512
У25

ИБ № 1288

Составители:

Семен Исакович Шварцбурд
Олег Александрович Боковнев

УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Редактор *А. М. Абрамов*
Художник переплета *Е. Т. Яковлева*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Т. А. Кузнецова*

Сдано в набор 4/I 1977 г. Подписано к печати 14/VI 1977 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 15. Уч.-изд. л. 14,58. Тираж 40 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 237.

Цена 55 к.

У25 **Углубленное изучение алгебры и анализа.** Пособие для учителей. (Из опыта работы). Сост.: С. И. Шварцбурд, О. А. Боковнев. М., «Просвещение», 1977.

240 с. с ил.

Книга представляет собой сборник статей, авторы которых предлагают новую методику изучения различных вопросов алгебры и анализа. Книга, написанная на основании практического опыта преподавания, предназначена в первую очередь учителям математики, работающим в школах и классах с углубленным изучением математики, и учителям, ведущим факультативные курсы.

$У\ \frac{60501-605}{103\,(03)-77}\ 142-77$ **512 + 517.2**

Н. Н. Константинов

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(курс задач для IX—X классов)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический анализ (как, впрочем, и любой другой предмет) можно преподавать по-разному. В этой статье рассказывается о методе, при котором основное внимание уделяется самостоятельному решению задач, в том числе доказательству основных теорем. В школе № 57 Москвы это делается так. Через два или три занятия (занятия двухчасовые) ученикам выдаются очередные задания (листочки). Учащиеся решают задачи в классе и дома, а затем сдают все решения преподавателям. При этом почти не применяется обычная форма урока с рассказом материала и проверкой усвоения методом опроса. Не задаются задания «выучить такую-то теорему» или «прорешать к следующему уроку такие-то примеры». За сданные задачи не ставится отметка. Отметки ученики получают не за то, как они учатся, а за то, как выучиваются, что проверяется на контрольных и самостоятельных работах.

Из таких листочков с заданиями однажды был составлен курс задач, подобный предлагаемому*. Но преподавание в каждом классе отличается от других. Возникают новые задачи и новые варианты построения курса. Один из таких вариантов нашел отражение в предлагаемом сборнике.

Задания, предлагавшиеся ученикам IX—X классов школы № 57 Москвы в 1969/70 и 1970/71 учебных годах, я переписал, устранив замеченные промахи. При этом в процессе редактирования курс прошел несколько стадий.

Сначала сборник был просто документальным отчетом о проведенном курсе. В нем было много пробелов с точки зрения полноты и строгости изложения. Дополняя и совершенствуя сборник, я довел его до «идеального», по моим представлениям, состояния, так что, если бы учащийся решил все задачи, он создал бы курс (самостоятельно!), в котором нет ничего недоказанного или принятого на веру. В этом курсе, исходя из аксиом, доказывалась правомоч-

---

* Гервер М. Л., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся 9 и 10 классов. В сб.: Обучение в математических школах. М., 1965. В этом сборнике в ряде статей освещается методика такого преподавания анализа.

ность всех привычных операций над числами, включая возможность счета с помощью натуральных чисел; полностью обосновывались свойства действительных чисел различными известными методами.

От работы по усовершенствованию сборника сам я получил большую пользу, так как до этого никогда не доказывал всех результатов анализа, начиная от аксиом. Затем я и мои товарищи пробовали проходить усовершенствованный курс с учащимися. Вот тут-то и произошло то, что должно было произойти. Новый курс шел намного хуже, чем первоначальный. Учащиеся надолго застревали на тривиальном материале, может быть и полезном с точки зрения логической стройности курса, но малоценном с точки зрения овладения основными умениями, необходимыми для свободного владения анализом.

Как же могло случиться, что «плохой» первоначальный курс оказался лучше усовершенствованного «хорошего»? Я думаю, что причин здесь две.

Первая, не основная причина, состоит в том, что на логической и стилистической стройности ничего или почти ничего не выигрывается, а теряется очень много. Для человека, не владеющего основными конструкциями математического анализа, какая-либо конструкция действительных чисел дается с большим трудом, потому что в этой конструкции непременно встретится такое место, где нужно чувствовать непрерывность по существу. Причем понимать ее придется в неблагоприятных условиях — ведь учащемуся запрещено думать о действительных числах как известном объекте! Например, если действительные числа строятся как классы фундаментальных последовательностей, то по существу ученик должен доказывать теоремы о пределах в то время, когда ему запрещено думать о числе, являющемся пределом. В защиту такого построения приводят довод, что потом учащемуся будет легко доказывать теоремы о пределах, а еще позже он сразу поймет метод пополнения любого метрического пространства. Но представим себе, что сделано наоборот. На основе нестрогого рассказа о действительных числах ученик доказал много теорем о пределах последовательностей и функций, повычислял пределы, поработал с типичными логическими конструкциями анализа. А после этого ему рассказали, как строить действительные числа с помощью классов фундаментальных последовательностей. Сколько времени нужно ученику, чтобы понять это построение? Мой опыт говорит, что принцип понимается за время, исчисляемое минутами, после чего ученик может не только доказать все необходимые утверждения, но и сам может их все сформулировать без подсказки. Так что общий метод пополнения любого метрического пространства есть вещь тривиальная и ничего не стоящая с педагогической точки зрения. Слишком трудны для новичков и все другие конструкции действительных чисел. Аксиоматическое построение курса для учащихся, не усвоивших еще основных правил игры, не оправдано. Оно не дает учащимся чувства хозяина положения, так как объект (действительные числа) не очевиден, и в природе в том виде, как он понимается в анализе, не встречается. У учащихся не вырабатываются собственные критерии истины. Итак, идеальный курс бесполезен для учащихся. Это хорошее упражнение для преподавателя, и только.

Но есть и другая причина неудачи, которую я считаю основной. Первоначальный курс рождался в процессе работы с классом. Каждое задание являлось ответом на ответ к предыдущему заданию. Иногда я начинал с классом беседу у доски, еще не зная, чего я хочу, а в процессе беседы выяснялось, что нужно отработать нечто, о чем я раньше не думал, и формулировалось следующее задание. Иногда, когда очередное задание оказывалось слишком трудным, я давал более легкое дополнительное задание не для всех, которое объявлялось предшествующим этому трудному заданию. Я сам чувствовал, что курс рождается в процессе работы, и это чувствовали ученики. По сравнению с этим огрехи построения курса, нарушения стиля и т. п. не имели существенного значения. Когда же потом мы пытались идти с другими учениками по проторенной дороге, новизна пропадала, наш курс не выдерживал конкуренции с другими интересами учащихся, отходил в их представлении на второй план. Чтобы курс шел хорошо, он должен каждый раз создаваться заново в условиях активного взаимодействия учителей и учеников. Чтобы ученикам это было интересно, необходимо, чтобы и учителям это было интересно, причем важно не то, чтобы учителя могли хорошо притвориться, что им интересно, а чтобы им действительно было интересно. Требование постоянной новизны курса не означает, конечно, что опыт для учителя бесполезен. Наоборот, опыт, увеличивая возможности учителя, помогает ему по-новому строить курс. Но если опыт используется как запас, освобождающий от думания, то он становится грузом и помехой. Я позволю себе посоветовать преподавателям, и опытным и неопытным, писать для себя новые курсы, причем неоднократно. При этом вы получите от этой работы ту же пользу, которую я получил, создавая «идеальный» курс, о котором я говорил. Но эти курсы нужны не для того, чтобы их публиковать, и тем более не для того, чтобы по ним вести преподавание. Они полезны только как стадии в образовании человека, который их написал.

Придя к такому выводу, я решил опубликовать часть собранного материала, который, как мне кажется, может помочь учителю строить свой курс. При этом я твердо знаю, что не предлагаю рецепта хорошего курса. Поскольку предлагаемые задачи являются выборкой, они не полностью охватывают программу и используют факты, не освещенные в сборнике.

Эту выборку я все же старался сделать так, чтобы в сборнике сохранилось ощущение характера наших занятий в классе. Весь курс представлен как последовательность «листков», как это и было в действительности. В основном сохранена последовательность изложения. Только в настоящей статье эта последовательность более строгая, чем была в классе. Задачи по теории множеств собраны вместе, в то время как в практическом преподавании рекомендуется эту тему растягивать, перемежая с заданиями из других тем. Иногда проводились занятия лекционного типа, когда что-либо рассказывалось у доски. Таких занятий было немного. В настоящей статье они нашли некоторое отражение в том, что в тексте, кроме листочков с заданиями, имеются страницы с изложением какой-то математической ситуации.

В статье сохранились некоторые особенности терминологии, стихийно возникшие в тех конкретных условиях, когда создавался курс. Конечно, термины, обозначающие основные понятия, такие как, например, «предел» или «непрерывность», должны быть стандартными. Но в тех случаях, когда речь идет о понятиях не столь основных, разнобой в терминологии может быть даже оправданным. Например, термин «твг» (точная верхняя грань) возник, естественно, в процессе обсуждения этого понятия в классе (как это произошло, см. в тексте листка про точные грани), поэтому лучше всего было его и сохранить в качестве рабочего. Если вместо этого термина мы навяжем учащимся латинское sup, то мы снизим убедительность темы, так как не вовремя напомним им, что все, что они изучают, уже давно «уложено по полочкам».

Настоящий сборник возник до введения в преподавание новых учебников. В связи с тем, что нынешние учащиеся привыкли к иным терминам и обозначениям, чем их предшественники, следовало бы теперь внести соответствующие изменения и в настоящий сборник. Это сделано лишь в минимальной степени, так как, во-первых, провести полный пересмотр терминов и обозначений трудно, а во-вторых, и это главное, такие изменения касались бы только внешнего оформления текста, не затрагивая его содержания, между тем как переход к новым программам требует существенного пересмотра содержания курса, так что изменение только терминов без изменения содержания сделало бы статью химерическим созданием, которое не воспринималось бы ни в каком плане. Необходимые изменения в содержании вытекают из того, что учащиеся, изучавшие математику по новой программе, имеют иную систему навыков, чем прежде. Наряду с выигрышами имеются потери. Изменение произошло в такую сторону, что, как мне кажется, обострение логической стороны вопросов стало менее актуальным, в то время как развитие находчивости и умения найти особый подход в каждом конкретном случае приобретают большее значение, чем прежде. Стройность курса и замкнутость терминологии могут быть в некоторых случаях весьма вредными, так как приучают учащихся ждать готового решения. Так что полное «причесывание» курса не только затруднительно; оно создало бы подтекст, содержащий идеи, прямо противоположные тем, в которые я верю.

На протяжении всего курса учащиеся получали много самостоятельных и контрольных работ. Часть этих работ помещена в настоящем сборнике. Работы, содержание которых не отличается от традиционных, не публикуются. Дополнительные задачи, как правило, более трудные и выходящие за пределы содержания курса, помечены буквой «д», стоящей после номера.

§ I. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ

ЛИСТОК 1. УПРАЖНЕНИЯ НА ИНДУКЦИЮ

Доказать:

1. $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=?$

4. $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\ldots+\frac{1}{6^k}=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6^{k+1}}$.

5. $1+p+p^2+p^3+\ldots+p^k=\frac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

Определения. *Арифметической прогрессией* называется последовательность вида $x_k=a+b\cdot k$ (нумерация начинается с 1). *Геометрической прогрессией* называется последовательность вида $x_k=a\cdot b^k$.

6. Доказать, что сумма k первых членов арифметической прогрессии находится по формуле $S_k=\frac{x_1+x_k}{2}\cdot k$.

7. Доказать, что сумма k первых членов геометрической прогрессии находится по формуле $S_k=\frac{x_1-x_{k+1}}{1\cdot b}$ (при $b\neq 1$).

8. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^k=1+kx+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}x^p+\ldots+x^k.$$

9 д. Доказать, что при любом натуральном k

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

10 д. *Последовательность Фибоначчи* образуется следующим образом: первые два числа равны единице, каждое следующее число является суммой двух предыдущих.

Доказать: а) каждое пятое число последовательности Фибоначчи делится на 5; б) для каждого k найдется член этой последовательности, делящийся на k.

11 д. Рассмотрим числа:

1^k

$\quad 2^k - 1^k$

$2^k; \qquad (3^k - 2^k) - (2^k - 1^k);$

$\quad 3^k - 2^k$

$3^k; \qquad (4^k - 3^k) - (3^k - 2^k); \cdots$

$\quad 4^k - 3^k$

$4^k; \qquad (5^k - 4^k) - (4^k - 3^k);$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

$\quad n^k - (n-1)^k$

$n^k; \qquad ((n+1)^k - n^k) - (n^k - (n-1)^k).$

$\dots$

Доказать, что все числа $k+1$-го столбца равны.

ЛИСТОК 2. НЕРАВЕНСТВА

1. Если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Когда достигается равенство?

2. Какое наименьшее значение имеет выражение $a + \frac{9}{a}$ $(a > 0)$?

3. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

4 д. Доказать утверждение, аналогичное предыдущему (см. задачу 3), для среднего арифметического и среднего геометрического n чисел.

5. Доказать:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *слабо выпуклой*, если ее значение в середине любого отрезка области определения меньше среднего арифметического значений $f(x)$ на концах этого отрезка.

6. Доказать, что функция $y = x^2$ слабо выпукла. Доказать, что функция $y = x^2 + px + c$ слабо выпукла.

ЛИСТОК 3. МОДУЛИ

Определение. *Модулем* числа x (обозначение: $|x|$) называется число x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$.

1. Доказать, что $|x| \geqslant 0$ для любого x.

2. Доказать, что $|x - a| < b$ тогда и только тогда, когда

$$a - b < x < a + b.$$

3. Доказать *неравенство треугольника*: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Другая форма неравенства треугольника:

$$|a - b| \leqslant |a - x| + |b - x|.$$

Замечание. Модуль числа $a - b$ есть расстояние между точками числовой прямой с координатами a и b. Неравенство треугольника выражает тот факт, что расстояние между точками прямой не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

4. Доказать, что $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

5. Нарисовать график функции $y = |x - 1| + |1 + x|$.

6. а) Найти такие числа a и c, что интервал $]2; 5[$ задается неравенством: $|x - a| < c$.

б) То же самое сделать для интервала общего вида $]l; m[$.

7. Рассмотрим неравенства: 1) $|x - 2| < 4$; 2) $|x - 3| < a$.

а) При каких a неравенство 1) является следствием неравенства 2)? б) При каких a неравенство 2) является следствием неравенства 1)?

8. Рассмотрим неравенства: 1) $|x - 1| < 1$; 2) $|x - 2| < 1$; 3) $\left|x - \frac{3}{2}\right| < 1$. Верно ли, что одно из этих неравенств есть следствие двух других?

ЛИСТОК 4. ВАЖНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Доказать, что при действительном $a > -1$ и натуральном k

$$(1 + a)^k \geqslant 1 + ka.$$

2. Доказать: найдется такое p, что для любого натурального $k > p$ $\quad 1000 \cdot 2^k < k!$

3. Доказать, что Н. p Л. $k > p$ $\quad k^2 < 2^k$ (Н. — сокращение для словосочетания «найдется ... такое, что», Л. — сокращение для словосочетания «для любого ...»).

4. Доказать, что Н. p Л. $k > p$ $\quad k^3 < 2^k$.

5. Доказать, что Н. p Л. $k > p$ $\quad k^{10} < 2^k$.

6. Даны числа a, b и c. Доказать, что существует такое k, что $k^3 + ak^2 + b > k^2 + c$.

7. Доказать существование таких натуральных m и n, что:

а) $1{,}0001^m > 1000000$; б) $0{,}999^n < 0{,}0000001$.

8. Доказать, что для любого положительного числа ε найдется число n такое, что для любого k, большего n,

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2k + 1}{3k + 6} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Замечание (по поводу обозначений). Я думаю, что на данном этапе обучения не следует навязывать учащимся употребление кванторов. Полезно, чтобы сначала они научились давать полные словесные формулировки, а кванторы можно понемногу вводить исключительно в целях сокращения записи и лишь при условии, что они не затрудняют понимания. В последнее время появилась тенденция к широкому употреблению кванторов как речевых оборотов в неформальном тексте, а не в логических формулах, как это было первоначально. Этот процесс вряд ли можно остановить, поскольку он является фактом в развитии языка. Но нужно следить, чтобы всегда учащиеся могли расшифровать кванторную запись как правильно построенную фразу и произнести ее. В данном листке употребляются сокращения Н. и Л. вместо кванторов для того, чтобы не отвлекать внимание учащихся от сути дела. Если бы мы употребили кванторы, то создали бы тем самым ощущение, что здесь возникает какая-то новая наука, в результате чего учащиеся думали бы совсем не о том, о чем следует думать, решая задачи этого листка. Но если учащиеся были прежде знакомы с кванторами, их, конечно, можно употреблять.

ЛИСТОК 5. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Определения. 1. Числовое множество M называется *ограниченным сверху*, если существует такое число C, что для всякого x из M $x < C$.

2. Числовое множество M называется *ограниченным снизу*, если существует такое число C, что для всякого x из M $x > C$.

3. Числовое множество M называется *ограниченным*, если существует такое число C, что для всякого x из M $|x| < C$.

1. Сформулировать, что означает, что множество M не ограничено сверху.

2. Доказать: для того чтобы множество M было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено сверху и снизу.

3. Даны числовые множества A и B. Множество C образуем следующим образом: C состоит из всевозможных сумм $a + b$, где a принадлежит множеству A, b принадлежит множеству B. Доказать, что множество C ограничено тогда и только тогда, когда и A и B ограничены.

4 д. *Гармоническим рядом* называется бесконечная сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots$. Доказать, что сумма первых 500 членов гармонического ряда больше 5.

5 д. Обозначим через P_k сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Рассмотрим множество M чисел P_k при всевозможных натуральных k. Доказать, что M — неограниченное множество.

6 д. Доказать, что при любом k сумма квадратов k первых членов гармонического ряда не больше двух.

ЛИСТОК 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} < \frac{3}{4}$$

(k натуральное).

2. Из гармонического ряда выброшены все слагаемые, в написании которых участвует цифра 9. Доказать, что сумма любого количества членов полученного ряда меньше 100.

3. Имеется неограниченное количество одинаковых кирпичей, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Первый кирпич кладется на горизонтальную плоскость, второй кирпич кладется на первый, третий — на второй и так далее. Кирпичи можно класть друг на друга с некоторым сдвигом, но так, чтобы они не падали. Для каждой такой конечной постройки определим расстояние от середины проекции на плоскость верхнего кирпича до середины проекции нижнего. Будет ли множество всех таких расстояний ограничено?

4. Решить предыдущую задачу, если кирпичи могут иметь неодинаковый вес. Будем предполагать, однако, что каждый кирпич однороден, т. е. его плотность во всех его точках одинакова (это предполагалось и в предыдущей задаче), и что плотности различных кирпичей заключены в пределах от 1 до 2.

ЛИСТОК 7. ТОЧНЫЕ ГРАНИ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть M — числовое множество. Число C называется *точной верхней гранью множества* M ($C = \sup M$), если выполняются два условия:

1. для всякого x из M $x \leqslant C$.

2. для всякого $C_1 < C$ найдется x из M такой, что $x > C_1$.

Аналогично определяется точная нижняя грань ($\inf M$) множества M.

1. Сформулировать: число C не является sup множества M (не употребляя отрицаний).

2. Если каждое из множеств A и B имеет sup, то объединение этих множеств имеет sup. Доказать.

3. Пусть множество M состоит из всех таких чисел x, которые можно представить как сумму двух положительных чисел. Доказать, что 0 является inf множества M.

4. Какой интервал заполняют суммы $a + b$, если $-2 < a < 2{,}5$, $-3 < b < 1{,}5$? (a и b могут принимать любые значения в указанных границах).

5. Число 3 является sup множества сумм $a + b$, где $a < 1$, $b < 2$. Доказать.

6. Если каждое из множеств A и B имеет sup, то множество C, состоящее из всевозможных сумм $a + b$, где a — элемент множества A, b — элемент множества B, имеет sup. Доказать.

7. Верно ли то же самое для множества произведений ab?

Доказать:

8. Если множества A и B состоят только из положительных чисел и имеют sup, то множество C, состоящее из всех произведений ab, где a — элемент множества A, b — элемент множества B, имеет sup.

9. Если каждое из множеств A и B имеет sup и inf, то множество C произведений ab (a из A, b из B) имеет sup и inf.

10. Каждое множество может иметь только одну точную верхнюю грань.

Методическое замечание. Нетрудно добиться, чтобы ученики сами дали определение точной верхней (нижней) грани множества. Это может произойти либо в результате беседы с классом у доски, либо в процессе индивидуальных бесед преподавателей с каждым учащимся. Задается следующий вопрос: «В определении множества, ограниченного сверху, фигурирует число C, которое больше всех элементов множества. Оно как-то характеризует множество. Как бы вы назвали это число?» Учащиеся предлагают одно из названий: «верхняя граница», «верхнее ограничение» или что-то в этом роде. Задается следующий вопрос: «Пусть C является верхней границей множества, существует ли какая-либо другая верхняя граница?» Ученики должны ответить, что всякое число, которое больше, чем C, тоже является верхней границей, меньшее же число может быть, а может и не быть верхней границей данного множества. Далее учащимся предлагается следующая проблема: «Верхняя граница множества определена неоднозначно. Можете ли вы так видоизменить определение верхней границы множества, чтобы полученное определение задавало некоторое точное число единственным образом». Рисуется на числовой прямой точка, которую мы хотим определить. Учащиеся в ответ на это обычно предлагают два варианта определения: 1) наибольший элемент множества; 2) наименьшая верхняя граница. После этого нужно разобрать случаи, когда множество не имеет наибольшего элемента, а множество верхних границ не имеет наименьшего элемента. Учащимся предлагается видоизменить определение таким образом, чтобы в обоих этих случаях точная верхняя грань множества существовала. После этого обычно появляется одно из правильных определений точной верхней грани множества. Если в результате такого обсуждения появится не самое удобное определение (а самое удобное, я думаю, приведено в листке), то нужное определение можно дать в виде задачи. Подобные беседы можно проводить и по поводу других основных понятий анализа (предела и непрерывности), но они проходят значительно труднее.

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ЛИСТОК 8. ПОДГОТОВИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ НА АКСИОМУ ПОЛНОТЫ

В предыдущих заданиях предполагалось, что вы знакомы с привычными свойствами действительных чисел. Что касается целых и рациональных чисел, то такое предположение имеет основания. С целыми числами вы умеете работать: умеете производить с ними арифметические операции, устанавливать, какое из двух чисел больше, считать с помощью натуральных чисел. Каждое рациональное число записывается, как дробь $\frac{a}{b}$, где a и b целые ($b \neq 0$); вы умеете производить с такими числами арифметические действия, устанавливать, какое из двух чисел больше. Этих знаний достаточно для решения задач предыдущих листков. Вы можете считать, что в этих листках речь шла только о рациональных числах. Но если вы хотите считать, что там шла речь о действительных числах (т. е. о рациональных и иррациональных), то это также допустимо. Дело в том, что ранее использовались только такие свойства действительных чисел, которые имеют место и для рациональных чисел. Но для дальнейшего нам потребуется новое свойство действительных чисел.

Аксиома полноты. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

Имеет ли место это свойство, если рассматривать только рациональные числа? Оказывается, что не имеет (см. задачу 2). Этим новое свойство отличается от тех свойств действительных чисел, которые рассматривались ранее. Какие имеются основания для того, чтобы принять это предложение за аксиому? Аналогия с рациональными числами не может служить таким основанием; кроме аналогии, мы пока ничего не имеем: мы не формулировали никакого определения иррациональных чисел, следовательно, это есть объект, о котором мы пока вообще не можем судить.

Вот еще один пример свойства действительных чисел, для обоснования которого аналогия с рациональными числами недостаточна.

Аксиома Архимеда. *Для всякого действительного числа C найдется натуральное N такое, что $N > C$.*

В этой аксиоме говорится о связи действительных чисел с целыми. Для рациональных чисел это свойство проверяется. Для действительных чисел, поскольку мы пока вообще не знаем, что это такое, проверить его невозможно.

Аксиома Архимеда оказывается необходимой для самых простых вещей. Например, в листке «Важные задачи» в задаче 7 требуется найти такое m, что m-ая степень числа 1,0001 больше 1 000 000. Напрашивается обобщение, что и для всякого $c > 1$ существует такое m. Действительно, если c рационально, это можно доказать. Но если не сказано, что c рационально, то оказывается, что доказать это не удается. Необходимы какие-то сведения о взаимоотношении действительных и рациональных чисел. Аксиому Архимеда можно доказать, исходя из аксиомы полноты. В предлагаемом задании аксиома полноты считается верной. В последующем изложении она доказывается исходя из свойств десятичных дробей. А теперь решите несколько задач.

1. Среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 2. Доказать.

2. Привести пример такого множества рациональных чисел, которое ограничено сверху и не имеет sup среди рациональных чисел.

Доказать:

3. Не существует рационального числа, квадрат которого равен 5.

4. Всякое ограниченное снизу числовое множество имеет inf.

5. Если $\sqrt{k}$ есть рациональное число, то это число целое (k — натуральное число).

ЛИСТОК 9. СЛЕДСТВИЯ АКСИОМЫ ПОЛНОТЫ

1. Доказать аксиому Архимеда исходя из аксиомы полноты.

2. Доказать, что для всякого положительного B найдется натуральное n такое, что $\frac{1}{n} < B$.

3. Пусть $C > 1$. Доказать, что найдется натуральное p такое, что $C^p > 1000$.

4. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что для любого $k > n$ $\frac{1000 \cdot 2^k}{k!} < \varepsilon$.

5. Пусть $0 < p < 1$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется n такое, что для любого $k > n$ $p^k < \varepsilon$.

6. Последовательность отрезков числовой прямой называется *вложенной*, если для всякого натурального k отрезок с номером $k+1$ целиком принадлежит отрезку с номером k (в отрезок включаются его концы!). Доказать, что для всякой вложенной последовательности отрезков найдется точка, принадлежащая всем отрезкам (теорема о вложенных отрезках).

7. Построить на прямой систему попарно не пересекающихся отрезков единичной длины так, чтобы во всякой бесконечной арифметической прогрессии нашелся член, лежащий на одном из отрезков.

ЛИСТОК 10. ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК ДРОБЬ

Мы приводим фрагмент построения действительных чисел как бесконечных десятичных дробей*. При этом мы будем обращать внимание только на свойства, которые существенны для обоснования аксиомы полноты. Доказательство всех остальных свойств не даст никаких новых фактов по сравнению с «привычными свойствами действительных чисел», и его можно отложить до лучших времен (т. е. до тех пор, когда учащиеся овладеют основными конструкциями математического анализа).

---

* В учебном пособии по алгебре и началам анализа под редакцией А. Н. Колмогорова вопрос трактуется более полно; целью нашего изложения является выделение определенной стороны вопроса.

Бесконечной десятичной дробью (БДД) называется запись вида $\pm A$, $a_1a_2a_3\ldots$, где A — десятичная запись натурального числа или нуль, а $a_1a_2a_3\ldots$ — бесконечная строчка (последовательность) цифр (цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Если в этой строчке, начиная с некоторого места, все нули, то БДД называется конечной десятичной дробью; эти нули разрешается не писать. К A разрешается приписывать конечное число нулей слева, знак «+» перед БДД разрешается опускать. Если дроби a и b до некоторого места совпадают, а начиная с этого места в a идет некоторая цифра $l+1$, а дальше все нули, а в b — l и дальше все девятки, то такие дроби называются *близнецами.*

Определение. Дроби называются эквивалентными, если они являются близнецами. Кроме того, эквивалентны дроби $+0,000\ldots$ и $-0,000\ldots$. Классы эквивалентности называются *действительными числами.*

Иными словами, если дробь не имеет близнеца, то она есть действительное число; если же у нее есть близнец, то каждый из двух близнецов является изображением одного действительного числа.

Порядок в множестве действительных чисел определяется по следующему правилу.

Пусть X и Y — две БДД, не являющиеся близнецами. Если перед X стоит знак «+», а перед Y — знак «—», то $X > Y$. Если обе дроби начинаются с «+», то та из них больше, у которой первый различающий знак больше, а если обе дроби начинаются с «—», то та дробь больше, у которой первый различающийся знак меньше (при условии, что дроби подписаны одна под другой таким образом, что запятые приходятся друг под другом).

Пусть теперь x и y — два действительных числа (различных). Для каждого из них возьмем изображающую его БДД, причем если для числа есть две изображающие его дроби, то возьмем одну из них. Сравним эти дроби. Считаем, что и между соответствующими им числами имеется то же соотношение. То есть если X — БДД, изображающая x, а Y — БДД, изображающая y, то в случае $X > Y$ считаем, что $x > y$.

Задание. Проверьте корректность определения порядка в множестве действительных чисел, т. е. проверке подлежит следующий факт: если для чисел x и y взять другие изображения (для одного из них или для обоих), то по ним определится тот же порядок между числами, что и по старым изображениям.

Теперь имеет смысл говорить о точной верхней грани множества, состоящего из действительных чисел, так как в определении sup используется только порядок.

Задание (основная теорема). Доказать, что всякое непустое ограниченное сверху множество M действительных чисел имеет sup (в частности, доказать, что sup не зависит от того, какие из близнецов, представляющих числа из M, выбраны).

§ 3. НАЧАЛА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ*

Во всех дальнейших разделах этого сборника теоретико-множественные понятия используются на каждом шагу. На них все основано в той же мере, как и на логике.

Сведения о множествах собраны главным образом в настоящем, третьем параграфе. Но практически этот материал стоит разбросать между другими разделами. Последние задачи этого раздела рекомендуется перенести на конец курса, если они не получаются сейчас.

ЛИСТОК 11. СЧЕТНОСТЬ

Определение. *Взаимно однозначным соответствием* множеств A и B называется правило, по которому каждому элементу множества A ставится в соответствие один определенный элемент множества B так, что при этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие одному определенному элементу множества A.

Определение. Два множества A и B называются *количественно эквивалентными* или *равномощными*, если существует взаимно однозначное соответствие между ними.

Для двух конечных множеств A и B можно установить их количественную эквивалентность, пересчитав их с помощью натуральных чисел. Для двух бесконечных множеств этот способ не годится. В этом случае необходимо пользоваться сформулированным определением.

Равномощность для бесконечных множеств обладает рядом непривычных свойств. Например, всякое бесконечное множество равномощно некоторой своей части и т. п.

Определение. Множество называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие этого множества с множеством всех натуральных чисел.

Доказать счетность следующих множеств:

1. Множество всех целых чисел (положительных и отрицательных).

2. Множество всех положительных нечетных чисел.

3. Множество всех простых чисел.

4. Множество всех рациональных чисел.

5. Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел (упорядоченные пары $(x; y)$ и $(y; x)$ различны при $x \neq y$).

6. Множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц.

---

* Понятия теории множеств используются уже в первых листках настоящего сборника в формулировках определений и задач. Но там это лишь речевые обороты, и их использование, я надеюсь, не вызвало трудностей.

7. Множество всевозможных конечных русских слов («русским словом» в этой задаче называется произвольная последовательность букв русского алфавита).

8. Множество всевозможных конечных последовательностей рациональных чисел.

9 д. Восьмеркой называется множество всех точек, принадлежащих двум касающимся и несовпадающим окружностям. На плоскости нарисовано некоторое множество восьмерок, попарно не имеющих общих точек. Доказать, что множество этих восьмерок конечно или счетно.

10 д. Если на плоскости нарисовано некоторое множество букв T, попарно не имеющих общих точек, то это множество конечно или счетно.

Рассказы о множествах. 1. Однажды ко мне пришло счетное множество гостей. Входя, каждый снял галоши и оставил их в прихожей. Когда гости расходились, то каждый взял какую-нибудь пару галош, надел их и ушел. А у меня в прихожей осталось еще бесконечно много галош. Как я организовал уход гостей?

А в другой раз, после того как часть гостей ушла, галош в прихожей не осталось, и остальным пришлось уйти без галош. Но был и такой случай, когда после ухода гостей осталась ровно одна пара.

2. Даны три ящика A, B и C. В ящике A бесконечно много орехов, а ящики B и C пустые. Коля берет 10 орехов из ящика A и перекладывает их в ящик B, после этого Петя берет один орех из ящика B и перекладывает его в ящик C. Затем эти операции повторяются бесконечное число раз. Что будет в ящиках в результате бесконечного числа таких операций?

Прежде всего, вопрос поставлен нечестно. Нужно уточнить некоторые детали. Пусть в ящике A орехов счетное множество. Пусть операции занумерованы: 1, 2, ... (в том порядке, как они производятся). Можно сказать, что «орех x находится в ящике C в результате бесконечного числа операций», если найдется такое натуральное n, что на n-ом шагу Петя переложил орех x в ящик C. Теперь сами уточните, что означает, что в результате бесконечного числа операций орех находится в ящике B и в ящике A. А теперь подумайте над вопросом задачи.

ЛИСТОК 12. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Определения. 1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

В частности, все множество B является подмножеством самого себя. Люди придумали так называемое *пустое множество* — множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество тоже является подмножеством множества B (проверьте!).

2. Множество C называется *объединением* множеств A и B (обозначается: $A \cup B$), если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A или x входит в B» («или» не исключает того, что x входит одновременно в A и в B).

3. Множество C называется *пересечением* множеств A и B, если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A и x входит в B». Обозначение: $A \cap B$.

4. Множество C называется *разностью* множеств A и B (обозначение: $A \setminus B$), если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A и не входит в B».

5. *Множества A и B равны*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пользуясь определениями, докажите:

1. Если $A \setminus B = B \setminus A$, то $A = B$.

2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (первый закон дистрибутивности).

4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (второй закон дистрибутивности).

Пусть P — множество, A, B, ... — его подмножества. Множество $P \setminus A$ будем называть *дополнением* множества A (до P) и обозначать через $\bar{A}$. Докажите:

5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Рассмотрим теперь операции с бесконечным числом множеств.

Определение. Пусть M — множество, состоящее из множеств A. *Объединением множества M множеств A* (обозначение: $\bigcup_M A$) называется множество C такое, которое состоит из тех и только тех x, которые входят хотя бы в одно множество A.

6. Определите сами пересечение бесконечного числа множеств $\bigcap_M A$.

Доказать:

7. $(\bigcup_M A) \cup C = \bigcup_M (A \cap C)$, $(\bigcap_M A) \cup C = \bigcap_M (A \cup C)$.

8. $\overline{\bigcup_M A} = \bigcap_M \bar{A}$, $\overline{\bigcap_M A} = \bigcup_M \bar{A}$.

9. Объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

ЛИСТОК 13. МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА

Определение. Множество называется *несчетным*, если оно бесконечно и не счетно.

Теорема. *Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда каждая последовательность получает свой номер. Строим теперь последовательность A по следующему правилу: на k-е место в A ставим нуль, если на k-м месте k-й последовательности стоит 1, и 1 — если там стоит нуль. Последовательность A не может совпадать ни с одной из последовательностей, участвующих в нумерации. Противоречие.

Доказать:

1. Вся числовая прямая равномощна интервалу $0 < x < 1$ (и, конечно, всякому другому интервалу).

2. Отрезок и интервал равномощны.

3. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству действительных чисел отрезка $[0; 1]$.

4. Множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.

5. Множество точек отрезка $[0; 1]$ равномощно множеству точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Укажем вспомогательные задачи, которые могут помочь при решении предыдущих:

6. Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

7. Если A несчетно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A.

Определение. Говорят, что множество A *более мощно*, чем множество B, если существует подмножество множества A, равномощное всему множеству B, и при этом не существует взаимно однозначного соответствия множеств A и B.

Из текстов приведенных выше задач видно, что множество точек отрезка более мощно, чем множество натуральных чисел. Про всякое множество, равномощное отрезку, говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

Замечание. Слова «множества A и B равномощны», «A более мощно, чем B» и т. п. могут навести на преждевременное убеждение, что мощность множества — это что-то вроде числа, которое характеризует его «размеры», и что для любых двух множеств можно утверждать, что они либо равномощны, либо одно из них более мощно, чем другое. Теория таких «чисел» (так называемых «кардинальных чисел») действительно существует, и в ней приведенное утверждение о сравнимости по мощности любых двух множеств доказывается. Но в начале изучения теории множеств приходится обходиться без этого утверждения, и пока мы не исключаем, что существуют два множества, не сравнимые по мощности.

ЛИСТОК 14. ЗАДАЧИ О МОЩНОСТЯХ

1. Теорема Кантора — Бернштейна (трудная). *Если множество* A равномощно части множества B, а множество B равномощно части множества A, то A и B равномощны.

Если эта задача не получается, примите утверждение на веру и используйте его в дальнейших задачах. Попробуйте также применить эту теорему для решения тех задач предыдущего листка, которые не получились без нее.

Доказать:

2. Множество бесконечных последовательностей целых чисел имеет мощность континуума.

3 (трудная). Множество бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

4 (трудная). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

5 (трудная). Если объединение счетного множества N множеств A имеет мощность континуума, то хотя бы одно из множеств A имеет мощность континуума.

6 (трудная). Множество всех подмножеств данного множества более мощно, чем само множество.

Определение. Рассмотрим последовательность множеств: P_1 — это множество точек отрезка $[0; 1]$. Разделим P_1 на три равные части, и среднюю треть (без концов) обозначим через U_1 (т. е. U_1 есть интервал $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$). P_2 есть разность $P_1 \setminus U_1$. U_2 есть объединение двух интервалов, которые являются средними третями двух отрезков, из которых составлено P_2; $P_3 = P_2 \setminus U_2$. И так далее, P_k есть объединение 2^{k-1} отрезков, U_k есть объединение интервалов, являющихся средними третями этих отрезков, $P_{k+1} = P_k \setminus U_k$. *Канторовским множеством* называется множество $K = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots$ (пересечение множеств P_k при всевозможных натуральных k).

7. Доказать, что канторовское множество имеет мощность континуума.

Решение задачи 4. Пусть множество $M = A \cup B$ имеет мощность континуума. Установим взаимно однозначное соответствие между M и множеством точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Для всякого x отрезка $[0; 1]$ рассмотрим прямую, параллельную оси y и проходящую через эту точку x. Если для каждого x на такой прямой найдется точка из A, то множество A имеет мощность континуума. Если же на некоторой прямой точек A не найдется, то пересечение этой прямой с квадратом состоит только из точек множества B и множество B имеет мощность континуума.

ЛИСТОК 15. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

В этом листке рассматриваются множества, являющиеся подмножествами некоторого основного множества — прямой или отрезка. Если множества рассматриваются на прямой, то *обобщенным интервалом* называется любой интервал, т. е. множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ (a и b — произвольные действительные числа), либо полупрямая $x < a$, либо полупрямая $x > a$, либо вся прямая. Если множества рассматриваются на отрезке, то обобщенным интервалом называется любой интервал, целиком принадлежащий этому отрезку, либо полуинтервал, примыкающий к концам этого отрезка (т. е. множества вида $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, где a и b — концы отрезка, c — любое число на этом отрезке), либо весь отрезок.

Пусть точка x принадлежит основному множеству. *Окрестностью* точки x (в этом основном множестве) называется любой обобщенный интервал, содержащий эту точку.

Определения. 1. Точка x называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность точки x, целиком принадлежащая M.

2. Множество M называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Доказать:

1. Пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.

2. Объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество.

3. Всякое открытое множество есть объединение конечного или счетного числа попарно непересекающихся обобщенных интервалов.

Определения. 3. Точка x называется *предельной для множества* M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x.

4. Точка x называется *предельной для множества* M, если любая окрестность точки x содержит бесконечно много точек из M.

4. Докажите эквивалентность определений 3 и 4.

Определение 5. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Доказать:

5. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

6. Пересечение любого множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.

7. Дополнение к открытому множеству есть замкнутое множество, дополнение к замкнутому множеству есть открытое множество.

ЛИСТОК 16. ЕЩЕ ОБ ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

Доказать:

1. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств («открытость» по отношению к этому отрезку).

2. Если M_k — последовательность замкнутых множеств отрезка, такая, что M_{n+1} содержится в M_n для любого n (такая последовательность называется вложенной), то найдется точка, общая для всех множеств M_n.

О п р е д е л е н и е. Пусть M — подмножество прямой или отрезка. Точка x множества M называется *изолированной* точкой M, если существует окрестность точки x, в которой нет точек множества M, кроме x.

3. Доказать, что множество изолированных точек любого множества M конечно или счетно.

О п р е д е л е н и е. Замкнутое множество, не имеющее изолированных точек и не пустое, называется *совершенным*.

4. Доказать, что всякое совершенное множество имеет мощность континуума.

5. Доказать, что если совершенное множество не имеет внутренних точек и ограничено, то можно установить подобное соответствие между ним и канторовским множеством (*подобное соответствие* — взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок).

6. Доказать, что для всякого положительного $a < 1$ найдется пара точек x и y канторовского множества, такая, что $y - x = a$.

7. Будет ли верно это утверждение, если при построении канторовского множества выбрасывать на каждом шагу из отрезков не треть, а какую-нибудь другую часть, например четверть или половину?

О п р е д е л е н и е. Множество M называется *нигде не плотным*, если для каждого интервала U числовой оси найдется принадлежащий ему интервал D такой, что D не содержит точек M.

Доказать:

8. Замкнутое множество является нигде не плотным тогда и только тогда, когда оно не содержит отрезка.

9. Отрезок нельзя представить как объединение счетного множества нигде не плотных множеств.

10. Множество рациональных чисел нельзя представить как пересечение счетного множества открытых множеств.

11. Множество различных замкнутых подмножеств отрезка имеет мощность континуума.

12 (трудная). Отрезок нельзя представить как объединение счетного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть даны произвольные множества M и G. Говорят, что на множестве M задана *функция* f со значениями в G, если дано правило, сопоставляющее каждому x из M ровно один y из G. Это записывается так: $y = f(x)$ (хотя в этой записи не фигурируют символы множеств M и G, всегда подразумевается, что они заданы). То же самое обозначает фраза «задано отображение $y = f(x)$ множества M в множество G». x называется *аргументом* функции.

Мы будем иметь дело в основном со случаем, когда M, так же как и G, — вся числовая ось или какая-то ее часть, например полупрямая, отрезок, интервал и т. п.

Пусть на множестве M задана функция f со значениями в G. Рассмотрим множество упорядоченных пар $(x; y)$, где x принадлежит множеству M, y — множеству G (это множество называется *декартовым произведением* множеств M и G и обозначается через $M \times G$). В этом множестве рассмотрим подмножество пар вида $(x; f(x))$. Это подмножество называется *графиком* функции $y = f(x)$. Если M и G — множества чисел, график можно изобразить на координатной плоскости x, y. График — это множество, принадлежащее координатной плоскости и обладающее следующим свойством: каждая прямая, параллельная оси y и проходящая через точку x, принадлежащую множеству M, пересекает график ровно в одной точке. Если, наоборот, на координатной плоскости дано множество, обладающее сформулированным свойством, то можно определить функцию, графиком которой является это множество.

Мы уже рассматривали последовательности (чисел и множеств), т. е. объекты, занумерованные натуральными числами. Последовательность — это тоже частный случай функции, именно тот случай, когда M — множество натуральных чисел. Для этого случая применяют специальные обозначения: знак аргумента пишут не в скобках после знака функции, а внизу как индекс: a_k вместо $a(k)$.

Мы будем рассматривать также функции двух и большего числа переменных: $z = f(x, y)$ и т. п.

Пусть $M \times N$ — множество упорядоченных пар $(x; y)$, где x принадлежит множеству M, y — множеству N; пусть P — подмножество $M \times N$. Пусть теперь функция f определена на множестве P: $z = f(r)$, где $r \in P$. В этом случае часто употребляют следующую терминологию: говорят, что функция f имеет два аргумента: x и y, и записывают: $z = f(x, y)$. Аналогично понимается функция трех переменных и т. д.

Значение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ записывается так: $f(x_0)$. $f(x_0)$ — это число, поставленное в соответствие числу x_0 функцией $f(x)$.

ЛИСТОК 17. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Основные факты:

1. Существует такое действительное число $x > 0$, что $x^2 = 2$. Такое число только одно (оно обозначается через $\sqrt{2}$).

2. Для каждого $y > 0$ существует и притом единственное число $x > 0$ такое, что $x^2 = y$ (x обозначается через $\sqrt{y}$).

3. Для каждого натурального n и действительного $y > 0$ существует и притом единственное число $x > 0$ такое, что $x^n = y$. Для каждого нечетного натурального n и любого действительного y существует и притом единственное число x такое, что $x^n = y$. Это x обозначается через $\sqrt[n]{y}$.

Докажите эти теоремы. При этом вам могут помочь следующие вспомогательные задачи.

4. Доказать, что найдется квадрат целого числа, заключенный между числами 1999...9000...0 (девяток 99, нулей 100) и 2000...0 (нулей 199).

5. Доказать, что найдется квадрат целого числа, заключенный между числами 111...1 (1972 единицы) и 999...9 (1971 девятка).

6. Пусть даны числа $a > 0$ и $\delta > 0$. Очевидно, что справедливо равенство: $(a+\delta)^2 - a^2 = 2a\delta + \delta^2$. Это равенство показывает, как меняется квадрат числа, если известно, как меняется само число. Но этим равенством неудобно пользоваться, так как в правой части δ стоит не в первой степени. Это дело можно отчасти исправить: докажите, что найдется такое b и такое $c > 0$, чтобы при всех δ, удовлетворяющих неравенству $0 < \delta < c$, выполнялось неравенство $(a+\delta)^2 - a^2 < \delta b$.

7. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... и последовательность квадратов этих чисел a^2, $(a+\delta)^2$, $(a+2\delta)^2$, ... Доказать, что разности между соседними членами этой последовательности образуют арифметическую прогрессию.

8. Даны числа $a > 0$ и $E > a^2$. В последовательности квадратов, построенной в предыдущей задаче, найдутся два соседних члена M и N такие, что $M \leqslant E$, $N > E$. Доказать, что если мало δ, то мало и $N - M$. Точнее: для всякого $p > 0$ найдется δ такое, что $N - M < p$.

9. Пусть $0 < a < b$. Показать: найдется p такое, что $a < p^2 < b$.

10. Рассмотрим множество M чисел x таких, что $x^2 < 2$. Доказать, что квадрат точной верхней грани этого множества: 1) не может быть меньше двух; 2) не может быть больше двух.

11, 12. Задачи, аналогичные задачам 9 и 10, но для корня произвольной натуральной степени из произвольного $y > 0$.

ЛИСТОК 18. ЗАДАЧИ «ПРО КОРЕНЬ»

1. Изобразить на одном графике в декартовой прямоугольной системе координат следующие функции:

$$y = x,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4,\ y = x^5,\ y = x^{100},$$
$$y = \sqrt{x},\ y = \sqrt[3]{x},\ y = \sqrt[4]{x},\ y = \sqrt[5]{x},\ y = \sqrt[100]{x}.$$

2. Вычислить $\sqrt{0{,}999\ldots9}$ (100 девяток) с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-100}$.

При работе с корнями часто бывают полезны следующие формулы:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}),$$
$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2),$$
$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2).$$

Упражнения на эти преобразования можно встретить во многих задачниках. Вот пример, как с помощью первой из этих формул можно избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

При вынесении выражения из-под знака корня не забывайте, что корень четной степени не бывает отрицательным, так что неверна формула: $\sqrt{a^2}=a$. А формула $\sqrt{a^2}=|a|$ верна при любых действительных a.

3 д. Найти inf разности $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ при всевозможных натуральных k. (В этой задаче сравниваются значения функции $y=\sqrt{x}$ в двух точках числовой оси, отстоящих друг от друга на 1.)

4 д. Найти inf разности $\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}$ при всевозможных натуральных k.

5 д. Доказать, что inf множества чисел вида $\sqrt[k]{k}$ при всевозможных натуральных $k\geqslant 1$ равен единице.

6 д. Доказать, что при всевозможных натуральных k ограничено множество сумм вида

а) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt{k}}$; б) $1+\frac{1}{2\sqrt[100]{2}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt[100]{k}}$.

7 д. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любого x такого, что $0<x<\delta$ выполняется неравенство

$$1+\frac{x}{k+\varepsilon}<\sqrt[k]{1+x}<1+\frac{x}{k}.$$

Уточните график $\sqrt[k]{x}$ вблизи значения $x=1$.

П о я с н е н и е. Правое из этих неравенств есть одна из форм неравенства Бернулли. Его правая часть более удобна для изучения, чем выражение, содержащее корень. Но это неравенство дает оценку для корня только сверху. Хорошо было бы иметь похожую оценку и снизу. Оказывается, это можно сделать, если заменить в знаменателе k на $k+\varepsilon$, но при этом неравенство будет справедливо не при всех x, а только при достаточно малых. Этот факт и выражен в задаче.

ЛИСТОК 19. ИЗМЕРЕНИЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Предварительно приводим конспективное изложение некоторых добавочных геометрических фактов, нужных для решения задач следующего задания, хотя эти вопросы освещены в учебниках (в книжке А. В. Погорелова «Элементарная геометрия. Планиметрия» имеется полное изложение вопроса); приводимое изложение может быть полезным, так как устанавливает определенное понимание терминологии.

Теорема 1. *В треугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин двух других сторон.*

Определения. *Ломаной* называется объединение отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$. Чтобы задать ломаную, достаточно задать последовательность ее вершин: A_1, A_2, ..., A_n. Ломаная называется *замкнутой*, если A_n совпадает с A_1. Ломаная называется *несамопересекающейся*, если у составляющих ее отрезков нет общих точек, кроме вышеперечисленных общих концов. Ломаная называется *выпуклой*, если для каждого ее отрезка вся ломаная лежит по одну сторону от прямой, содержащей этот отрезок. Мы говорим, что множество M *разделяет точки* A и B ($A \notin M$, $B \notin M$), если всякая ломаная, соединяющая A и B, пересекает M. Точечное множество называется *ограниченным*, если существует круг такой, что все множество лежит внутри этого круга.

Теорема 2. *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная L делит плоскость на две части, одна из которых ограничена (эта часть называется внутренней, другая — внешней).*

(«Делит на две части» — это значит: множество всех точек плоскости, кроме точек L, разбивается на два непустых подмножества A и B так, что любые две точки из A можно соединить ломаной, не пересекающей L, и любые две точки из B можно соединить ломаной, не пересекающей L, а всякая ломаная, соединяющая точку из A с точкой из B, пересекает L.)

Определение. Ломаная L_1 ($A_1A_2'A_3' \ldots A_{n-1}'A_n$) называется *объемлющей* для выпуклой ломаной L ($A_1A_2 \ldots A_pA_n$) (у них общие начальные и конечные точки), если обе ломаные лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_n и не существует точек ломаной L_1, принадлежащих внутренней области ломаной $A_1A_2 \ldots A_pA_nA_1$.

Теорема 3. *Ломаная L_1, объемлющая выпуклую ломаную L, имеет длину, не меньшую, чем L. Если L и L_1 не совпадают, то длина L_1 больше длины L.*

Теорема 4. *Пусть окружность разбита точками A и B на две дуги; одна из них — дуга AmB. Пусть точки A_1, A_2, ... A_n дуги AmB разбивают эту дугу на дуги $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, ..., $\overset{\frown}{A_nB}$ так, что любые две дуги не имеют общих точек, кроме, быть может, концов. Тогда ломаная $AA_1A_2 \ldots A_nB$ выпуклая. Наоборот, если вершины выпуклой ломаной лежат на окружности, то они разбивают соответствующую дугу на неналегающие дуги.*

Определение длины дуги окружности. Пусть A и B — точки окружности, AmB — одна из дуг, на которые окружность разбита точками A и B. *Длиной дуги AmB* называется sup множества длин всех выпуклых ломаных, имеющих концы A и B, и остальные вершины на дуге AmB.

1. Длина дуги существует. Доказать.

2. Если дуга AmC разбита на дуги AB и BC, то длина AmC равна сумме длин дуг AB и BC. Доказать.

Рассмотрим лучи OA и OB (O — центр окружности). Объединение лучей OA и OB разбивает плоскость на две части; ту из них, которая содержит дугу AmB, обозначим через M. Рассмотрим множество D ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M точки A и B, и множество K ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M произвольные точки лучей OA и OB.

Докажите:

3. Для каждой дуги L из K найдется дуга из D, которая не длиннее, чем L.

4. Точная нижняя грань множества длин ломаных множества K равна длине дуги AmB.

Очевидно, что длины двух окружностей относятся как радиусы (из подобия всех построений для этих двух окружностей). Поэтому можно утверждать, что длина окружности равна $k \cdot R$, где k одинаково для всех окружностей (R — радиус). Принято писать, что $k = 2\pi$, где $\pi = 3{,}1415926536\ldots$ (доказано, что π — число иррациональное).

Определение радианной меры угла. Пусть дан угол. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в вершине этого угла и дугу этой окружности, для которой данный угол является центральным. Длина этой дуги принимается за радианную меру угла.

Теорема. *Соответствие между радианной и градусной мерой угла задается формулой:*

$$L = \pi \frac{A}{180},$$

где L — радианная мера угла, а A — его градусная мера. Этим результатом разрешается пользоваться без доказательства.

5. Если $0 < x < 2\pi$, то на окружности найдется дуга длины $R \cdot x$. Доказать.

Отображение $t(x)$ числовой прямой на окружность. Пусть O — окружность единичного радиуса с выделенной точкой A и выделенным положительным направлением обхода («против часовой стрелки»); для действительного числа x находим такое целое k, что $2\pi k \leqslant x < 2\pi(k+1)$; дугу длины $x - 2\pi k$ откладываем на окружности от точки A в положительном направлении; ее конец есть точка $t(x)$. (Это отображение иногда называют *экспоненциальным*.)

ЛИСТОК 20. ЗАДАЧИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Доказать:

1. Если $x > 0$, то $\sin x < x$. 2. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $x < \operatorname{tg} x$.

3. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x > 0$. Доказать, что sup множества значений этой функции равен единице.

4. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x > 0$. Найти sup множества ее значений.

5. Пусть a и b — постоянные числа. Рассмотрим функцию аргумента $x : f(x) = a \sin x + b \cos x$. Найти sup множества всех ее значений (при всех x).

Указание. Воспользоваться вспомогательной задачей:

6. Если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то найдется такое число t, что $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7. Нарисовать график функции $y = \sin \dfrac{1}{x}$, определенной при всех x, кроме $x = 0$.

8. Является ли ограниченным множество значений, принимаемых функцией $y = k \cdot \sin k$ при всевозможных натуральных k?

ЛИСТОК 21. КОЛЕБАНИЕ ФУНКЦИИ НА ИНТЕРВАЛЕ

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на каком-либо множестве G*. Рассмотрим множество M всевозможных разностей $f(x_1) - f(x_2)$, где x_1 и x_2 — числа из множества G. *Колебанием функции* $f(x)$ на множестве G называется sup множества M (обозначается через $U(f(x), G)$). Если множество M сверху не ограничено, то говорят, что колебание равно бесконечности.

1. Доказать: $U(f(x), (a; b)) \geqslant 0$ и равно нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ постоянна на (a, b) ($(a; b)$ — интервал $a < x < b$).

2. Доказать:

$$U(f(x), (a; b)) = \sup f(x) - \inf f(x) \text{ на } (a, b).$$

3. Если интервал $(a'; b')$ целиком принадлежит интервалу $(a; b)$, то $U(f(x), (a', b')) \leqslant U(f(x), (a, b))$.

4. $U(f(x), (a; b)) + U(g(x), (a, b)) \geqslant U(f(x) + g(x), (a; b))$.

5. С помощью неравенства предыдущей задачи можно оценить колебание суммы двух функций, если известны колебания слагаемых. Нам нужно получить что-то аналогичное для произведения. Пусть известно, что на (a, b) функция $f(x)$, взятая по модулю, не превышает числа A, а функция $|g(x)|$ — числа B. Тогда
$U(f(x) \cdot g(x), (a; b)) \leqslant U(f(x), (a; b)) \cdot B + U(g(x), (a; b)) \cdot A$.

6. Пусть на интервале $(a; b)$ модуль $f(x)$ всюду больше положительного числа C. Тогда

$$U\left(\frac{1}{f(x)}, (a; b)\right) \leqslant \frac{U(f(x), (a; b))}{C^2}.$$

Примерная контрольная работа

1. Пусть $f(x)$ определена всюду, $(a; b)$ — интервал, $[a; b]$ — отрезок с теми же концами. Доказать, что

$$U(f(x), (a; b)) \leqslant U(f(x), [a; b]).$$

---

* В большинстве предлагаемых задач G есть интервал.

2. Привести пример функции $f(x)$ и отрезка $[a; b]$ таких, чтобы в предыдущей задаче было строгое неравенство.

3. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что для каждого интервала A найдется отрезок B такой, что

$$U(f(x), A) \geqslant U(f(x), B).$$

4. Пусть $f(x)$ определена на $(a; b)$, k — положительное число. Доказать, что

$$U(kf(x), (a; b)) = k\, U(f(x), (a; b)).$$

5. Пусть $f(x)$ определена на всей числовой прямой, p — действительное число. Определим функцию $g(x) : g(x) = f(x + p)$. Дано: $U(f(x), (a, b)) = C$. Указать такой интервал $(m; n)$, чтобы было: $U(g(x), (m; n)) = C$.

6. Задача аналогична предыдущей: $g(x) = f(p \cdot x)$.

7. Пусть M_1 и M_2 — два ограниченных числовых множества, причем известно, что для каждого x из M_1 найдется y из M_2 такой, что $y \leqslant x$. Можно ли утверждать, что: 1) $\inf M_2 \leqslant \inf M_1$; 2) $\inf M_2 < \inf M_1$?

Как изменится ответ, если дано, что для каждого x из M_1 найдется y из M_2 такой, что $y < x$?

ЛИСТОК 22. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

В задачах, где требуется вычислить колебание, нужно еще нарисовать график функции в указанном интервале.

Вычислить:

1. $U(\cos(x^2 + 2x), (0; 3))$.
2. $U(\cos(\sin x), (-5; 5))$.
3. $U(\sin^5 x, (1; \pi))$.
4. $U\left(x + \frac{x}{|x|}, (-3; 3)\right)$.

Замечание. В последней задаче функция не определена в точке $x = 0$, но это не мешает вычислить ее колебание: просто при вычислении нужно выбросить из рассмотрения эту точку и считать, что функция рассматривается на множестве, которое получается выбрасыванием из интервала этой точки. В некоторых дальнейших задачах мы будем понимать колебание на интервале в таком расширенном смысле.

Вычислить:

5. $U\left(\frac{1}{\sin^2 x + 3}, (10; 20)\right)$.
6. $U\left(\sin\frac{1}{x}, \left(\frac{1}{\pi}; +\infty\right)\right)$ (интервал $(a; +\infty)$ — это множество x таких, что $a < x$; аналогично понимается символ $-\infty$ в качестве левого конца интервала).

7. $U\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right],\ (0;\ 5)\right)$. ($[x]$—целая часть x — наибольшее целое, число, которое не больше x; $\{x\}$ — дробная часть x — определяется так: $x - [x]$.)

8. $U\left(\cos\left(x-\frac{1}{x}\right),\ (0;\ 10)\right)$.

9. $U\left(\frac{1}{2+\sin x+\cos x},\ (0;\ 10)\right)$.

10. $U\left(\sin\frac{1}{x},\ \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)\right)$.

11. $U\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x},\ \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right)$.

12. Функция $M(x)$ определяется при всех $x>0$ по формуле $M(x) = U(f(y),\ (0;\ x))$. Найти $U(M(x),\ (1;\ 5))$ (оценить через величины, определяемые через функцию $f(x)$).

ЛИСТОК 23. КОЛЕБАНИЕ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Определение. Пусть даны функция $f(x)$ и точка a числовой оси. Для каждой окрестности D точки a (окрестностью точки a называется всякий интервал, содержащий эту точку) рассмотрим число $U(f(x), D)$. Рассмотрим множество всех таких чисел при различных D. Inf этого множества называется *колебанием функции $f(x)$ в точке a* и обозначается через $U(f(x), a)$.

Уточнение. Если $f(x)$ определена при всех x и для каждой окрестности D точки a существует $U(f(x), D)$ (является числом), то все, что написано в определении, имеет смысл. Но можно требовать меньше и расширить область применимости определения:

1) Пусть функция определена на таком множестве M, что любая окрестность D точки a содержит хотя бы одну точку M. (В этом случае точка a называется *точкой прикосновения* множества M.) Этого достаточно, чтобы для каждой окрестности D можно было говорить о колебании функции на этой окрестности.

2) Если $U(f(x), D)$ для каждой окрестности D точки a не является числом, то будем считать, что колебание $f(x)$ в точке a есть бесконечность. Если же хотя бы для одной окрестности колебание на ней является числом (конечным), то и колебание в точке тоже будет числом.

1. Изменится ли смысл определения, если: 1) брать inf по множеству симметричных относительно a интервалов; 2) заменить интервалы отрезками; 3) заменить интервалы симметричными отрезками?

2. Если $U(f(x), a)$ конечно, то найдется окрестность точки a, в которой функция ограничена.

Определение. Если точка a входит в область определения функции $f(x)$ и $U(f(x), a) = 0$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a**.

---

* Основное определение непрерывности дано в начале параграфа 5, где систематически изучается это понятие.

3 (теорема об инерции знака). *Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность точки a, что всюду в этой окрестности $f(x)$ отлична от нуля и имеет тот же знак, что и в точке a.*

Нарисовать графики и вычислить колебание в указанной точке.

4. $U(\{x\},\ 4)$. **5.** $U(2x\cdot[3-x],\ 1)$. **6.** $U\left(\cos\left(\cos\frac{1}{x}\right),\ 0\right)$.

7. $U(x^2\cdot[x],\ 0)$. **8.** $U((x^2+1)[x],\ 2)$. **9.** $U(x\cdot\sin(1+\mathrm{ctg}^2 x),\ 0)$.

10. $U\left(\dfrac{1}{1+\cos^2\frac{1}{x}},\ 0\right)$. **11.** $U\left(\sin\frac{1}{x},\ 0\right)$. **12.** $U\left(\{x\}+\sin\frac{1}{x},\ 0\right)$.

13. $U(x^2\cdot\sin(\mathrm{ctg}\,x),\ 0)$. **14.** $U\left(x,\ \sin\frac{1}{x},\ 0\right)$. **15.** $U\left(x^2\cdot\cos\frac{2}{x},\ 0\right)$.

16. $U(x^2\cdot[x],\ 2)$. **17.** $U((1+x^2)\cos(\mathrm{ctg}\,x),\ 0)$.

18. Доказать: $U(|f(x)|,\ a)\leqslant U(f(x),\ a)$.

19. Доказать: утверждение «$U(f(x),\ 0)=\infty$» эквивалентно утверждению «$U((f(x))^2,\ 0)=\infty$».

20. Дано: $U(f(x),\ 0)\geqslant 10$. Доказать, что $U((f(x))^3,\ 0)\geqslant 250$.

21. Дано: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, $U\left(f(x),\ \frac{1}{2}\right)=2$. Найти $U(g(x),\ 2)$.

22. Дано: $U(f(x),\ 3)=1$, $g(x)=f(x^2)$. Найти $U(g(x),\ 9)$.

23. Дано: $g(x)=f(2x-1)$, $U(g(x),\ 1)=2$.
Найти $U(2f(x)-1,\ 1)$.

ЛИСТОК 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ a^r ПРИ $a>0$ И РАЦИОНАЛЬНОМ $r>0$

Считается известным (см. листок 17), что для любого $a>0$ и натурального n существует и притом только одно такое число $x>0$, что $x^n=a$. Такое число обозначается через $\sqrt[n]{a}$, или $a^{\frac{1}{n}}$.

Доказать:

1. $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$. **2.** $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$.

3. $(a^m)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$. **4.** $(a^{km})^{\frac{1}{kn}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$.

Определение. $a^r=\sqrt[n]{a^m}$, где $r=\frac{m}{n}$ $(r>0)$.

Казалось бы, мы могли сформулировать это определение до задач 1—4. Но тогда это определение было бы некорректным, так как не исключалась бы зависимость результата от того, как число r представлено в виде дроби. Задача 4 исключает такую возможность.

Доказать:

5. $(a^{r_1})^{r_2}=(a^{r_2})^{r_1}=a^{r_1r_2}$. **6.** $a^{r_1+r_2}=a^{r_1}a^{r_2}$.

7. Пусть $a>1$ и $r_1<r_2$. Тогда $a^{r_1}<a^{r_2}$.

З а д а ч и, в а ж н ы е д л я д а л ь н е й ш е г о.

8. Найти inf множества чисел вида $2^{\frac{1}{n}}$, где n натуральное.

9. Рассмотрим арифметическую прогрессию r, $r+d$, $r+2d$, ... (r и d — положительные рациональные числа). Доказать, что числа a^r, a^{r+d}, a^{r+2d}, ... ($a>1$) образуют геометрическую прогрессию, причем эта прогрессия возрастает и расстояния между ее соседними членами тоже возрастают.

10. Разобьем отрезок [2; 3] на k равных частей, т. е. построим арифметическую прогрессию 2, $2+d$, $2+2d$, ... , которая начинается с 2 и кончается 3. Соответствующая геометрическая прогрессия 2^2, 2^{2+d}, ... начинается с 4 и кончается 8. Доказать, что k можно подобрать так, что расстояние между любыми соседями этой прогрессии будет меньше 0,0001. Указать одно из таких k.

11. Доказать, что для любых трех чисел a, b и c, таких, что $1<b<c$ и $a>1$, найдется рациональное $r>0$ такое, что $b<a^r<c$.

ЛИСТОК 25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ a^x (ПРИ $a>1$ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ $x>0$)

О п р е д е л е н и е. a^x есть sup множества всех чисел a^r, где r — рациональные числа, большие нуля и меньшие x.

1. Доказать, что a^x — возрастающая функция от x (при $a>1$, $x>0$) (т. е. из неравенства $x_1<x_2$ следует $a^{x_1}<a^{x_2}$).

Для рациональных x мы сейчас имеем два определения a^x (листки 24 и 25).

2. Доказать, что новое определение для случая рационального x дает тот же результат, что и старое определение, т. е. что a^r равно sup множества a^{r_1} при всевозможных положительных r_1, меньших r.

Доказать:

3. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ (при $a>1$, $x>0$, $y>0$).

4. $(a^x)^y=a^{xy}$ (в тех же предположениях).

5. Нарисовать графики функций 2^x и 10^x при $x>0$.

ЛИСТОК 26. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФУНКЦИИ a^x НА ЛЮБОЕ $a>0$ И ЛЮБОЕ x

Пусть $a>1$. Положим $a^0=1$. При $x<0$ положим $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$. Тем самым функция a^x при $a>1$ определена при всех x. Положим $1^x=1$ при всех x. Пусть $0<a<1$. Положим $a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ при любом x. Тем самым функция a^x определена при любом $a>0$ и любом x. Функция a^x называется показательной функцией или *экспонентой*.

1. Доказать, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ при $0 < a < 1$ и любом x.

2. Доказать, что при любом a функция a^x монотонна при всех x. (Функция $f(x)$ называется *возрастающей*, если для любых x и y из области определения из неравенства $x < y$ следует неравенство $f(x) < f(y)$. Функция $f(x)$ называется *неубывающей*, если из неравенства $x < y$ следует неравенство $f(x) \leqslant f(y)$. *Убывающая* и *невозрастающая* функции определяются аналогично. Функция, относящаяся к одному из четырех описанных видов, называется *монотонной*.)

Доказать:

3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. 4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

5. $(ab)^x = a^x b^x$ (при любых $a > 0$, $b > 0$ и любом x).

6. Пусть $0 < a < b$, $x > 0$. Доказать: а) $a^x \leqslant b^x$; б) $a^x < b^x$.

7. Доказать: для любого $y > 0$ найдется и притом только одно x такое, что $a^x = y$.

8. Нарисовать графики функции a^x при $a = 0{,}1$; $0{,}5$; 2; 10.

9. Если функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, монотонна и для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, то f есть показательная функция a^x, где $a = f(1)$.

ЛИСТОК 27. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $y = f(x)$ — функция, заданная на множестве M со значениями в множестве G.

Определения. 1. Рассмотрим произвольное подмножество N множества M (в частности, N может совпадать с M). Через $f(N)$ обозначается подмножество множества G, определяемое правилом: y входит в $f(N)$, если существует x из множества N такой, что $f(x) = y$. Множество $f(N)$ называется *образом множества* N при отображении f. Множество $f(M)$ называется *областью значений функции* f.

2. Для каждого y из множества G через $f^{-1}(y)$ обозначается множество всех таких x из множества M, что $f(x) = y$. Это множество называется *полным прообразом* элемента y при отображении f. Если N — произвольное множество, то через $f^{-1}(N)$ обозначается множество таких x из M, что $f(x)$ входит в N, $f^{-1}(N)$ называется *полным прообразом множества* N при отображении f.

3. Функция $x = g(y)$, определенная на множестве $f(M)$ и такая, что каждому y из множества $f(M)$ поставлен в соответствии один определенный (для этого y) элемент x из множества M такой, что $f(x) = y$, называется *обратной* к функции $y = f(x)$. Если функция $f(x)$ такова, что полный прообраз каждого элемента y множества $f(M)$ состоит ровно из одного элемента, то обратную функцию можно обозначать через $x = f^{-1}(y)$.

4. Функция $y = f(x)$ называется *взаимно однозначным соответствием* множеств M и G, если полный прообраз каждого y из множества G непуст и состоит ровно из одного элемента.

1. M — вся числовая прямая, G — отрезок $[-1; +1]$, $y = f(x) = \sin x$. Найти $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(A)$, где A — интервал $-0,5 < x < 0,5$.

2. Пусть g — функция, обратная к f. Доказать, что для любого x из множества $f(M)$ $f(g(x)) = x$.

3. Верна ли теорема: если g — функция, обратная к f, то для любого x из множества M $g(f(x)) = x$?

4. Рассмотрим функцию $y = f(x) = x^2$ на всей числовой прямой. Найдите такое числовое множество N, чтобы выполнялись два условия: 1) $f(N)$ есть полупрямая $y \geqslant 0$; 2) если рассматривать функцию $f(x)$ только на этом множестве, то обратная функция $x = g(y)$ определяется однозначно. Приведите пример трех таких множеств N.

5. Если обратная функция определяется однозначно, то $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех x из множества M.

6. Пусть $y = f(x)$ — взаимно однозначное соответствие числовых множеств M и G $(x \in M, y \in G)$. Доказать, что график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при симметрии относительно биссектрисы первого координатного угла в декартовой системе координат xOy.

7. Построить графики функций, указывая области определения и области значений:

1) $y = x^a$ при $a=1, 2, 3, 4, 100, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{100}$, 0 и при всех этих же значениях со знаком «—».

2) a^x при $a = 2; 3; 10; 0,5; 0,1$.

Укажите, какие из этих функций взаимно обратны.

Контрольные задачи

1. Нарисовать графики функций $y = 2^{-|x|}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$.

2. Решить неравенство $x^y > 1$. (Область определения функции двух переменных $f(x, y) = x^y$ есть полуплоскость $x > 0$, y любое).

3. Доказать: если $f(x)$ определена на некотором подмножестве M числовой оси и строго монотонна (т. е. возрастающая или убывающая), то обратная функция определяется единственным образом и строго монотонна.

4. При каких a функция $y = x + ax^2$, рассматриваемая на всей числовой прямой, имеет единственную обратную?

5. При каких a функция $y = 2^x + ax$ монотонна на всей числовой прямой?

6. При каких a функция $y = x^3+ax^2$ монотонна на всей числовой прямой?

7. $f(x) = x^2 + kx$. Каким должно быть k, чтобы полный прообраз интервала $(-1; 1)$ был интервалом? Дать описание всех таких k.

8. Доказать, что функция $y = a^x$ есть слабо выпуклая (см. листок 2) функция на всей числовой прямой.

ЛИСТОК 28. ЛОГАРИФМЫ

Определение. Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, называется логарифмом и обозначается $\log_a y$ (читается: логарифм y по основанию a). (Функция a^x рассматривается в листках 24—26.)

Из задач предыдущих листков следует, что областью определения логарифма является полупрямая $y > 0$, причем функция определена однозначно.

1. Построить графики: $y = \log_{0,1} x$, $y = \log_{0,5} x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$.

В задачах 2—4 x, y, a, b положительны, причем $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Доказать:

2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. 3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

4. $\log_a x^c = c \log_a x$, в частности $\log_a a^x = x$.

5. $a^{\log_a x} = x$.

6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \cdot \log_b x$ (формула перехода к другому основанию).

7. Доказать, что если координатную плоскость, на которой нарисован график логарифмической функции, сжать к оси y в c раз, то это равносильно тому, чтобы сдвинуть этот график параллельно оси y.

8 д. Доказать, что если функция $y = f(x)$ определена при всех $x > 0$, монотонна, $f(a) = 1$ $(a > 0)$ и при всех положительных x и y $f(xy) = f(x) + f(y)$, то $f(x) = \log_a x$.

ЛИСТОК 29. ЗАДАЧИ НА ЛОГАРИФМЫ

1. Вычислить $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$, $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$, $\log_{5\sqrt{5}} \frac{1}{5}$, $9^{\log_3 8}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 11}$.

2. Доказать: а) $\log_a x$ $(a > 1)$ есть слабо вогнутая функция (определение слабо вогнутой функции получается из определения слабо выпуклой функции заменой знака «$<$» на знак «$>$»); б) $\log_a x$ $(a < 1)$ есть слабо выпуклая функция.

3. Нарисовать график функции $y = \frac{\log_2 x}{x}$ при $x > 0$. Найти inf множества значений этой функции при $x > 2$.

4. Тот же вопрос для функции $y = \frac{\log_2 x}{\sqrt[10]{x}}$.

5. При каких k функция $kx + \log_a x$ монотонна в области $x > 0$? Рассмотреть случаи $a > 1$, $a < 1$.

ЛИСТОК 30. О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой*, если для любых a и b из области определения выполняется условие: если соединить точки графика $(a; f(a))$, и $(b; f(b))$ отрезком D, взять точку x из области определения, лежащую между a и b, провести через точку x прямую, параллельную оси y, и взять точку пересечения M этой прямой с отрезком D, то ордината точки M будет больше $f(x)$. (Функция называется вогнутой, если «... ордината точки M будет меньше $f(x)$».)

Это определение отличается от определения слабо выпуклой (слабо вогнутой) функции тем, что здесь значения функции в точках a и b сравниваются со значениями в любой внутренней точке отрезка $[a, b]$, а не только в его середине.

1. Доказать, что если функция $f(x)$ определена на связной части числовой оси (т. е. на всей числовой прямой, на полупрямой, на отрезке, интервале или полуинтервале), слабо выпукла и монотонна, то она выпукла.

До сих пор мы имели утверждения о слабой выпуклости (вогнутости) следующих функций: $y = x^2$, $y = x^2 + px + c$ (задача 6 листка «Неравенства»), $y = a^x$ (задача 8 из контрольных задач листка 27) и $y = \log_a x$ (задача 2 из листка 29). На основании задачи 1 эти функции выпуклы (вогнуты) на своей области определения.

2. Доказать, что выпуклая функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

3. Доказать неравенство: $k! > k^{\frac{k}{2}}$ $(k > 2)$.

ЛИСТОК 31. ЗАДАЧИ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

1. Найти sup и inf последовательности $\frac{2k-1}{k^2+1}$.

2. Найти sup и inf последовательности $\frac{k}{2^k}$.

3. Найти sup и inf последовательности $\frac{2^k}{k!}$.

4. Найти inf последовательности $\frac{\log_2 k}{k}$ $(k > 2)$.

Определение. *Колебанием числовой последовательности* A называется sup множества всевозможных разностей $a_k - a_p$ (k и p — всевозможные натуральные числа). Обозначение: $U(A, 0)$.

(Если множество этих разностей не ограничено сверху, то колебание последовательности равно бесконечности.)

Пусть A — последовательность. Отбросим k первых ее членов. Колебание оставшейся последовательности обозначим через $U(A, k)$. Inf множества всех чисел $U(A, k)$ (при всевозможных натуральных k) называется *колебанием последовательности A на бесконечности* и обозначается через $U(A, \infty)$. Если $U(A, k) = \infty$ при каждом k, то считаем, что $U(A, \infty) = \infty$.

5. Найти колебание на бесконечности для последовательностей из задач 1—4.

6. Что можно сказать о колебании на бесконечности для последовательности, про которую известно, что она монотонна и ограничена?

7. Доказать, что из каждой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность (неубывающую или невозрастающую).

8. Доказать, что последовательность $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ возрастает.

9. Дано: $b_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}$ для любого k и $|a_k| < 1$. Доказать, что $U(\{b_k\}; \infty) = 0$.

ЛИСТОК 32. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (АРКФУНКЦИИ)

Обозначения. Если $f(x) = y = \sin x$, то $f^{-1}(y)$, т. е. полный прообраз числа y, обозначается обычно через $\operatorname{Arcsin} y$. Соответствующие обозначения для других тригонометрических функций: $\operatorname{Arccos} y$, $\operatorname{Arctg} y$ и $\operatorname{Arcctg} y$.

Определения. Рассматриваем функцию $y = \sin x$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. На этом отрезке $\sin x$ возрастает и поэтому принимает каждое значение только один раз. Следовательно, обратная функция определяется однозначно. Она обозначается так: $x = \arcsin y$.

Функцию $y = \cos x$ рассматриваем на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Обратную функцию для нее обозначаем так: $x = \arccos y$.

Функцию $y = \operatorname{tg} x$ рассматриваем на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Обратную функцию обозначаем так: $x = \operatorname{arctg} y$.

Функцию $y = \operatorname{ctg} x$ рассматриваем на интервале $0 < x < \pi$. Обратную функцию обозначаем так: $x = \operatorname{arcctg} y$. $\arcsin x$ называется главным значением $\operatorname{Arcsin} x$ (аналогично для других функций).

Из всего, что до сих пор сказано о функции $y = \sin x$, непосредственно следует, что она принимает все значения от -1 до 1. Без этого мы не можем утверждать, что функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. То же самое можно сказать и о других аркфункциях. Это требуется доказывать.

(Для доказательства существования какой-то точки можно пользоваться тем фактом, что на прямой от данной точки в данном направлении можно отложить отрезок данной длины.)

1. На оси y внутри тригонометрического круга возьмем точку. Проведем через нее прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает круг в двух точках. Доказать.

2. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой прямой. Доказать.

3. Построить графики всех четырех аркфункций.

4. Построить график функции $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ и сравнить с графиком функции $y = \operatorname{arctg} x$.

5. Доказать равенства: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

6. Доказать тождество:

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1).$$

7. Верна ли формула:

$$\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}?$$

Как правильно связать эти величины?

8. $\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \cdot \arcsin x + \pi k$ (k — любое целое),
$\operatorname{Arccos} x = \pm\arccos x + 2\pi k$ (k — любое целое),
$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi k$ (k — любое целое),
$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi k$ (k — любое целое).

($\operatorname{Arcsin} x$ с большой буквы — полный прообраз числа x при отображении $x = \sin y$; $\arcsin x$ с маленькой буквой — главное значение этого полного прообраза.)

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛ

ЛИСТОК 33. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором числовом множестве M, содержащем x_0. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого x, принадлежащего множеству M, из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Это классическое определение непрерывной функции. Его автором является Коши.

Формальное замечание. Слову «следует» классическая традиция придает следующий точный смысл: утверждение «из A следует B» считается верным в двух случаях: 1) если A неверно или 2) B верно (это «или» не исключающее, т. е. случай «A неверно и B верно» учтен и в 1) и в 2)), и неверным лишь если A верно и B неверно. При этом не требуется никакой смысловой связи между A и B. Так что утверждение «если снег черен, то $2 \cdot 2 = 5$» считается истинным. Для правильного употребления определения непрерывности необходимо умение понимать его буквально.

1. Доказать эквивалентность этого определения и определения из задания «Колебание функции в точке».

Следующие две задачи желательно сделать, исходя из нового определения непрерывности (сравните с задачами 2 и 3 листка 23).

Доказать:

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то найдется окрестность точки a такая, что в этой окрестности $f(x)$ есть ограниченная функция.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность точки x_0 такая, что всюду в этой окрестности (конечно, только в тех точках, где $f(x)$ определена) $f(x) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

ЛИСТОК 34. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

Если задачи этого листка покажутся вам трудными, порешайте сначала задачи из следующих трех листков, а затем возвращайтесь к этому листку. Доказать:

1. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то найдется точка c, принадлежащая отрезку $[a; b]$, такая, что $f(c) = 0$.

Другая формулировка: если $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в каждой его точке, и E — число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется точка c отрезка $[a; b]$ такая, что $f(c) = E$.

2. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в каждой его точке, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ (т. е. существует число c такое, что для каждого x отрезка $[a; b]$ $|f(x)| < c$.

3 (теорема о достижении максимума). В условиях предыдущей задачи существует точка x_0 отрезка $[a; b]$ такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всякого x из отрезка $[a, b]$. (Такая точка x_0 называется точкой максимума; верна, конечно, и аналогичная теорема о минимуме.)

4. Доказать, что в задачах 1, 2, 3 все данные существенны, т. е., отбросив хотя бы одно из условий, мы получим неверное утверждение.

Указание. Для решения задач 1, 2, 3 можно пользоваться следующими фактами: 1) всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань (см. листок 10, основная теорема) или 2) система вложенных отрезков имеет общую точку (задача 6 из задания «Следствия аксиомы полноты», листок 9).

Применение утверждения 2 основано на том, что мы рассматриваем такое свойство, которое, если оно верно для некоторого отрезка, верно и хотя бы для одной из его половин.

Попробуйте сделать задачи 1, 2 и 3 двумя способами, используя факты 1 и 2.

ЛИСТОК 35. РАЗРЫВНОСТЬ

Определение. Функция называется разрывной в точке x_0, если x_0 входит в область определения функции и при этом функция не является непрерывной в точке x_0.

1. Привести пример функции, определенной при всех x, разрывной в точках вида $x = \frac{1}{R}$ (R натуральное), а в остальных точках непрерывной (в том числе в точке $x = 0$).

2. Привести пример функции, определенной при всех x и разрывной во всех точках.

3. Привести пример функции, определенной при всех x и непрерывной ровно в одной точке (а в остальных точках разрывной).

4. Доказать, что не существует монотонной функции, разрывной во всех иррациональных точках.

5 д*. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных точках и непрерывной во всех иррациональных.

6 д. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных, непрерывной во всех иррациональных точках и притом монотонной*.

---

* Ответом к задаче 5 д является общеизвестная функция Римана (если x — иррациональное число, то $y = 0$; если x есть несократимая дробь p/q, то $y = 1/q$. Но такой ответ не лучше и не проще многочисленных ответов, которые самостоятельно придумывают учащиеся. Вот, например, один из возможных ответов. Пусть M — счетное множество точек числовой прямой, например множество рациональных чисел. Рассмотрим какую-нибудь нумерацию его элементов: $x_1, x_2 \ldots$. Теперь положим $y(x_k) = 1/k$. В остальных точках положим $y = 0$. Если ученик дал такое решение задачи 5 д, то задача 6 д не вызовет у него затруднений; ее можно и не задавать, так как она не несет в себе ничего особенно интересного. Но если ученик каким-то образом узнал о функции Римана и дал ее в качестве ответа на задачу 5 д, то эта задача для него не была задачей, она ничего не дала. Такому ученику приходится дать задачу 6 д, и она для него, как правило, будет очень трудной. Эта трудность — расплата за попытку, может быть невольную, жить чужим умом. Задачу 6 д я нигде не встречал. Видимо, можно быть уверенным, что в распространенных руководствах ее нет, так что решить эту задачу учащиеся могут только самостоятельно.

Логические упражнения

7. Дайте «на языке $\varepsilon - \delta$» определение функции, разрывной в точке x_0, не употребляя отрицаний. (Дать два ответа: исходя из старого и из нового определений непрерывности.)

8. Если в новом определении непрерывности не требовать, чтобы ε было больше нуля (т. е. «... для любого действительного числа ε найдется $\delta > 0$ такое, что ...»), какие функции окажутся «непрерывными» согласно этому определению?

9. Аналогичный вопрос про условие $\delta > 0$.

ЛИСТОК 36. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ

Доказать:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Функция $f(x) + g(x)$ определена для тех x, которые входят одновременно в область определения обеих функций $f(x)$ и $g(x)$. Из условий задачи следует во всяком случае, что $f(x) + g(x)$ определена в точке x_0. Решая задачу, можете считать (если это вам проще), что обе функции определены в некоторой окрестности точки x_0. (Это замечание относится и к задаче 2, только нужно исключить из рассмотрения точки x, где $g(x) = 0$.)

3 (теорема о непрерывности суперпозиции). Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x)$ непрерывна в точке $g(x_0)$, то функция $r(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Функция $r(x)$ называется *суперпозицией* функций f и g ($r(x)$ определена для всякого такого x_0, что: 1) $g(x_0)$ определена и 2) $f(g(x_0))$ определена. Если это вам проще, считайте, что $g(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а $f(x)$ — в некоторой окрестности точки $g(x_0)$.)

4. Если возрастающая (или убывающая) функция $y = f(x)$, определенная на отрезке A, непрерывна, то функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $f(A)$.

5. Если $f(x)$ — неубывающая (или невозрастающая) функция, заданная на отрезке, и известно, что она пробегает все промежуточные значения (т. е. из неравенства $f(a) < c < f(b)$ следует, что найдется x_0 такое, что $a < x_0 < b$ и $f(x_0) = c$), то $f(x)$ непрерывна на этом отрезке.

ЛИСТОК 37. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Доказать непрерывность следующих функций:

1. $y = x^2$ $\left(\text{в точке } x = \frac{3}{2}\right)$.

(Указать правило, как по ε найти δ.)

2. $y = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ $(x \in R)$. 3. $y = \sqrt[k]{x}$ $(x > 0)$.

4. $y = x^r$, где $x > 0$ и r — рациональное положительное число. Доказать непрерывность $y = x^r$ для случая $r < 0$.

5. $y = a^x$ ($a > 1$, x — любое действительное число).

6. $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

7. $y = x^a$, где a — действительное число, $x > 0$.

8. $y = \sin x$ (x — любое действительное число).

9. $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ $(x \in Dy)$.

10. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ $(x \in Dy)$.

Индуктивное определение элементарной функции

1) Элементарными функциями являются константы $y = c$, функции $y = a^x$ $(a > 0)$, $y = \sqrt[r]{x}$ (r — нечетное, x — любое), $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$.

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, то $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$ — элементарные функции.

Это определение нужно понимать так: функция $f(x)$ является элементарной, если, исходя из функций, элементарных в силу пункта 1, можно прийти к данной функции с помощью конечного числа шагов, на каждом из которых применяется одна из операций пункта 2 к функциям, элементарность которых уже установлена.

11. Проверьте, что все функции задач 1—10 элементарные.

12. Доказать, что все элементарные функции непрерывны при всех x, при которых они определены.

ЛИСТОК 38. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Функция $r(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать, что функция $f(x) = |r(x)|$ непрерывна в точке x_0.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Доказать, что функция $F(x) = \max(f(x), g(x))$ непрерывна в точке x_0.

3. Функция $f(x)$ непрерывна на всей прямой. Определим следующую функцию $s(x)$. Пусть $k > 0$ — фиксированное число. Положим $s(x) = f(x)$, если $|f(x)| \leqslant k$; $s(x) = k$, если $f(x) > k$, и $s(x) = -k$, если $f(x) < -k$. Доказать, что функция $s(x)$ всюду непрерывна.

4. Функция $f(x)$ разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что функция $(f(x))^2$ разрывна в точке x_0?

5. $f(x) = r(x) + k(x)$. Функция $r(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в этой точке. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

6. $f(x) = r(x) + k(x)$. Функции $r(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

7. $f(x) = r(x) \cdot k(x)$. Функция $r(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в x_0. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

8. $f(x) = r(x)\,k(x)$. Функции $r(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

9. Пусть $f(x)$ определена на всей числовой прямой и такова, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 0{,}5|x_1 - x_2|$ для любых x_1 и x_2.

Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно один корень.

10. Сколько решений имеет уравнение $\sin x = \dfrac{x}{100}$?

11. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке и $f(x) = f(2x)$ для любых x, то $f(x) = f(0)$.

12. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке и $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых x и y, то для любого x $f(x) = x \cdot f(1)$.

13. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке и $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ для любых x и y, то $f(x) = f(1)^x$.

14 д. Если $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и $f(0) = f(1)$, то для всякого $d = \dfrac{1}{k}$ (натуральное $k > 1$) найдется пара чисел x, y такая, что $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, $y = x + d$, $f(x) = f(y)$. Если же d не имеет вид $\dfrac{1}{k}$, то утверждение неверно.

15 д. Пусть $f(x)$ непрерывна, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(f(x)) = x$. Доказать, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ $f(x) = x$.

Методическое замечание. Я считаю допустимым и полезным в самостоятельных работах (и даже в не очень ответственных контрольных работах) предлагать доказывать некоторые неверные утверждения. Если этого не делать, у некоторых учащихся могут укрепиться ложные методы решения задач, основанные на излишнем доверии к предложенной формулировке. Не говоря уже о том, что сама жизнь часто предъявляет неверные формулировки, они против воли попадаются иногда и в обучении и даже на вступительных экзаменах в вузы. Жалко смотреть на ученика, который из-за опечатки потерял все время на попытки доказательства неверного утверждения и не попытался его опровергнуть. В настоящем сборнике все неверные утверждения, предлагавшиеся учащимся, сформулированы правильно; исключение сделано только в вышеприведенном списке контрольных задач.

ЛИСТОК 39. СВЯЗЬ С МНОЖЕСТВАМИ

1. Пусть функция $f(x)$ определена на всей прямой (или на отрезке) и непрерывна всюду на этом множестве, C — некоторое число. Доказать: множество точек, в которых значение этой функции меньше C, открыто, а множество точек, в которых значение больше или равно C, замкнуто (открытость и замкнутость по отношению к области определения).

2. Пусть функция $f(x)$ определена на всей прямой или на отрезке, E — некоторое число. Доказать: множество точек x таких, что $U(f(t), x) < E$, есть открытое множество (открытое по отношению к области, на которой задана функция).

3. Вспомогательная теорема. Пусть A — отрезок, а C — такое множество интервалов, что каждая точка отрезка A принадлежит некоторому интервалу из C (такое множество интервалов называется *покрытием* отрезка A). а) Доказать: существует конечное подмножество C_1 множества C такое, что каждая точка отрезка A принадлежит одному из интервалов множества C_1 (множество C_1 называется конечным подпокрытием отрезка A).

б) Верна ли эта теорема, если заменить отрезок интервалом? Интервалы отрезками?

Попробуйте применить задачи 1 и 2 к доказательству теорем листка 34.

4. Функция называется ограниченной в точке a, если существует окрестность точки a, в которой функция ограничена. Доказать, что множество точек, в которых функция неограничена, замкнуто.

5. Доказать: если функция определена на отрезке и ограничена в каждой его точке, то она ограничена на отрезке.

6. Доказать: множество точек непрерывности любой функции, заданной на всей числовой прямой, можно представить как пересечение счетного числа открытых множеств. (Множество точек разрыва — как объединение счетного числа замкнутых.)

7. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать: если для всякого C множество таких x, что $f(x) > C$, открыто, и множество таких x, что $f(x) < C$ тоже открыто, то $f(x)$ непрерывна.

8. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

ЛИСТОК 40. ПРЕДЕЛ

Пусть функция $f(x)$ определена на числовом множестве M, x_0 — предельная точка множества M (т. е. любая окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из M).

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (обозначение: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого x из M, отличного от x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. Мы не придаем самостоятельного смысла словам «x стремится к x_0» или «предел функции $f(x)$». Смысл имеет только все сочетание слов: «предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0» — и этот смысл высказан в вышеприведенном определении.

Связь понятий непрерывности и предела видна из следующих утверждений.

1) Если x_0 — предельная точка для множества M, на котором определена функция $f(x)$, и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Если точка x_0 входит в область определения функции $f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. (Убедитесь в этом сравнением определения предела и классического определения непрерывности.)

Определение. Число A называется *пределом последовательности* f_k, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что из неравенства $k > N$ следует неравенство $|f_k - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{k} f_k$ или $A = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

Пусть M — подмножество прямой, не ограниченное сверху, $f(x)$ — функция, определенная на M.

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к плюс бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число δ, что для всякого x из M, которое больше δ, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Пусть $f(x)$ определена на множестве M и x_0 — предельная точка M.

Определение. Говорят, что бесконечность (без знака) является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любого ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого x из M, для которого $|x - x_0| < \delta$ (кроме $x = x_0$), $|f(x)| > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

1. Рассмотрим запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Символу a будем придавать один из четырех смыслов: 1) a есть число; 2) $a = \infty$; 3) $a = +\infty$; 4) $a = -\infty$.

Символу A также будем придавать эти четыре смысла. Произвольно комбинируя указанные четыре смысла a с четырьмя смыслами A, получим 16 понятий (в том числе 3 уже известных). Дайте определение каждому из них (через ε, δ).

2. Примем сокращения: Л — «для любого», Н — «найдется... такое, что ...».

Рассмотрим условия:

1) Л $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$;
2) Л $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
3) Л $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$;
4) Л $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
5) Л $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$;
6) Л $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
7) Л $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$;
8) Л $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
9) Н $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$;

10) Н $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
11) Н $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$;
12) Н $\varepsilon > 0$ Л $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
13) Н $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$;
14) Н $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$;
15) Н $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$;
16) Н $\varepsilon > 0$ Н $\delta > 0$ Н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$.

Среди указанных условий найдите определения знакомых вам понятий и их отрицания. Про каждое из остальных условий скажите, что оно означает.

Составьте квадратную таблицу, у которой 16 строк, занумерованных числами 1—16, и 7 столбцов, занумерованных числами 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16. На пересечении k-й строки и n-го столбца поставьте 1, если из k-го условия следует n-е условие и нуль в противном случае. В случае «1» вы должны уметь дать доказательство, а в случае «0» — привести пример.

ЛИСТОК 41. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ

Определение. Пусть x_0 — предельная точка множества M, на котором определена функция $f(x)$. Для каждой окрестности U точки x_0 рассмотрим множество всех значений функции $f(x)$ на этой окрестности, за исключением значения $f(x_0)$. Рассмотрим sup этого множества; обозначим его через T_U. Inf множества T_U при всевозможных окрестностях U точки x_0 называется *верхним пределом* функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, и обозначается: $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$.

Если для каждой окрестности U точки x_0 $T_U \to +\infty$, то $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = +\infty$. Если множество T_U содержит хотя бы одно число (не плюс бесконечность) и не ограничено снизу, то $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = -\infty$.

Аналогично определяется нижний предел $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$.

1. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела последовательности.

2. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела функции при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

3. Пусть x_0 — предельная точка множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M (иначе мы исключаем из рассмотрения значение $f(x_0)$). Тогда, если $U(f(x), x_0) \neq \neq \infty$, то $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ существуют (являются числами) и $U(f(x), x_0)$ равно их разности.

4. Аналогичная теорема о колебании последовательности.

ЛИСТОК 42. КРИТЕРИЙ КОШИ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

1. *Пусть точка x_0 — предельная для множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M. Тогда для того, чтобы существовал (конечный) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:* $U(f(x), x_0) = 0$.

2 (вторая формулировка критерия Коши). *Пусть x_0 — предельная точка множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M. Тогда для того, чтобы существовал (конечный) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что для любых x_1 и x_2, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенствам $|x_1 - x_0| < \delta$ и $|x_2 - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Определение. Последовательность a_k называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что для любых k и p, больших N, $|a_k - a_p| < \varepsilon$.

3 (критерий Коши для последовательности). Доказать: для того чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

4 (другая формулировка критерия Коши для последовательности). Доказать: для того чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы ее колебание на бесконечности было равно нулю.

5. $a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Доказать, что последовательность a_k фундаментальная.

ЛИСТОК 43. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ОПЕРАЦИЯХ

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (тогда и их сумма определена в этой окрестности).

а) Доказать: если существуют (конечные) пределы $f(x)$ и $g(x)$ при x, стремящемся к x_0, то функция $f(x) + g(x)$ имеет (конечный) предел при x, стремящемся к x_0, и этот предел равен сумме пределов $f(x)$ и $g(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для произведения и частного.

в) Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для предела функции при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

2. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы (см. задачу 1) о пределах последовательностей.

3. а) Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$. Тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))$ существует и равен $f(x_0)$.

б) Сформулируйте и докажите теорему, аналогичную предыдущей: 1) для случая, когда $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = x_0$; 2) для случая, когда $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

4. а) Рассмотрим функцию $f(x) = a(x)^{b(x)}$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = a_0 > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = b_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $a_0^{b_0}$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для случаев, когда $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = a_0$, $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = b_0$, когда a_k есть последовательность и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_0 > 0$ и т. п.

ЛИСТОК 44. ЗАДАЧИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ — последовательность. Если из нее вычеркнуть часть членов, так что их останется все-таки бесконечное число, а остальные перенумеровать, сохраняя порядок и так, чтобы номера шли без пропусков, то полученная последовательность называется *подпоследовательностью* данной последовательности.

1. Если последовательность x_k имеет предел, то и всякая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

2. Если последовательность x_k имеет предел A, то и последовательность y_k, полученная из последовательности x_k перенумерацией, имеет предел A (перенумерация — взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на себя).

3. Если последовательность x_k ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность («сходящуюся» — значит имеющую предел).

Рядом называется формальная запись, имеющая вид бесконечной суммы: $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$. Число c называется *суммой ряда*: $c = a_1 + a_2 + \ldots$, если последовательность частичных сумм этого ряда: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $b_k = a_1 + \ldots + a_k$ имеет пределом число c. В этом случае ряд называется *сходящимся*.

4. Доказать, что ряд $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$ ($|r| < 1$) сходится. Найти его сумму. Доказать, что бесконечная периодическая дробь есть изображение рационального числа. Найти это число.

5. Доказать, что ряд $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$ сходится. Найти его сумму с точностью до 0,1.

Это число обозначается через e (число Эйлера).

6. Доказать, что e — иррациональное число.

7. Доказать, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ имеет предел.

8 (трудная). Доказать, что этот предел равен e.

ЛИСТОК 45. НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

В задачах этого листка понятия непрерывности и предела функции выражаются через понятие предела последовательности.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если x_k — последовательность, сходящаяся к x_0 (т. е. имеющая пределом x_0), то, начиная с некоторого k, $f(x_k)$ имеет смысл и можно говорить о пределе последовательности $f(x_k)$.

1. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности x_k, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_k)$ сходилась к $f(x_0)$.

2. Доказать, что в предыдущей задаче достаточно требовать, чтобы последовательность $f(x_k)$ сходилась (не указывая, что к $f(x_0)$).

3. Доказать: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в том и только в том случае, если для любой последовательности x_k, имеющей пределом x_0, но не принимающей значение x_0, последовательность $f(x_k)$ имеет пределом число A.

4. Пусть функция $f(x)$ определена при всех x, бо́льших некоторого a. Доказать: $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если для любой последовательности x_k, имеющей пределом $+\infty$, последовательность $f(x_k)$ имеет пределом число A.

5. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для других случаев предельного перехода (при x, стремящемся к минус бесконечности, и т. п.; перечень этих случаев — в задаче 1 задания «Предел», листок 40).

6. Попробуйте доказать теоремы о непрерывных функциях (задачи 2 и 3 задания «Теоремы о непрерывных функциях» (листок 34), используя задачу 3 (листок 44, «Задачи на последовательности») и новое определение непрерывности.

ЛИСТОК 46. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Во всех задачах этого листка требуется не только найти предел в предположении, что он существует, но и доказать существование. Задачи на нахождение предела дроби, когда числитель и знаменатель оба стремятся к нулю или к бесконечности, называются задачами на раскрытие неопределенностей вида «нуль делить на нуль» или «бесконечность на бесконечность».

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^{10} \cdot (3x+2)^{20}}{(x-1)^{30}}$. **2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)(2+x)(3+x)-6}{x}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100}-1}{x-1}$. **4.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k}$

(в зависимости от p, k, a_0 и b_0; a_0 и b_0 отличны от нуля).

5. Предел отношения двух многочленов при $x \to 0$ (в зависимости от коэффициентов).

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Нарисовать график функции $\frac{\sin x}{x}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$. **9.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x^d}$ $(d > 0)$. **10.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (нарисовать график).

12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ (нарисовать график).

ЛИСТОК 47. ПРЕДЕЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЭКСПОНЕНТОЙ

1. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = a > 1$. Если при этом:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} b(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} a(x)^{b(x)} = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} b(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} a(x)^{b(x)} = +\infty$.

Вычислить пределы:

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$. **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x}$ (в зависимости от a и k, $a > 1$).

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^d}$ (в зависимости от a и d, $d > 0$).

5. Доказать: $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

6. Доказать: $\lim\limits_{k} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = e^x$.

7. Вычислить: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x}$ (r — рациональное число).

Указание: воспользоваться задачей № 3 листка 46.

9 д. Доказать: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$.

10 д. Вычислить: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

11 д. Вычислить: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_e (1+e^x)}{x}$ (логарифм x по основанию e называется натуральным логарифмом x и в дальнейшем обозначается через $\ln x$).

ЛИСТОК 48. АСИМПТОТЫ

Если линейная функция $y = kx + c$ такова, что $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + c)) = 0$, то прямая $y = kx + c$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ справа. Аналогично определяется наклонная асимптота слева ($\ldots \lim\limits_{x\to-\infty} \ldots$).

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если эта функция не ограничена в точке x_0 (т. е. не существует окрестности точки x_0, где она ограничена).

Нарисовать графики и найти асимптоты:

1. $y = x + \frac{1}{x}$. **2.** $y = \frac{x^2+1}{x+1}$. **3.** $y = \sqrt{x^2+1}$.

4. $y = \sqrt{x^2+x}$. **5.** $y = x\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$. **6 д.** $y = \ln(1 + e^x)$.

7 д. Существует ли прямая, которая лежит выше графика функции $y = x \ln x$?

8 д. Доказать, что графики функций $y = x^{100}$ и $y = e^x$ пересекаются по крайней мере в трех точках.

ЛИСТОК 49. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 (обозначение: $f'(x_0)$) *называется* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Производная является функцией той точки, в которой она вычисляется. (Эта функция обозначается: $f'(x)$.)

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной графика в точке $(x_0; f(x_0))$ к оси x.

В следующих задачах требуется нарисовать графики функции $f(x)$ и вычислить $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^k$ (k натуральное). **2.** $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$. **3.** $f(x) = \sqrt[k]{x}$ (k натуральное, $x > 0$). **4.** $f(x) = \sin x$. **5.** $f(x) = \cos x$. **6.** $f(x) = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$. **7 д.** $f(x) = e^x$ $(x_0 = 0)$. **8 д.** $f(x) = a^x$ (при любом x). **9 д.** $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$. **10 д.** $f(x) = x^a$ $(x_0 = 1)$.

ЛИСТОК 50. НЕПРЕРЫВНОСТЬ В ГЕОМЕТРИИ

Определения. 1. Пусть на связной части T числовой прямой (т. е. на всей прямой, на полупрямой, на отрезке, полуинтервале или интервале) заданы две непрерывные функции $x = f(t)$, $y = g(t)$. Пусть на плоскости зафиксирована декартова система координат xOy. Будем считать, что пара функций $f(t)$, $g(t)$ задает отображение множества T в плоскость, ставя каждому числу t из множества T точку плоскости с координатами $x = f(t)$ и $y = g(t)$. Образ множества T при таком отображении называется *кривой*, а само отображение — *параметрическим заданием кривой*.

2. *Окрестностью точки* плоскости будем называть любой круг с центром в этой точке.

3. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в этой точке и для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ такая, что для всякой точки $M(x, y)$ этой окрестности, входящей в область определения функции, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

4. Отображение $Y = F(X)$ плоского множества M в плоское множество G называется *непрерывным* в точке $X_0(x_0, y_0)$, если для любой окрестности E точки $Y_0 = F(X_0)$ существует окрестность точки X_0 такая, что в любой точке X этой окрестности, входящей в область определения функции, $F(X)$ входит в E.

Убедитесь в том, что параметрическое задание кривой есть отображение множества T в плоскость, непрерывное в смысле определения 4, и что непрерывная функция двух переменных есть частный случай непрерывного отображения плоских множеств (именно случай, когда G целиком принадлежит некоторой прямой).

5. Если отображение множества M в множество G взаимнооднозначно и непрерывно, а обратное отображение также непрерывно, то такое отображение называется *топологическим* или *гомеоморфным*.

Кривая Пеано. Пусть T — отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$, J — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Назовем их отрезком и квадратом нулевого ранга. Концам отрезка T поставим в соответствие две вершины квадрата: $f(0) = (0; 0)$, $f(1) = (1; 0)$. Разобьем квадрат I на 4 квадрата (первого ранга) прямыми $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, а отрезок T на 4 отрезка (первого ранга) точками $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$. Положим, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$. Ставим в соответствие отрезок $T_1 = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ квадрату $I_1\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right)$, отрезок $T_2 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ — квадрату $I_2\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\right)$. Отрезок $T_3 = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ — квадрату $I_3\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\right)$, отрезок $T_4 = \left[\frac{3}{4}; 1\right]$ — квадрату $I_4\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Для каждого отрезка первого ранга и ссответствующего ему квадрата первого ранга повторим такое же построение. И так далее. Говоря точнее, действуем по индукции.

Пусть квадрат разбит на 4^k квадратов k-го ранга, а отрезок — на 4^k отрезков k-го ранга, указаны образцы концов отрезков и установлено взаимнооднозначное соответствие множества отрезков k-го ранга и множества квадратов k-го ранга, так что каждому отрезку поставлен в соответствие квадрат, в вершинах которого лежат образы обоих концов этого отрезка. Строим отрезки и квадраты $k+1$ ранга так же, как построены отрезки и квадраты 1-го ранга, и аналогичным образом указываем образы концов.

Если число t отрезка T — двоично-рациональное, т. е. имеет вид $\frac{n}{2^k}$, то на некотором шаге этого процесса будет указан его образ.

Пусть t — не двоично-рациональное число. Тогда возьмем систему отрезков 1-го, 2-го, ..., k-го, ... рангов, содержащих точку t, и соответствующие им квадраты. Эти квадраты пересекаются по единственной точке. Положим $f(t)$ равным этой точке.

Таким образом, каждой точке отрезка поставлена в соответствие некоторая точка квадрата. Это соответствие является непрерывной функцией (см. задачу 3). Таким образом, оказывается возможным охарактеризовать точку квадрата с помощью одного непрерывно изменяющегося параметра. Это заставляет относиться осторожно к наивному определению размерности системы как числу параметров, необходимых для охарактеризования ее состояния. Оказывается, что непрерывное отображение отрезка на квадрат не может быть взаимно однозначным (см. задачу 1).

Задачи на непрерывность в геометрии

1. Доказать, что не существует гомеоморфного отображения отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. Город А и город В соединены двумя дорогами, несамопересекающимися и непересекающими друг друга (дороги можно считать ломаными). Из города А в город В одновременно выехали по разным дорогам две машины и одновременно прибыли в город В. При этом машины были связаны веревкой длиной 20 м, и веревка не порвалась (машины могли двигаться неравномерно, не сказано даже, что они шли все время вперед).

Доказать, что два воза с сеном, каждый радиуса 11 м не могут одновременно пройти по разным дорогам один из А в В, другой из В в А, не задев друг друга.

3. Доказать, что отображение $f(t)$, задающее кривую Пеано, является непрерывным отображением отрезка на квадрат.

Разбиение треугольника T на треугольники T_i называется триангуляцией, если любые два треугольника T_i и T_k либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. Все вершины участвующих в разбиении треугольников называются вершинами разбиения.

4. Пусть дан треугольник T и его триангуляция. Если вершины T занумерованы цифрами 1, 2, 3, а остальные вершины разбиения как-то занумерованы этими же цифрами, но на стороне 1, 2 треугольника T встречаются только цифры 1 и 2, на стороне 2,3 — только цифры 2 и 3, на стороне 1,3 — только цифры 1 и 3, то найдется треугольник триангуляции, вершины которого занумерованы всеми тремя цифрами.

(Это утверждение носит название леммы Шпернера. Докажите его.)

5 (теорема о неподвижной точке). Доказать, что при непрерывном отображении на себя плоского замкнутого треугольника найдется неподвижная точка (вместо треугольника можно взять квадрат или круг). (Об этой задаче можно прочесть в книге Куранта и Робинса «Что такое математика».)

6. Доказать, что при всяком непрерывном отображении отрезка на квадрат найдется точка квадрата, прообраз которой содержит по меньшей мере три точки.

ЛИСТОК 51. РЯДЫ

Определение. Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + \ldots$ сходится (к числу), то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + \ldots$ расходится (сходится к бесконечности), а ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ сходится, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ называется *условно-сходящимся*.

1. Доказать: если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

2. Доказать: если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ абсолютно сходится, то ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots$, полученный перенумерацией ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$, тоже сходится, и притом к той же сумме. (Перенумерация — взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел на себя.)

3. Приведите пример условно сходящегося ряда.

4. Доказать: если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ сходится условно, то перенумерацией можно изменить его сумму. Точнее: для любого числа B существует такая перенумерация, что ряд, полученный после нее, сходится к B; существует перенумерация, в результате которой ряд сходится к плюс бесконечности, к минус бесконечности; существует перенумерация, в результате которой ряд не сходится ни в одном из перечисленных смыслов.

5. Пусть ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ и ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots$ состоят из положительных членов, расходятся и монотонно убывают (т. е. $a_k > a_{k+1}$, $b_k > b_{k+1}$) для любого k. Положим, $c_k = \min(a_k, b_k)$. Верно ли, что ряд $c_1 + c_2 + \ldots + c_k + \ldots$ расходится?

6. Дан ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$. Доказать: если существует положительное $r < 1$ такое, что для каждого k, начиная с некоторого, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < r$, то ряд абсолютно сходится.

7. Доказать: если $\lim\limits_{k} |a_k|^{\frac{1}{k}} = r < 1$, то ряд $a_1 + \ldots + a_k + \ldots$ абсолютно сходится.

ЛИСТОК 52. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

1. Построить функцию, определенную на всей числовой прямой и такую, что на любом интервале она принимает все действительные значения.

2. Построить функцию, определенную на канторовском множестве, непрерывную во всех его точках и такую, что множество ее значений есть отрезок.

3. Построить функцию двух переменных $c = f(x, y)$, определенную на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и такую, что она в каждой точке непрерывна как функция от x при фиксированном y и непрерывна как функция от y при фиксированном x, и при этом в некоторой точке разрывна как функция двух переменных.

4 (трудная). Доказать, что функция, описанная в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывна.

Определения. 1. Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$, ..., определенных на некотором множестве M, называется *сходящейся* на множестве M к функции $f(x)$, если для любого x из M и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для любого натурального $k > N$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

2. Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$, ..., определенных на некотором множестве M, называется *равномерно сходящейся* на множестве M к функции $f(x)$, если для любого положительного ε найдется N такое, что для любого натурального $k > N$ и любого x из M выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

5. Привести пример сходящейся, но не равномерно сходящейся последовательности функций.

6. Пусть последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$, ..., заданных на отрезке M и непрерывных на M, сходится равномерно к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ непрерывна на M.

7. Привести пример сходящейся последовательности непрерывных функций, такой, что предельная функция не является непрерывной.

8 (трудная). Доказать, что функция, о которой говорится в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывной.

§ 6. ИНТЕГРАЛ, ПРОИЗВОДНАЯ, ТЕОРИЯ ОБЪЕМОВ И ПЛОЩАДЕЙ

ЛИСТОК 53. ИНТЕГРАЛ

Определения. 1. Функция $y = S(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, называется *ступенчатой*, если на отрезке имеется конечное число точек a_i, таких, что $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$ и на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, k - 1)$ $S(x)$ равно константе S_i.

2. *Интегралом от ступенчатой функции* $S(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется сумма $S_0 \cdot (a_1 - a_0) + S_1 \cdot (a_2 - a_1) + S_2 \cdot (a_3 - a_2) + \ldots + S_{k-1}(a_k - a_{k-1})$.

Эта сумма обозначается $\int\limits_a^b S(x)\,dx$.

3. Пусть $y = f(x)$ — функция, заданная на отрезке $[a; b]$; $S(x)$ — ступенчатая функция, заданная на том же отрезке,—называется *нижней ступенчатой функцией* для $f(x)$, если на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$ $S(x) \leqslant f(x)$. Если при этом на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$ $S_i = \inf f(x)$ на этом интервале, то $S(x)$ называется *нижней функцией Дарбу*. Аналогично определяется *верхняя ступенчатая функция* и *верхняя функция Дарбу*.

4. Интеграл от нижней функции Дарбу называется *нижней суммой Дарбу*, интеграл от верхней функции Дарбу называется *верхней суммой Дарбу*.

5. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на отрезке $[a; b]$. Число m включаем в множество M, если m равно интегралу от некоторой нижней ступенчатой функции $f(x)$. Sup множества M называется *нижним интегралом* функции $f(x)$ на $[a; b]$; обозначение: н $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Inf множества интегралов от верхних ступенчатых функций функции $f(x)$ называется верхним интегралом $f(x)$ на $[a; b]$ и обозначается: в $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

6. Если верхний и нижний интеграл совпадают, то функция называется *интегрируемой* на $[a; b]$ и верхний (он же нижний) интеграл называется просто *интегралом* и обозначается: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Упражнения на определение интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Доказать:

1. а) Для того чтобы существовала хотя бы одна нижняя ступенчатая функция функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ограничена снизу на $[a; b]$.

б) Для того чтобы существовала нижняя функция Дарбу, необходимо и достаточно, чтобы функция была ограничена снизу.

в) Для того чтобы существовали нижний и верхний интегралы $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ограничена.

2. Нижний интеграл $f(x)$ на $[a; b]$ равен sup множества НСД (нижних сумм Дарбу) при всевозможных разбиениях отрезка $[a; b]$. Аналогично для верхних.

3. В вышеприведенных определениях интеграл от ступенчатой функции определяется дважды: первый раз в пункте 2, второй раз — в пункте 6, где определяется интеграл для любой, в том числе ступенчатой функции. Доказать, что эти определения согласованы, т. е. доказать, что ступенчатая функция интегрируема (в общем смысле), что ее интеграл (в смысле п. 6) равен выражению, которое определяет интеграл от ступенчатой функции в п. 2.

4. Если к разбиению добавить одну точку, то НСД не уменьшится, ВСД (верхняя сумма Дарбу) не увеличится. Доказать.

5. Для любых двух разбиений A и B существует разбиение C такое, что НСД $(C) \geqslant$ НСД (A) и НСД $(C) \geqslant$ НСД (B).

6. На данном отрезке $[a; b]$ для данной функции $f(x)$ всякая НСД $\leqslant$ всякой ВСД.

7. Обозначим через НСД$_k$ НСД, получающуюся при разбиении отрезка $[a; b]$ на k равных частей. Доказать, что $\sup$ НСД$_k$ = $= \sup$ НСД по множеству всех разбиений. Аналогично для ВСД.

8. Доказать, что интеграл не изменится, если функцию изменить в конечном числе точек.

ЛИСТОК 54. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

Рассматриваются функции, заданные на некотором связном подмножестве M числовой прямой (т. е. на всей прямой, полупрямой, интервале, полуинтервале или отрезке) и ограниченные на каждом отрезке, входящем в это подмножество. Говоря о каком-либо интеграле, всегда предполагаем, что отрезок интегрирования целиком входит в множество M.

1. Доказать:

$$\text{н} \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx \geqslant \text{н} \int_a^b f(x)\,dx + \text{н} \int_a^b g(x)\,dx.$$

(Для верхних интегралов — обратное неравенство.)

2. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то их сумма тоже интегрируема на отрезке $[a; b]$ и интеграл суммы функций равен сумме интегралов от них.

3. Если $f(x)$ — интегрируемая функция, то $cf(x)$ — интегрируемая функция, $\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$ (c — константа).

4. Доказать для интегрируемой функции формулу:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad (a < b < c).$$

Мы придадим смысл интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$ также и в том случае, когда $b < a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Убедитесь в том, что формула предыдущей задачи верна при любых неравенствах между a, b и c.

5. Если растянуть ось x в k раз и преобразовать соответствующим образом пределы интегрирования, интеграл умножится на k:

$$k \int_a^b f(x)\,dx = \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

ЛИСТОК 55. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Все задачи этого листка легко решаются с помощью теоремы Ньютона — Лейбница, рассматриваемой в дальнейшем. Но интересно, что многие интегралы можно вычислять до того, как развернута теория.

Задачи этого листка (как и двух предыдущих) можно решать еще до теории непрерывных функций и пределов и в основном даже до задач, посвященных элементарным функциям, сразу после параграфа 1 настоящего сборника (используя, конечно, определение интеграла).

Вычислить:

1. $\int\limits_0^1 x\,dx$. **2.** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. **3.** $\int\limits_0^1 x^3\,dx$.

4. В предыдущих трех примерах вычислить интегралы в пределах от a до b.

Вычислить: **5.** $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$. **6.** $\int\limits_a^b x^k\,dx$.

7. Рассмотрим функцию $R(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$.

Убедитесь в том, что функция $R(x)$ удовлетворяет функциональному соотношению $R(x) + R(y) = R(xy)$ и монотонна. Тогда (см. задачу 8 д, листок 28) $R(x) = \log x$ (но пока неизвестно, по какому основанию).

8. Вычислить $\int\limits_a^b e^x\,dx$.

ЛИСТОК 56. ЗАДАЧИ О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛА

1. Привести пример функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;\, b]$, ограниченной и при этом неинтегрируемой на этом отрезке.

2. Привести пример таких двух функций, чтобы неравенство задачи 1 (листок 54) было строгим.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;\, b]$, называется *равномерно непрерывной на* $[a;\, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых двух чисел x_1 и x_2, входящих в область определения и таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

3. Всякая функция, непрерывная на $[a;\, b]$, равномерно непрерывна на $[a;\, b]$.

4. Привести пример функции, непрерывной на всей числовой прямой, ограниченной и неравномерно непрерывной на всей прямой.

5. Доказать, что всякая функция, определенная на отрезке $[a;\, b]$ и непрерывная на этом отрезке, интегрируема на нем.

6. Доказать, что функция, определенная на отрезке $[a;\, b]$, ограниченная и кусочно непрерывная, интегрируема на этом отрезке.

(Функция называется *кусочно непрерывной* на отрезке, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, на каждом из которых функция непрерывна.)

7 д (трудная). Для того чтобы функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;\ b]$, была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a;\ b]$ и при этом для каждого $\varepsilon > 0$ нашлась система (конечная или счетная) интервалов, покрывающая все точки разрыва функции $f(x)$ и такая, что сумма длин этих интервалов меньше ε.

(О множестве, которое обладает свойством, сформулированным здесь для множества точек разрыва, говорят, что оно имеет меру нуль. Сумма бесконечного числа длин понимается как сумма ряда.)

ЛИСТОК 57. ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРАЛАХ

1 (теорема о среднем). Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$ и непрерывна в каждой его точке. Тогда на этом отрезке найдется такая точка x_0, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a).$$

2. Пусть функция $f(t)$ определена на некотором отрезке и интегрируема на нем. Рассмотрим интеграл как функцию его верхнего предела: $R(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (a и x принадлежат отрезку, на котором определена $f(t)$). Тогда $R(x)$ непрерывна во всех точках этого отрезка.

3. В условиях предыдущей задачи $R(x)$ имеет производную при всяком x, при котором $f(x)$ непрерывна. Доказать, что при этих x $R'(x) = f(x)$.

4 д (вторая теорема о среднем). Пусть на отрезке $[a;\ b]$ заданы две функции $f(x)$ и $p(x)$, причем $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, $p(x)$ интегрируема на $[a;\ b]$ и $f(x)\cdot p(x)$ тоже интегрируема на $[a;\ b]$ (на самом деле, ввиду задачи 7 д листка 56 требование интегрируемости $f(x)\,p(x)$ выполняется автоматически), $p(x) > 0$ при всех x. Тогда найдется точка x_0 отрезка $[a;\ b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\cdot p(x)\,dx = f(x_0)\cdot\int_a^b p(x)\,dx.$$

5 д (второе определение интеграла). Для того чтобы число C было интегралом функции $f(x)$ от a до b, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что, как бы отрезок $[a;\ b]$ ни был разбит на произвольное

число N отрезков d_i (длина отрезка d_i обозначается через δ_i) и как бы на этих отрезках ни были выбраны точки x_i, будет выполняться неравенство:

$$|\delta_1 \cdot f(x_1) + \delta_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \delta_N \cdot f(x_N) - C| < \varepsilon,$$

если все $\delta_i < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

ЛИСТОК 58. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

При изучении производных обычно применяются некоторые специальные термины и обозначения. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0)$, то говорят, что $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0. Если она дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она *дифференцируема на этом множестве.*

При рассмотрении производной в точке x_0 часто удобно переходить к новой переменной $\Delta x = x - x_0$ (Δx — единое обозначение для новой переменной, читается: «дельта икс»); Δx называется приращением аргумента. Тогда определение производной выглядит так: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ часто обозначается через Δy (дельта игрек); она называется приращением функции.

1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Доказать.

2. Привести пример функции, которая определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0, но не дифференцируема в ней.

3. Привести пример функции, которая дифференцируема в точке x_0 и во всех точках, кроме x_0, разрывна.

4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то найдутся такая окрестность I точки x_0 и такие две невертикальные прямые l_1 и l_2, проходящие через точку $(x_0; f(x_0))$, что для всякого x_1 из I, отличного от x_0, точка $(x_1; f(x_1))$ лежит на вертикальной прямой $x = x_1$ между точками пересечения этой прямой с l_1 и l_2. Доказать.

5. Если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность I точки x_0, такая, что для всякого x, лежащего в этой окрестности справа от x_0, $f(x) > f(x_0)$, а для всякого x, лежащего в I слева от x_0, $f(x) < f(x_0)$. Доказать.

6. Верно ли, что если $f'(x_0) > 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ не убывает?

7. Привести пример функции $f(x)$, которая определена на всей прямой, имеет всюду производную, но $f'(x)$ не является непрерывной функцией (имеет точку разрыва; в этой точке $f'(x)$ тоже должна существовать). Нарисовать график такой функции.

1. Теорема 1. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a; b]$ и всюду внутри него дифференцируема, то всюду внутри этого отрезка $f'(x) \geqslant 0$.*

2. Теорема 2. *Если всюду внутри отрезка $[a; b]$ функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) > 0$, то $f(x)$ — монотонно возрастающая функция.*

3. Будут ли верны утверждения двух предыдущих задач, если в первой из них заменить знак «$\geqslant$» на «$>$», а во второй — наоборот?

Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для каждого x из этой окрестности, входящего в область определения $f(x)$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

4. Теорема 3. *Если функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0, дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке локального максимума, то $f'(x_0) = 0$.*

Иными словами, если $f(x_0)$ — локально максимальное значение функции $f(x)$, то либо x_0 не есть внутренняя точка области определения функции $f(x)$, либо $f(x)$ не дифференцируема в точке x_0, либо $f'(x_0) = 0$.

Аналогично для локально минимальных значений.

Верно ли, что если $f'(x_0) = 0$, то x_0 — точка локального максимума или локального минимума функции?

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют с помощью производных находить участки монотонного роста, участки монотонного убывания, максимальные и минимальные значения функции.

Доказать:

5. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то на интервале $(a; b)$ найдется точка c такая, что $f'(c) = 0$.

6. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то на интервале $(a; b)$ найдется точка c такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ (т. е. найдется касательная, параллельная хорде). Этот факт называется теоремой Лагранжа или формулой конечного приращения. Формулу эту часто записывают так: $\Delta y = f'(c)\,\Delta x$.

7. Если $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала, то $f(x)$ есть константа.

8. Производная пробегает все промежуточные значения. Точнее, если $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и в точках c и d этого интервала $f'(x)$ принимает значения M и N, то для всякого R, заключенного между M и N, найдется точка r между c и d такая, что $f'(r) = R$.

* Эти теоремы предлагаются в качестве задач.

ЛИСТОК 60. ПРОИЗВОДНЫЕ СПРАВА И СЛЕВА (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки x_0. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* x_0 *справа*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам $0 < x - x_0 < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ (правой полуокрестностью точки x_0 называется интервал вида $]x_0; b[$).

Определение. *Правой производной функции* $f(x)$ в точке x_0 (обозначение: $f'_{\text{пр}}(x_0)$) называется $\lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Аналогично определяются предел слева и левая производная.

1. Для того чтобы существовала производная функции $f'(x)$ в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовали правая и левая производные в этой точке и они были равны.

2. Для правой производной сформулировать и доказать утверждение, аналогичное задаче 4 (листок 58).

3. Если функция $f(x)$ выпукла на интервале $(a; b)$, то в каждой точке этого интервала у нее есть правая и левая производные. (Определение выпуклой функции см. в листке 40.)

4. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что в каждой точке этой окрестности, кроме точки x_0, $f(x) < f(x_0)$. Доказать, что для любой функции множество точек строгого локального максимума конечно или счетно.

5. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале. Доказать, что множество точек, в которых и правая и левая производные существуют, но не равны друг другу, конечно или счетно.

6. Построить функцию, которая непрерывна на отрезке, имеет всюду, кроме множества меры нуль, производную, равную нулю, и при этом не является константой. (Определение множества меры нуль см. в листке 56.)

7. Построить функцию, непрерывную на отрезке $[a; b]$, имеющую на интервале (a, b) ограниченную производную, но не имеющую правой производной в точке a.

8. Если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, справа от x_0 имеет производную и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$ существует, то $f'_{\text{пр}}(x_0)$ существует и равна этому пределу.

ЛИСТОК 61. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Доказать:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x) + g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная равна $f'(x_0) + g'(x_0)$. Аналогично для разности.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная равна $f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $g(x_0)\neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная равна $\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

4. Пусть функция $F(x)$ — сложная функция: $F(x)=P(b(x))$. Если $b(x)$ дифференцируема в точке x_0, $P(y)$ дифференцируема в точке $b(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $F(x_0)=$ $=P'(b(x_0))\cdot b'(x_0)$.

5. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности I точки x_0, имеет в точке x_0 производную, отличную от нуля, и существует обратная функция $g(y)$, определенная в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$ и имеющая все значения в I, то $g(y)$ имеет в точке y_0 производную и $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Дальше нам необходима формула $(e^x)'=e^x$ (в дополнительных задачах 7 и 8 листка 49 «Производные некоторых функций», в частности, нужно было вывести эту формулу). Этот факт можно получить из задачи 9 (листок 47 «Пределы, связанные с экспонентой»), которая там предлагалась в качестве дополнительной. Решить задачу 9 можно либо на основе комбинации рассуждений задач 6 того же листка и 7, 8 (листок 44 «Задачи на последовательности»), либо с помощью задачи 9 (листок 26 «Распространение функции a^x на любое $a>0$ и любое x»). Во всех случаях для проведения этих рассуждений нужно уже в какой-то степени изощренное владение типичными конструкциями математического анализа. Если вы пока не в состоянии пройти ни по одному из путей, ведущих к формуле $(e^x)'=e^x$, примите ее на веру и используйте в дальнейшем.

6. Найти $(\ln x)'$ $(x>0)$. (Задача 9, листок 49.)

7. Найти $(a^x)'$ $(a>0$, x любое). (Задача 8 того же листка.)

8. Найти $(x^a)'$ $(x>0,\ a\neq 0)$.

Для нахождения производной от выражения, содержащего степень, применяют следующий прием:

$$a(x)^{b(x)}=e^{b(x)\cdot\ln a(x)},$$

и задача свелась к вычислению $(e^x)'$, $(\ln x)'$ и применению результатов задач 2 и 4.

ЛИСТОК 62. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Вывести следующие формулы (или вспомнить их вывод):

1. $(x^k)'=kx^{k-1}$ (k целое, отличное от нуля), $(x^a)'=ax^{a-1}$ $(a\neq 0$, $x>0)$, $(\sqrt[k]{x})'=\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt[k]{x^{k-1}}}$ (k целое, нечетное, x любое, не равное нулю).

2. $(e^x)' = e^x$,
$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0)$,
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. $(\sin x)' = \cos x$,
$(\cos x)' = -\sin x$,
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

4. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

ЛИСТОК 63. ИССЛЕДОВАНИЕ НА МОНОТОННОСТЬ

Построить графики следующих функций (с нахождением участков монотонности и локальных максимумов и минимумов).

1. $f(x) = 2 + x - x^2$.
2. $f(x) = 3x - x^3$.
3. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100} (x>0)$.
5. $f(x) = x + \sin x$.
6. $f(x) = x + |\sin 2x|$.
7. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$.
8. $f(x) = x^k \cdot e^{-x} \quad (k > 0,\ x \geqslant 0)$.
9. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$.
10. $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$.
11. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$.
12. $f(x) = \arcsin x - x$.

13. Доказать, что многочлен при достаточно большом x монотонная функция.

ЛИСТОК 64. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛОМ

Пусть функции $f(x)$ и $R(x)$ определены на некотором связном подмножестве M числовой прямой (интервале, полупрямой и т. п.). Функция $R(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если в каждой точке множества M функция $R(x)$ дифференцируема и $R'(x) = f(x)$.

1. Если $R(x)$ и $P(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенной на связном подмножестве M числовой прямой, то $R(x) - P(x)$ есть постоянная. Доказать.

2. $R(x)$ называется *обобщенной первообразной* функции $f(x)$, если $R(x)$ непрерывна всюду, дифференцируема всюду, кроме множества точек, конечного на каждом интервале, и всюду, где она дифференцируема, $R'(x) = f(x)$.

Сделать предыдущую задачу для обобщенных первообразных.

3 (формула Ньютона — Лейбница). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $R(x)$ — первообразная $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = R(b) - R(a).$$

Указание. Воспользоваться задачей 3 листка 57 «Теоремы об интегралах».

4. Обобщить предыдущую теорему на случай, если множество точек разрыва функции $f(x)$ конечно на каждом интервале ($f(x)$ ограничена).

5 д (формула замены переменных). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, функция $g(t)$ дифференцируема на отрезке $[c; d]$ и монотонно возрастает, $g'(t)$ непрерывна и $g(c) = a$, $g(d) = b$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$

6 д. Обобщить предыдущую задачу на случай, когда $g(t)$ немонотонна, но отрезок $[c; d]$ распадается на конечное число участков, на которых $g(t)$ монотонна.

7 д (формула интегрирования по частям). Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a; b]$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ непрерывны, то

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)\,g(a)) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

ЛИСТОК 65. ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

Первообразную функции $f(x)$ принято записывать как интеграл без указания пределов (и называть *неопределенным интегралом*), например $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Найти первообразные функций:

1. x^a $(x > 0,\ a \neq -1)$.
2. $\frac{1}{x}$ (в области $x > 0$ и области $x < 0$).
3. $\frac{1}{1 + x^2}$.
4. Проверить, что $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$.
5. Найдите первообразную функции: $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
6. Проверить, что $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$.

Найти первообразные функций:

7. a^x $(a > 0)$. 8. $\sin x$, $\cos x$. 9. $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x}$.

ЛИСТОК 66. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ВЫПУКЛОСТЬ

Второй производной $f''(x)$ функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$; $(k+1)$-й производной называется производная от k-й производной.

1. Доказать: если всюду на интервале $(a; b)$ $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпуклая на этом интервале. (Определение выпуклости см. в листке 30.)

Точкой перегиба графика называется такая точка, в которой участок выпуклости граничит с участком вогнутости.

Построить графики следующих функций (найти участки монотонности, минимумы и максимумы, участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба; встречающиеся при этом уравнения разрешается решать приближенно с такой точностью, чтобы уловить характер графика):

2. $3x^2 - x^3$. 3. $x + \sqrt[3]{x^5}$. 4. $\sqrt{1 + x^2}$. 5. $x + \sin x$. 6. e^{-x^2}. 7. $\ln(1 + x^2)$. 8. $x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$. 9. x^x $(x > 0)$.

10. Сколько решений имеет уравнение $2^x = x^{100}$?

ЛИСТОК 67. ЗАДАЧА ПРО ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

Если функции $x = f(t)$, $y = g(t)$, параметрически задающие кривую, дифференцируемы, причем производные не равны нулю одновременно, то такая кривая называется *гладкой*. Вектор с проекциями $f'(t)$, $g'(t)$ есть *вектор касательной*. Если t интерпретировать как время, то вектор касательной имеет физический смысл скорости. Разумеется, каждую гладкую кривую можно проходить с разной скоростью. Это соответствует различным способам параметрического задания одной и той же кривой.

Гладкая кривая называется *замкнутой*, если совпадают ее начальная и конечная точки, начальный и конечный вектор касательной. Можно считать, что замкнутая гладкая кривая есть образ окружности при отображении, которое задается дифференцируемыми (на окружности) функциями.

Доказать:

1. Если $f(t)$ и $g(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся в нуль одновременно при $t \in [a; b]$, то отрезок $[a; b]$ можно разбить на конечное число участков, таких, что часть кривой, соответствующая каждому участку, представляет собой либо график функции $y = r(x)$, либо график функции $x = s(y)$ (либо и то и другое вместе).

2. Если гладкая кривая, заданная параметрически, соединяет две различные точки плоскости A и B, то на кривой найдется точка, в которой касательная параллельна отрезку AB.

А н а л и т и ч е с к а я ф о р м у л и р о в к а. Если $f(t)$ и $g(t)$ — две дифференцируемые функции, определенные на отрезке

$[a; b]$, причем их производные не обращаются в нуль одновременно, и $g(a) \neq g(b)$, то найдется такое число c из отрезка $[a; b]$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Указание. Если вы будете делать эту задачу в геометрической формулировке, не забывайте, что мы не формулировали геометрического определения касательной. Но вы можете построить опорную прямую — прямую, которая имеет хотя бы одну общую точку с кривой, параллельна заданному направлению, и вся кривая лежит от нее по одну сторону.

3 (правило Лопиталя). Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел нуль при x, стремящемся к x_0, $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки x_0, кроме самой точки x_0, и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны.

ЛИСТОК 68. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

1. Дан многочлен $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k$. Доказать, что коэффициенты многочлена связаны со значениями производных этого многочлена в точке нуль формулой $a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$ (здесь через $P^{(n)}(x)$ обозначена n-я производная функции $P(x)$; сама функция считается нулевой производной).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (в этом листке всегда подразумевается, что x берется из этой окрестности) и имеет в этой окрестности производные до k — 1-го порядка включительно, а в самой точке еще и производную k-го порядка. Тогда можно написать:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k+r(x).$$

Эта формула бессодержательна, если ничего не утверждается относительно $r(x)$ (функция $r(x)$ равна просто разности между $f(x)$ и остальными членами правой части).

2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^k}=0$.

Указание. Многократно воспользоваться правилом Лопиталя для вычисления предела отношения $\frac{r(x)}{(x-x_0)^k}$. Если вам поможет более сильное предположение, что $f^{(k)}(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0, воспользуйтесь сначала этим предположением, а затем сделайте задачу в общем виде.

3. Доказать: если $f^{(k)}(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0, то для каждого x из этой окрестности найдется $y(x)$, который лежит между x_0 и x, такой, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \\ + \frac{f^{(k)}(y(x))}{k!}(x - x_0)^k$$

(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Указание. Написать эту формулу для функции $f^{(k-1)}(x)$:

$$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_0) + f^{(k)}(y(x))(x - x_0)$$

(это есть формула конечных приращений), убедиться из этой формулы, что $f^{(k)}(y(x))$ есть непрерывная и ограниченная, а потому интегрируемая функция от x, проинтегрировать обе части в пределах от x_0 до x и воспользоваться второй теоремой о среднем. Всю эту процедуру проделать $k - 1$ раз.

4. Доказать: а) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$;

б) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

(сходимость и равенство имеют место при любых x).

ЛИСТОК 69. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Областью на плоскости называется любое открытое связное множество. (*Открытым* называется такое множество, что если точка M входит в него, то и некоторый круг с центром в точке M целиком входит в него; *связным* называется такое множество, что любые две его точки можно соединить внутри множества ломаной.)

Пусть на области G задано поле направлений. Это значит, что каждой точке поставлено в соответствие направление. *Направлением* называется класс параллельных между собой прямых (так что направления, например, вверх и вниз не различаются). Поле направлений можно задавать формулой вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{R(x, y)},$$

где $F(x, y)$ и $R(x, y)$ — две функции двух переменных, определенные в области D и не обращающиеся в нуль одновременно. Эту формулу нужно понимать так: если в некоторой точке знаменатель отличен от нуля, то правая часть есть тангенс угла между осью x и любой прямой этого направления. Если же знаменатель равен нулю, то направление вертикально. Мы будем рассматривать непрерывное поле направлений, которое можно определить, например, тем, что $F(x, y)$ и $R(x, y)$ — непрерывные функции двух переменных.

Гладкая кривая называется *интегральной кривой* поля направлений, если в каждой точке ее вектор касательной имеет направление, соответствующее этой точке (направление вектора мы не отличаем от противоположного направления).

Решить дифференциальное уравнение (дифференциальным уравнением называется вышеприведенная запись поля направлений) — значит найти все интегральные кривые поля направлений. В типичном случае этих кривых бывает бесконечно много. Если известно, что интегральная кривая должна пройти через некоторую фиксированную точку, то такие добавочные сведения обычно позволяют из бесконечного множества интегральных кривых выделить одну кривую. В следующем листке вам предлагаются в виде задач точные теоремы на этот счет.

По задаче 1 листка «Задачи про гладкие кривые» вся интегральная кривая представляется в виде суммы участков, каждый из которых есть либо график функции от x, либо график функции от y. Если дифференциальное уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, где $F(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных, то вся интегральная кривая есть график функции от x. В этом случае вместо интегральной кривой говорят о решении дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ называется такая функция $y = R(x)$, что при каждом x из ее области определения $R'(x) = F(x, R(x))$.

Задачи на дифференциальные уравнения (дополнительное задание).

1. Решить уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ (область G — вся плоскость, кроме точки $(0; 0)$).

2. Привести пример уравнения вида $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью, такого, что существуют два решения $R_1(x)$ и $R_2(x)$, проходящие через одну и ту же точку и не совпадающие.

3. Пусть функция $f(x, y)$ обладает следующим свойством: существует константа K такая, что для любых x, y_1 и y_2 таких, что точки (x, y_1) и (x, y_2) входят в G, выполняется неравенство $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K|y_1 - y_2|$. (Считайте для простоты, что G есть квадрат.) Тогда через любую точку области G проходит не более чем одно решение уравнения $y' = f(x, y)$.

4. Решить уравнение: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (G — вся плоскость, кроме точки $(0; 0)$).

5. Решить уравнение: $y' = y$ (G — вся плоскость).

6 (теорема существования). Пусть G — квадрат, $f(x, y)$ непрерывна на G, $M(x_0; y_0)$ — внутренняя точка G. Тогда существует окрестность точки x_0 такая, что в ней определена функция $y = R(x)$, удовлетворяющая уравнению $y' = f(x, y)$ и проходящая через точку M.

Указание. Рассмотрим некоторую правую полуокрестность точки x_0. Функция $y = b(x)$, проходящая через точку $M(x_0, y_0)$, называется «верхней», если в каждой точке этой полуокрестности $b'(x) \geqslant f(x, b(x))$. Верхние функции существуют. Теперь для каждого x этой полуокрестности определим число $t(x)$ как inf значений всех верхних функций в этой точке.

ЛИСТОК 70. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА

1. Пусть на плоскости выбрана декартова система координат, в частности выбрана единица длины.

2. Для каждого натурального числа n возьмем $d = \frac{1}{2^n}$. Проведем все прямые $x = kd$, $y = kd$, где k — любое целое число. Этим плоскость разбивается на квадраты со стороной d. Площадью такого квадрата называется число d^2. Всякая конечная система таких квадратов при данном n называется *элементарной фигурой* (квадраты считаются замкнутыми). *Площадью элементарной фигуры* называется сумма площадей составляющих ее квадратов.

3. Пусть A — ограниченное множество на плоскости. *Верхней площадью* A называется точная нижняя грань площадей всевозможных элементарных фигур, целиком покрывающих фигуру A.

4. *Нижней площадью* фигуры A называется точная верхняя грань площадей элементарных фигур, целиком содержащихся в A.

5. Если верхняя и нижняя площади фигуры A совпадают, то фигура A называется *квадрируемой*, а верхняя и нижняя площади ее называются *площадью фигуры* A.

Определение объема в точности повторяет определение площади. Нужно только все двумерные понятия заменить на соответствующие трехмерные (плоскость заменить пространством, квадраты — кубами, объемом куба называть куб его длины, слово «квадрируемость» заменить на «кубируемость» и слово «площадь» — на «объем»).

Точка x входит в границу множества M, если любая окрестность точки x содержит точку из M и точку из дополнения M (окрестностью в пространстве называется любой шар, содержащий нашу точку). *Границей* множества называется множество точек границы множества.

Исходя из приведенных определений можно доказать все обычные свойства площади и объема ограниченного множества (только такие мы рассматриваем); этому посвящены и два следующих листка. Но пока эти свойства не доказаны, нужно иметь в виду, что:

1) площадь элементарной фигуры имеет два определения (сформулированные в п. 2 и 5), и пока не доказано, что они приводят к одному числу;

2) не доказано, что площадь квадрата, не являющегося элементарной фигурой, равна квадрату его стороны;

3) не доказано, что площади конгруэнтных фигур равны, в частности не доказано, что площадь не меняется при повороте фигуры.

(Аналогичное замечание для объемов.)

Доказать:

1. Верхняя площадь любого отрезка равна нулю. Верхний объем любого плоского прямоугольника в пространстве равен нулю.
(Тем самым отрезок на плоскости квадрируем, прямоугольник в пространстве кубируем.)

2. Если прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) является элементарной фигурой (т. е. должным образом расположен), то он квадрируем (кубируем), два определения площади (объема) для него приводят к одному числу, и его площадь (объем) есть произведение длин его сторон.

3. Если стороны прямоугольника параллельны координатным осям, то он квадрируем и его площадь равна произведению его сторон. Аналогичное утверждение про объем параллелепипеда.

4. Элементарная фигура квадрируема (кубируема), и два определения ее площади (объема) приводят к одному числу.

5. Для любого множества нижняя площадь (объем) не превышает верхней площади (объема).

6. Придумать пример плоского множества, у которого верхняя и нижняя площадь не равны.

7. Для того чтобы множество было квадрируемо, необходимо и достаточно, чтобы верхняя площадь его границы была равна нулю. Аналогично для объемов.

8. Верхняя площадь дуги окружности равна нулю. Верхняя площадь графика непрерывной функции, заданной на отрезке, равна нулю (при любой ориентации графика относительно осей).

9. Докажите равенство нулю верхних объемов ограниченного куска плоскости, сферы, ограниченной конической поверхности.

Тем самым квадрируемы (кубируемы) сами эти множества и множества, для которых они служат границей.

ЛИСТОК 71. ТЕОРЕМЫ ОБ ОБЪЕМАХ И ПЛОЩАДЯХ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

1. Пусть A и B — два непересекающихся множества. Доказать, что сумма нижних площадей A и B не больше, чем нижняя площадь их объединения, сумма верхних площадей не меньше, чем верхняя площадь объединения. Аналогично для объемов.

2. Привести пример таких множеств, чтобы в предыдущей задаче имели место строгие неравенства.

Доказать:

3. Если A и B — два непересекающихся квадрируемых множества, то их объединение есть квадрируемое множество и его площадь равна сумме площадей A и B. Аналогично для объемов.

4. Площадь (объем) фигуры не меняется в результате параллельного переноса этой фигуры.

5. Если квадрируемая фигура разбита прямой на две части A и B, затем A и B как-то параллельно перенесены (не одинаково), так что получились фигуры A' и B' соответственно, причем общая часть A' и B' имеет площадь, равную нулю, то фигура, состоящая из A' и B', тоже квадрируема и ее площадь равна площади первоначальной фигуры. Аналогично для объемов. (Операция получения новой фигуры описанным методом называется *переслаиванием*.)

6. Пусть на плоскости дан квадрат I со стороной a, причем его стороны не параллельны осям. Тогда с помощью операции переслаивания, проведенной несколько раз, можно из него получить прямоугольник со сторонами, параллельными осям, причем произведение сторон этого прямоугольника равно квадрату числа a.

Отсюда следует, что площадь любого квадрата со стороной a равна a^2. Аналогичная теорема для куба сложнее (см. задачи 9, 10).

7. Площади двух конгруэнтных фигур на плоскости равны.

8. Если плоскость растянуть (сжать) в каком-либо направлении в k раз, то все квадрируемые фигуры останутся квадрируемыми и их площадь увеличится (уменьшится) в k раз.

9. Если S — прямоугольный параллелепипед с ребром a, не перпендикулярным и не параллельным плоскости xOy, и такой, что проекция a на ось z больше удвоенной диагонали его поперечного сечения (т. е. сечения, перпендикулярного к a), то существует горизонтальная плоскость (параллельная xOy), которая пересекается с S по параллелограмму, причем площадь его во столько раз больше площади поперечного сечения S, во сколько раз a больше своей проекции на ось z.

10. Любой куб с ребром a переслаивается в параллелепипед с параллельными осям сторонами, произведение которых $x = a^3$.

11. Объемы конгруэнтных фигур в пространстве равны.

ЛИСТОК 72. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ (ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ)

1. Непосредственно применяя определение площади, вычислить площадь круга радиуса r.

2. Если плоская фигура S ограничена отрезком $[a; b]$ числовой оси, графиком положительной непрерывной функции $f(x)$, определенной на этом отрезке, и вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b, то эта фигура квадрируема и ее площадь равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для вычисления объемов необходимо определить интеграл от функции двух переменных $z = f(x, y)$ по области S. Это определение можно строить так.

Пусть область S как-то разбита на конечное число квадрируемых частей $s_1, s_2, \ldots, s_k$ (площади этих частей обозначим соответственно через $S_1, S_2, \ldots, S_k$). Функция, которая на каждой такой части постоянна и ее значение R_i на ней не больше inf значения $f(x, y)$ на этой (i-ой) части, называется *нижней функцией*. *Интегралом от нижней функции* называется число $R_1 \cdot S_1 + R_2S_2 + \ldots + R_kS_k$. Sup интегралов всех нижних функций при всевозможных разбиениях S называется *нижним интегралом функции* $f(x, y)$. Аналогично определяется верхний интеграл. Если нижний и верхний интегралы совпадают, то функция называется *интегрируемой*, а ее нижний (он же верхний) интеграл называется *интегралом* от этой функции *по области* S. Обозначение: $\iint\limits_S f(x, y)\, dS$.

3. Доказать, что пространственная фигура, ограниченная квадрируемой областью S плоскости, графиком непрерывной положительной функции, заданной на S, и вертикальной цилиндрической поверхностью, состоящей из вертикальных прямых, проходящих через границу S, кубируема и ее объем равен $\iint\limits_S f(x, y)\, dS$.

4. Вывести формулу для объема прямого кругового конуса с основанием, площадь которого равна S и высота H.

5. Доказать, что объем полушара радиуса 1 равен

$$\int\limits_0^1 2r\sqrt{1 - r^2}\, dr.$$

(Указание. Сравнить определение интеграла функции двух переменных и интеграла функции одного переменного.)

6. Доказать, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r — радиус).