. Точка $A$ лежит внутри окружности на этой прямой и отличается от центра. Через точку $A$ проведены две прямые (точки их пересечения с окружностью, расположенные по одну сторону от прямой $MN$, обозначены через $C$ и $D$) такие, что угол $CAM$ равен углу $DAN$. $B$ — точка пересечения прямой $CD$ с прямой $MN$. Доказать, что положение точки $B$ зависит только от положения точки $A$, но не зависит от величины углов $CAM$ и $DAN$.

6. Какое максимальное количество коней можно расставить на шахматной доске, чтобы они не были друг друга?

7. Доказать, что количество способов такой расстановки равно 2.

# Кружок по субботам

## Листок №1

1. В произвольном четырёхугольнике у каждых двух соседних сторон соединены отрезком середины. Доказать, что получился параллелограмм.

2. $p$ — простое число, большее трёх (простое — значит делится только на единицу и на само себя). Доказать, что $p^2 - 1$ делится нацело на 12. Более трудная задача: доказать, что это число делится на 24.

3. Даны середины сторон пятиугольника. Построить пятиугольник.

4. Дан деревянный шар. На шаре можно производить построения циркулем, а на плоскости — циркулем и линейкой. Построить на плоскости отрезок, равный радиусу шара.

5. Равносторонний треугольник $ABC$ вписан в окружность. $M$ — точка на дуге $AB$. Доказать, что $AM + MB = MC$.

6. Даны три резиновых кольца. Каждое из них можно разрезать, а затем на том же месте склеить. Как их соединить так, чтобы все они были сцеплены, но если разрезать любое из них, то все распались бы?

7. Аналогичный вопрос про 10 колец.

8. Даны точки $A$ и $B$ на плоскости. Найти геометрическое место таких точек $X$, что отношение $AX : BX$ заданное.

9. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены круги. Доказать, что они покроют всю внутреннюю область четырёхугольника.

## Листок №2

1. Играют двое, ходят по очереди. Первоначально имеется две кучки с спичек, по 7 спичек в каждой кучке. Ход состоит в том, что партнёр выбирает произвольную кучку и из неё выбрасывает сколько хочет спичек (хоть все, но не меньше одной). Проигравшим считается тот, кто взял последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре, начинающий игру или второй?

2. Аналогичная игра, но выигравшим считается тот, кто возьмёт последнюю спичку. Вопрос тот же.

3. Найти сумму $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k!$ (через $k!$ обозначается произведение всех целых чисел от 1 до $k$ включительно).

4. В центре квадратного поля находится волк, а по вершинам квадрата 4 собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки только по сторонам квадрата. Известно, что волк справляется с одной собакой, но не справляется с двумя, и что максимальная скорость собак в 1.5 раза больше максимальной скорости волка. Доказать, что собаки имеют возможность не выпустить волка за пределы поля.

5. Дано 20 гирь, причём веса любых двух гирь различаются. Имеются весы, на каждую чашку которых можно положить лишь одну гирю. Весы показывают, какая гиря тяжелее, но не показывают на сколько тяжелее. Какое минимальное количество взвешиваний необходимо, чтобы найти самую тяжёлую гирю. Доказать, что меньшим количеством взвешиваний обойтись нельзя.

6. Даны три прямые на плоскости, пересекающиеся в одной точке, и точка $A$ на одной из них. Построить треугольник, для которого точка $A$ — одна из вершин, а три прямые — биссектрисы.

## Листок №3

1. Внутри выпуклого четырёхугольника дана точка $A$. Она отражается относительно середин всех четырёх сторон четырёх-

угольника. Получаются четыре точки: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Доказать, что площадь четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ вдвое больше площади данного четырёхугольника.

2. Круг разделён на 6 равных секторов, в каждом секторе стоит фишка. Одним ходом разрешается взять две фишки и переставить каждую в сектор, соседний с её сектором. Можно ли за некоторое количество ходов перевести все фишки в один сектор?

3. Дано 20 палочек. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий забирает одну, две или три палочки. Проигравшим считается тот, кто возьмёт последнюю палочку. Кто выигрывает при правильной игре, тот кто ходит первый, или второй?

4. Та же игра, но палочек $k$. Вопрос тот же.

5. Та же игра, но выигравшим считается тот, кто возьмёт последнюю палочку.

6. Дан произвольный четырёхугольник. $A$, $B$, $C$ и $D$ — середины сторон, $P$ и $O$ — середины диагоналей. Доказать, что треугольник $ADO$ равен треугольнику $BPC$.

7. На плоскости нарисованы окружность и прямая и дан отрезок $p$. Построить окружность радиуса $p$, касающуюся данных отрезка и прямой.

8. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане, проведённой к боковой стороне.

### Листок №4

1. Может ли число $k^2 + 3k + 5$ делиться на 121 ($k$ — целое)?

2. Человек залез до середины по лестнице, приставленной к стенке, после чего лестница поехала по полу. По какой кривой будет двигаться человек?

3. Доказать, что дробь $0,12345678910111213141 5\ldots$ (выписаны подряд все натуральные числа) непериодическая.

4. Денежный автомат устроен таким образом, что на каждую опущенную монету выдаёт не меньше трёх монет (не сказано, какого достоинства). В результате пользования автоматом у человека оказалось 12 монет. Доказать, что он воспользовался автоматом не больше 5 раз.

5. Отрезок, соединяющий середины двух несмежных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон. Доказать, что четырёхугольник — трапеция.

6. Даны пол-стакана воды и пол-стакана вина. Ложку воду перелили в вино, небрежно перемешали, и ложку полученной неоднородной смеси перелили обратно в воду. Чего в результате может оказаться больше: воды в вине или вина в воде?

7. Найти число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 — в остатке 2, делении на 4 — в остатке 3, делении на 5 — в остатке 4, делении на 6 — в остатке 5. Найти наименьшее такое число.

8. По основанию равнобедренного треугольника двигается точка. Доказать, что сумма расстояний от неё до боковых сторон или их продолжений есть величина постоянная.

### Листок №5

1. В параллелограмме $ABCD$ $K$ — середина стороны $BC$, $L$ — середина стороны $DC$. Доказать, что прямые $AL$ и $AK$ делят диагональ $DB$ на три равные части.

2. У человека на голове не больше 150000 волос. Доказать, что в Москве найдётся 40 человек с одинаковым количеством волос на голове.

3. Может ли случиться, что все стороны 1001-угольника пересечены одной прямой, не проходящей через вершины?

   Может ли число $4p + 1$ быть простым, если известно, что $p$ и $2p + 1$ — простые? ($p > 3$).

4. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

5. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане.

6. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме двух других сторон.

7. В треугольнике построить прямую, параллельную основанию и такую, что её отрезок, заключённый между боковыми сторонами, равен сумме отрезков боковых сторон, заключённых между этой прямой и основанием.

8. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число.

### Листок №6

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \dots & \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

2. Если $a$ нечётно, то $7^a$ даёт при делении на 4 остаток 3. Доказать.

3. Чемпионат страны по футболу проходит в один круг (каждая команда с каждой играет один раз). Доказать, что в любой момент соревнований найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество игр.

4. Найти сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

5. В центре бассейна круглой формы плавает мальчик, а вокруг бассейна бегает сторож. Максимальная скорость мальчика в воде в 4 раза меньше, максимальной скорости сторожа на суше. Сторож плавать не умеет, а по земле мальчик бегает быстрее сторожа. Доказать, что мальчик может убежать.

6. $A$ и $B$ — пятизначные числа. Первоначально в них вместо цифр стоят звёздочки. Играют двое. Первый называет цифры от 0 до 9. Второй ставит каждую названную цифру после одной из звёздочек, после чего первый называет следующую цифру. После того, как все звёздочки заменены цифрами, второй платит первому $A-B-40000$ (если это число отрицательное, то первый платит второму). Доказать:

   1) что существует способ игры второго, при котором он не проигрывает;

   2) что существует способ игры первого, при котором он не проигрывает.

## Листок №7

1. Внутри равностороннего треугольника движется точка. Доказать, что сумма расстояний от неё до сторон есть величина постоянная,

2. Два квадрата $ABCD$ и $AMNK$ имеют общую вершину $A$. Доказать, что медиана треугольника $ABK$ есть продолжение биссектрисы треугольника $ADM$ (квадраты лежат вне друг друга и не равны между собой, вершины квадратов обозначены в порядке обхода против часовой стрелки).

3. В урне лежит 20 белых, 30 красных и 40 черных шариков. Сколько нужно вынуть шариков, чтобы среди вынутых наверняка встретились шарики всех трёх цветов?

4. Закрасить плоскость, разбитую $k$ прямыми, двумя красками так, чтобы никакие две области, имеющие общий участок границы, не были закрашены одинаково.

5. Улитка ползла 6 минут. Её движение наблюдало несколько человек, так что ни в какое мгновение она не оставалась без наблюдения. Каждый человек наблюдал ровно одну минуту (без перерывов). В результате оказалось, что каждый наблюдатель зафиксировал продвижение улитки ровно на один метр. Доказать, что максимальный путь улитки, который не противоречит этим сведениям, равен 10 метров.

6. 600 человек построены в 20 шеренг и 30 колонн. Кто выше: самый высокий из самых низких в колоннах, или самый низкий из самых высоких в шеренгах?

7. Найти сумму $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{1111111111\ldots}_{n \text{ единиц}}$.

### Листок №8

1. Доказать, что выпуклый тринадцатиугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

2. Сколькими способами можно раскрасить грани куба шестью красками, так чтобы все грани были раскрашены различными цветами? (Мы считаем два кубика различными, если они остаются различными, как бы мы их ни поворачивали).

3. Два одинаковых кубика, одинаково раскрашенные шестью красками, склеиваются одной гранью, так что получается параллелепипед. Сколько различно окрашенных параллелепипедов можно таким образом получить?

4. Построить треугольник по биссектрисе угла при вершине и радиусу описанной окружности, если известно, что разность углов при основании равна $90^\circ$.

5. Фигура состоит из двух концентрических окружностей и двух взаимно-перпендикулярных диаметров большей из них. Можно ли её нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии ровно один раз?

6. В некотором царстве любые два человека отличаются набором зубов (максимальное количество зубов — 32. Два человека имеют различные наборы зубов, если в некотором месте, в котором должен быть зуб, у одного из них зуб в наличии, а другого отсутствует). Каково может быть максимальное население царства?

7. Известно, что клопы могут ползать по любой поверхности и могут прыгать сверху вниз, но не могут плавать. Как спастись от клопов? (Неудачная попытка использования указанных средств описана в рассказе Л. Н. Толстого «Клопы»).

# Рекомендуемая литература


### Сборники задач для подготовки к олимпиадам

1. *В. О. Бугаенко.* Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 1998.
2. *Н. Б. Васильев.* Избранные задачи математических олимпиад. 62-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник. — М.: МЦНМО, 1999.
3. *С. А. Дориченко, И. В. Ященко.* LVII Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ТЕИС, 1994.
4. *А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи.* Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник. — М.: МЦНМО, 1997.
5. *А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, Н. Б. Васильев.* Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8–11 классов. — М.: Treade Publishers, 1994.
6. *В. В. Произволов.* Задачи на вырост. — М.: МИРОС, 1995.
7. *А. В. Спивак.* Математический праздник. — М.: МЦНМО–ТЕИС, 1995.
8. *И. В. Ященко.* Приглашение на математический праздник. — М.: МЦНМО–ЧеРо, 1998.

### Книги для математических классов и кружков

1. *Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* Прямые и кривые. — 3-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2000.
2. *И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Х. Шень.* Тригонометрия. — М.: МЦНМО, 2000.
3. *С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.
4. *Р. К. Гордин.* Это должен знать каждый матшкольник. — М.: МЦНМО, 2000.

5. *Б. М. Давидович.* Математический анализ в 57 школе. — М.: МЦНМО, 1998.

6. *Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник.* Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.

7. *В. А. Уфнаровский.* Математический аквариум. — 2-е изд., испр. и доп. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

8. Задачи по математике. Под редакцией А. Шеня. — М.: МЦНМО, 2000.


**Серия «Библиотека ,,Математическое просвещение"»**


1. *В. М. Тихомиров.* Великие математики прошлого и их великие теоремы. — М.: МЦНМО, 1999.

2. *А. А. Болибрух.* Проблемы Гильберта (100 лет спустя). — М.: МЦНМО, 1999.

3. *Д. В. Аносов.* Взгляд на математику и нечто из неё. — М.: МЦНМО, 2000.

4. *В. В. Прасолов.* Точки Брокара и изогональное сопряжение. — М.: МЦНМО, 2000.

5. *Н. П. Долбилин.* Жемчужины теории многогранников. — М.: МЦНМО, 2000.

6. *А. Б. Сосинский.* Мыльные плёнки и случайные блуждания. — М.: МЦНМО, 2000.

7. *И. М. Парамонова.* Симметрия в математике. — М.: МЦНМО, 2000.


**Серия «Математическая мозаика»**


1. *М. Гарднер.* Математические головоломки и развлечения. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Мир, 2000.

2. *М. Гарднер.* Математические досуги. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Мир, 2000.

3. *М. Гарднер.* Математические новеллы. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Мир, 2000.

4. *Л. Кэролл.* История с узелками. — 3-е изд., испр. — М.: Мир, 1999.

**Журналы и сборники**

1. *Квант.* Физико-математический журнал для школьников и студентов. — М.: Бюро Квантум. Издаётся с 1970 года. Периодичность: 6 номеров и 6 приложений в год.

2. *Математическое просвещение.* Третья серия. Математический сборник для школьников и студентов. — М.: МЦНМО. Издаётся с 1997 года. Непериодическое издание. Вышло в свет 4 выпуска.

3. *Математическое образование.* Журнал в области математического образования. — М.: Фонд математического образования и просвещения. Издаётся с 1997 года. Периодичность: 4 номера в год.

4. *Империя математики.* Физико-математический журнал для юношества. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. Издаётся с 2000 года. Вышло в свет 2 номера.

*Вадим Олегович Бугаенко*

Методическая разработка вечернего отделения МММФ
Математический кружок. 9 класс.

Формат 60 × 90 1/16. Объем 4,50 печ. л.
Тираж 1000 экз. Заказ 14.
Подписано к печати 13 ноября 2000 г.
Оригинал-макет изготовлен автором.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете
МГУ. г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ЛР№040746 от 12.03.1996 г.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании
механико-математического факультета и франко-русского центра
им. А. М. Ляпунова.