М. Л. ГЕРВЕР, Н. Н. КОНСТАНТИНОВ и А. Г. КУШНИРЕНКО
(Москва)

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИЗУ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ УЧАЩИМСЯ IX и X КЛАССОВ

Ниже представлена часть курса анализа, пройденная в течение полутора лет (IX класс и первая половина X) в математических классах школы № 7. В этот курс включены и элементы традиционного курса алгебры, естественно примыкающие к анализу. Этот предмет занимает 6 часов в неделю, из которых 2 не обязательны для посещения (консультация).

Не нужно думать, что в нашей школе проходится какой-то не представленный здесь курс анализа, а задачи являются к нему упражнениями. Предлагаемые задачи — это и есть сам курс анализа. В сборник включены определения, достаточные для самостоятельного решения всех задач. Проходя таким образом материал, школьники шаг за шагом овладевают техникой математического мышления. Овладение такой техникой на серьезном профессиональном уровне — основная цель курса.

Хотя научиться математическому мышлению можно почти на любом материале, мы старались подобрать его так, чтобы подвести учащихся к наиболее актуальной тематике. Здесь, конечно, сказывается вкус преподавателя. Мы считаем, что именно свободное владение основами анализа (техника работы с понятиями непрерывности и предела в разных видах) есть та база, на основе которой можно начинать серьезные занятия различными областями математики.

Логической стороне понятия предела у нас уделено значительно больше внимания, чем вычислительной. Это вполне соответствует современному стилю работы математиков, в особенности вычислителей-программистов. Один из основных выводов нашей работы состоит в том, что нужно очень много времени, чтобы хорошо усвоить основные понятия анализа: понятия предела и непрерывности. Если случится, например, что какой-нибудь из учеников, даже из лучших, не сможет в течение месяца доказать эквивалентность двух определений непрерывности (на ε, δ-языке и на языке последовательностей),— не подсказывайте ему. Дайте ему возможность самостоятельно преодолеть эти трудности.

На занятиях по анализу у нас присутствует одновременно несколько учителей, от 3 до 6 в разных классах. Задания выдаются каждому в виде листочков, размноженных на машинке (один листочек на одно или несколько занятий). Ученики сидят в классе и решают задачи. Их же они продолжают решать дома, так как в классе, как правило, не успевают. Никаких специальных домашних заданий не задается.

Из таких листков, переписанных подряд, и составлен настоящий сборник (с добавлением контрольных работ). Преподаватели заняты в классе тем, что по очереди беседуют со всеми. За час можно побеседовать с одним-тремя учениками. Во время беседы ученик рассказывает преподавателю решенные им задачи. Беседа напоминает экзамен, с тем различием, что ученик рассказывает только то, что сам сделал. Отметка за это не ставится. Одновременно может происходить консультация, но она занимает, как правило, небольшую долю времени.

Большинство задач первой части курса, до действительных чисел, не обязательно. Начиная с действительных чисел, большинство задач обязательно. Обязательность понимается в том смысле, что мы не переходим к следующему разделу, пока большинство учеников не решат почти все задачи. Мы не практикуем искусственного ускорения темпа, то есть прохождения курса с большей скоростью, чем ученики могут его усвоить при самостоятельной спокойной работе.

Контрольные работы в большинстве случаев разрешается несколько раз переделывать, пока не будет написано аккуратное решение. При этом мы не возражаем, чтобы каждый решил задачи своими методами и не узнал методов, примененных другими. Некоторые контрольные не завершают тему, а начинают ее.

Естественное требование к задачникам предлагаемого типа состоит в том, чтобы задачи были хорошо подогнаны друг к другу, т. е. чтобы каждая задача была хорошо приспособлена для решения дальнейших задач. Однако слишком хорошую подогнанность мы считаем вредной: чрезмерная гладкость в задачнике обернется беспомощностью в дальнейшей работе математика. Часто мы нарочно разрушали цепочки задач, в которых каждая задача подсказывает метод решения следующей.

В нашем курсе основная техника математического мышления отрабатывается на понятии предела. Можно было бы положить в основу понятие непрерывности, что и сделано в некоторых классах нашей школы. Фактически тема предела начинает понемногу появляться в задачах предыдущих тем. Несмотря на такую подготовку, понятие предела все же оказывается в логическом отношении намного труднее, чем все, что встречается в предыдущих темах.

Существенную трудность для учащихся представляет не только само решение задачи, но и запись решения. От тех учеников, которые нечетко рассказывают устно, обязательно требовать, чтобы решения записывались. Если решение записано плохо, мы возвращаем его для доработки. Ничего, если способ решения не самый удачный, мы предоставляем ученику довести до конца его собственное решение.

Иногда у нас происходят занятия обычного типа, когда преподаватель у доски беседует с классом. Таких занятий бывает очень мало — 2—5 в полугодие (например, вводная лекция к теме «Неравенства», где говорилось о натуральном числе).

При такой системе проведения занятий возникают следующие проблемы:

1) В классе, где одновременно 4 ученика рассказывают задачи своим преподавателям, бывает шумно. Мы завели у себя в школе «тихую комнату» (вроде читальни, но без книг). В «тихой комнате» вовсе запрещено разговаривать. В основном классе тоже становится тихо, так как там остается меньше народу.

2) Ученики решают задачи по-разному, причем часто плохим способом. Конечно, когда задача как-то уже решена, можно рассказать ученику лучшее решение, но не нужно навязывать учащимся свои привычные рассуждения.

3) Ученики идут в разном темпе. К этому мы приспособились так: скорость поступления новых задач мы берем такую, чтобы с ней справлялись самые тихоходные. Тогда у части класса образуется резерв времени, который мы используем для факультативных тем и кружков. Их тоже можно проводить «в листочках», так что добавочных часов они не требуют.

4) Необходимо много преподавателей. У нас учителями анализа работают научные сотрудники ряда институтов, аспиранты и студенты. Привлечение лучших студентов — резерв, который может быть использован во многих местах.

Хотя мы редко задаем формально обязательные задания (на дом), необходимым условием успешности нашей работы является большой резерв свободного домашнего времени учащихся. Перегрузка домашними заданиями по другим предметам делает применение наших методов невозможным.

Решения некоторых задач

Задачи на предел — узловое место курса. Следует добиваться совершенно четких решений, ясного понимания всех определений, умения формулировать противоположные утверждения.

Решение задачи 188. Пусть последовательность $a_n \to +\infty$. Рассмотрим a_1. По определению, существует такое N, что при $n>N$ $a_n>a_1$. Выберем из чисел a_1; a_2; a_3; ...; a_N (их конечное число) наименьшее. Пусть это будет $\overline{a}$: $\overline{a}\leqslant a_1$. Теперь сравним $\overline{a}$ с произвольным a_i. Если $i\leqslant N$, то $\overline{a}\leqslant a_i$ по выбору $\overline{a}$, а если $i>N$, то $\overline{a}\leqslant a_1<a_i$ по выбору N. Но $\overline{a}$ есть член нашей последовательности, и все доказано.

Указание к задаче **207.** Заметим, что $0<e-a_n<\frac{1}{n!}$, т. е. $e-a_n=\frac{\varphi_n}{n!}$, где $0<\varphi_n<1$ при любом n.

Пусть $e=\frac{m}{n}$; тогда $\frac{m}{n}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\varphi_n}{n!}$

Умножим обе части на $n!$. Слева получим целое число, справа — не целое.

Задача **225.** Занумеруем все рациональные числа: r_1, r_2, r_3, ...

Построим функции: $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n} \text{ при } x\geqslant r_n\\ 0 \text{ при } x<r_n\end{cases}$

$$g_n=\sum_{i=\cdot}^{n} f_i; \quad F(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Можно проверить, что $F(x)$ — искомая функция.

В задачах **235—245** необходимо получить доказательство, либо пример.

Задачи на показательную функцию вызывали некоторые трудности, для их решения требуется полное овладение техникой пределов и сечений.

Следует очень подробно проработать задачи **286—305** (кроме задачи **292,** которая очень трудна). Каждое свойство непрерывных функций необходимо доказывать несколькими способами. На этот раздел программы ушло очень много времени, и для некоторых он оказался трудным. Поэтому в начале X класса этот раздел был доработан в задачах «Повторение», которые были даны на дом и затем проверены у каждого ученика. Так что в итоге материал был усвоен полностью.

Задачи **311** явились подготовительными к теме «Асимптоты».

В задачах **314** и **320** необходимо использовать то обстоятельство, что площадь отсекаемой части многоугольника есть непрерывная функция от положения прямой или многоугольника.

Задача **322** довольно трудна. Следует сперва доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

В задаче **335** доказывается, что функция $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, а поскольку $f(1)=e$, то $f(x)=e^x$ (см. задачу **304**).

Много времени было потрачено на отработку вычисления пределов. Требовались не только правильные, но и самые короткие решения с широким использованием «*o* малых».

Под рубрикой «Контрольная» (задачи **353—371**) приведены все три варианта (по 6 примеров каждый).

Назначение задач **372—379** — дать понятия о скоростях роста и убывания функций и показать, как в несколько этапов решается трудная задача (задача **379**).

В задачах **387—392** необходимо получить доказательство или пример.

Задача **394**а имеет различные решения. Приведем наиболее короткое.

Рассмотрим $g(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1$; функция $F(x)=f(x)-g(x)$ обращается в нуль в точках 0 и 1. Легко видеть, что между этими точками она имеет по крайней мере еще один корень, т. е. $F(0)=F(C)=F(1)=0$, $0<C<1$, но между двумя корнями функции лежит по крайней мере один корень производной, т. е. существуют $C_1 \neq C_2$, такие, что $F'(C_1)=F'(C_2)=0$; аналогично найдется такое C_3 $(C_1<C_3<C_2)$, что $F''(C_3)=0$. Но $F''=f''-g''$; $g''(x)=8$; поэтому в точке $C_3 f''(C_3)=g''(C_3)=8$, и т. д.

После того как понятие производной было усвоено, каждому ученику на дом было дано вычислить производные от 25 элементарных функций.

Формулой Тейлора изучение дифференциального исчисления было закончено. Во втором полугодии X класса изучалась алгебра. Кроме того, на дом давались довольно объемистые задания по построению графиков (около 70 графиков на учащегося, правда, в три приема и в течение длительного времени).

IX КЛАСС

§ 1 *. *Тема.* Конечные суммы, прогрессии, математическая индукция (6 часов)

1. $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Доказать.

2. $1+3+5+\ldots+(2k+1)=?$

3. Доказать, что плоскость, на которой проведено k прямых, можно раскрасить двумя красками так, что каждый кусок раскрашен одной краской, а два куска, имеющие общий участок границы,— различными.

4. Доказать, что число, записанное 3^k одинаковыми цифрами, делится на 3^k.

5. $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=(1+2+3+\ldots+k)^2$. Доказать.

6. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{99}{100}$. Доказать.

---

* Деление на параграфы, весьма условное, имеет чисто служебное назначение — облегчить пользование задачником, очертив, хотя бы приблизительно, естественные границы между отдельными группами задач, не всегда совпадающие с переходами между темами программы.

7. Рассмотрим числа:

1^k	2^k-1^k	$(3^k-2^k)-(2^k-1^k)$	. . . .
2^k	3^k-2^k	$(4^k-3^k)-(3^k-2^k)$	. . . .
3^k	4^k-3^k	. . . .	. . . .
. . .	. . . . . .	. . . .	
. . .	. . . . . .	. . . .	
$(n-1)^k$	$n^k-(n-1)^k$		
n^k	. . . . . .		
. . .			

(Каждый элемент этой таблицы во всех столбцах, кроме первого, есть разность чисел, стоящих слева от него.) Доказать, что все числа, стоящие в $(k+1)$ -м столбце, равны.

8. На сколько частей делят плоскость k прямых в общем положении?

9. На сколько частей делят пространство k плоскостей в общем положении?

[k плоскостей (прямых) находятся в общем положении, если любые три (две) из них пересекаются в единственной точке и ни в какой точке не пересекаются четыре (три) из них.]

§ 2. Принцип математической индукции. Пусть T_1, T_2, T_3 ... — *последовательность теорем. Если*

1. *Верна* T_1 *и*

2. *Верна теорема: «из* T_k *следует* T_{k+1}*», то верны все теоремы последовательности.*

Определение. *Арифметической прогрессией* называется последовательность чисел вида: a, $a+d$, $a+2d$, ...$a+kd$, ...

10. Вычислить сумму первых k членов арифметической прогрессии.

Определение. *Геометрической прогрессией* называется последовательность чисел вида: b, bq, bq^2, ..., bq^n, ...

11. Вычислить сумму k первых членов геометрической прогрессии.

12. Обозначим через Σ_i сумму первых i членов геометрической прогрессии b_1, b_2, ... Пусть $\frac{b_6}{b_2}=16$; $\Sigma_{10}=341$. Найти b_1.

13. Доказать, что $(1+\alpha)^k \geqslant 1+k\alpha$ ($\alpha>0, k$ — натуральное).

14. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=?$

15. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{500}>5$. Доказать.

16. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$. Доказать.

Гармоническим называется ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\ldots .$$

17. Рассмотрим сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{18}+$ $+\frac{1}{20}+\ldots$ (в гармоническом ряде выброшены все слагаемые, в написании которых участвует 9). Доказать, что сумма первых n чисел при любом n меньше 100.

18. $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$. Доказать.

19. Что больше: 300! или 100^{300}?

Трудная задача.

20. Рассмотрим числа 2, 3, 7. Они обладают следующим свойством: $(2\cdot3+1):7$, $(2\cdot7+1):3$ и $(3\cdot7+1):2$—целые числа. Доказать, что никакая другая тройка натуральных чисел, больших 1, не обладает этим свойством.

21. $1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\frac{1}{4^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{k^{3/2}}=S$.

Доказать, что существует такое C, что при любом k сумма S меньше C.

22. Фигура называется *выпуклой*, если в нее целиком входит отрезок, соединяющий любые две ее точки. На плоскости дано n выпуклых фигур. Если любые три из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку. Доказать.

23. Решить в целых числах: $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$.

24. $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$. Доказать.

25. $\Pi_{19}=71$; $b_{10}=?$ $(\Pi_n=b_1\cdot b_2\ldots\cdot b_n)$.

26. $\Sigma_{10}(\Sigma_{30}-\Sigma_{20})-(\Sigma_{20}-\Sigma_{10})^2=?$ (В обозначениях задачи 12.)

27. Пусть $a_1, a_2, a_3\ldots$—арифметическая прогрессия. Обозначим: $S_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$. $S_5=S_{10}$; $S_{15}=?$

§ 3. *Тема.* Комбинаторика, бином Ньютона (14 часов)

28. В комнате 5 лампочек, каждая из которых может гореть и не гореть. Сколько существует различных способов освещения (два способа считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампочки).

29. У мамы два яблока и три груши. Каждый день она выдает ребенку по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать? (Яблоки неразличимы и груши неразличимы.)

30. Сколькими способами можно представить n в виде суммы трех натуральных слагаемых (порядок существенен)?

31. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из четырех неповторяющихся звуков?

32. Сколько существует аккордов из четырех звуков?

33. Найти коэффициент при x^{99} в выражении

$$(x-1)(x-2)\dots(x-100).$$

34. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей, не бьющих друг друга?

35. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? Доказать, что число способов расстановки есть квадрат некоторого числа.

36. Сколько существует автомобильных номеров (4 цифры, 3 буквы)?

37. Комиссия состоит из пяти человек. На сейфе несколько замков. и у каждого несколько ключей. Каждые 3 члена комиссии могут открыть сейф, а каждые 2 не могут. Сколько было ключей и замков?

38. Сколько членов получится после раскрытия скобок в выражении $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$?

39 (продолжение задачи **38**). Сколько при этом будет членов, содержащих 3 буквы?

40. В выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$ раскрыты скобки, но не приведены подобные. Определить общее количество членов полученного выражения.

41. В предыдущей задаче приведены подобные. Определить коэффициенты при x^{17} и x^{18}.

Дополнительные задачи.

42. Сколько существует телефонных номеров (шестизначных), в которых найдется цифра 1 и сразу за ней цифра 2?

43. Существует ли 777-гранник, состоящий из одних треугольников? А из треугольников и пятиугольников?

44. Из чисел 1, 2, ..., 2 k выбрано $k+1$ число. Доказать, что одно из выбранных чисел делится на другое.

§ 4. **45.** Сколько делителей имеет число $2\times3\times5\times7\times11$?

46. Сколько делителей имеет число 10!?

Определение. *Треугольником Паскаля* называется таблица:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

. . . .

(по сторонам 1, а каждое из остальных чисел есть сумма двух чисел, стоящих над ним).

Основные задачи.

47. Доказать, что на k-м месте p-й строки треугольника Паскаля стоит коэффициент при x^{k-1} в разложении $(x+1)^{p-1}$.

48. Доказать, что сумма чисел k-й строки треугольника Паскаля равна 2^{k-1}.

Дополнительные задачи.

49. Доказать, что для каждого числа C найдется такое простое p, что $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}$ больше C (в знаменателях все простые числа, не превышающие p).

50. Множество M точек плоскости таково, что не существует прямой, содержащей ровно две точки M. Доказать, что либо M лежит на некоторой прямой, либо содержит бесконечно много точек (либо и то и другое одновременно).

51. Доказать, что $\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!(a+b)!b!}$ — целое число.

§ 5. **52.** Доказать, что $3^k > \frac{(k+1)^k}{k!}$.

53. Доказать, что разложение натурального числа на простые сомножители единственно.

54. Доказать, что простых чисел бесконечно много.

55. Фабрика выпускает погремушки в форме кольца, на которое надеты 8 шариков: 3 красных и 5 синих. Две погремушки считаются различными, если они остаются различными в любом положении, как бы мы их не двигали. Сколько различных погремушек можно сделать?

56. Доказать, что в треугольнике Паскаля существует бесконечно много таких строк, в которых все числа нечетные.

57. Упростить: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$.

58. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(1+3x-3x^2)^{714}\ (1-3x+3x^2)^{713}$.

59. В разложении $(1+7x-x^2)^{1963}$ найти сумму коэффициентов при четных степенях x.

60. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух королей так, чтобы они не били друг друга?

61. В выпуклом k-угольнике никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке (кроме вершин). На сколько частей они делят многоугольник?

62. Сколькими способами можно распределить $3n$ предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил n предметов?

63. Рассмотрим шестизначные числа со следующим свойством: если на каком-нибудь нечетном месте стоит 5, то следующая цифра тоже 5 (разряды нумеруются слева направо). Сколько таких чисел?

Определение. $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^k = 0$ при $n < k$;

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ при } 0 < k < n.$$

64. Доказать, что на k-м месте n-й строки треугольника Паскаля стоит C_{n-1}^{k-1}.

65. Пусть имеется n ламп. Доказать, что число способов освещения, при которых горят k ламп, есть C_n^k.

66. а) Доказать, что $2^k = C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k$.

б) Найти $C_k^0 + C_k^2 + \ldots$.

в) Найти $C_k^1 + C_k^3 + \ldots$.

67. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{k}\right)^p \leqslant 1+\frac{p}{k}+\frac{p^2}{k^2}$ (при $p \leqslant k$).

68. Что больше: $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

69. Что больше: $1{,}000001^{1000000}$ или 2?

70. Что больше: 1001^{999} или 1000^{1000}?

Контрольная работа.

71. Сколькими способами из карточной колоды (36 карт) можно вынуть 6 карт так, чтобы среди них нашелся туз?

72. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 2 белые ладьи и 2 черные так, чтобы белые не били черных?

73. Между каждыми двумя соседними цифрами числа 14641 вставлено k нулей. Доказать, что получился полный квадрат.

74. В разложении $(x^2+x)^{10}$ найти член, содержащий x^7.

75. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом k-угольнике?

Задачи дополнительной контрольной.

76. Сколько различных четных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0; 1; 3; 5; 4?

77. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет различного достоинства?

78. В классе изучается 10 предметов; в среду 6 уроков, при этом все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?

§ 6. *Тема.* **Неравенства** (20 часов)

Неравенством называется з а п и с ь вида $a<b$, где a и b — числа. Эта запись читается так: «a меньше b» и понимается в общепринятом смысле. Таким образом, неравенство есть запись некоторого утверждения о двух числах. Так, верны следующие утверждения: $2<5$, $-1<0$, $-10<\frac{1}{10}$ и т. п., и не верны: $-\frac{1}{10}<-10$ и т. п. Наряду со знаком $<$ (меньше) употребляется знак $>$ (больше); записи «$a<b$» и «$b>a$» мы будем считать равнозначными.

Записи «$a\leqslant b$» и «$b\geqslant a$» мы также будем называть неравенствами. Смысл их таков: «$a\leqslant b$» есть запись следующего утверждения: «верно одно из двух утверждений: $a<b$ или $a=b$» (читается: a меньше или равно b). Тот же смысл имеет неравенство «$b\geqslant a$». (У п р а ж н е н и я: верно ли неравенство $2\leqslant 2$? $2\leqslant 3$?) Конечно, когда мы говорим: «верно неравенство $2<10$», то имеем в виду: «неравенство $2<10$ есть запись верного утверждения». Заметим, что «неравенство» — это не то же самое, что «отсутствие равенства». (К неправильному пониманию этого термина в известной степени подталкивает само строение слова «неравенство».)

Такими первоначальными сведениями о неравенствах обладает по существу всякий человек. Это объясняется тем, что понятия «меньше» и «больше» принадлежат к числу наиболее употребительных в обиходе понятий. Этого интуитивного понимания в принципе достаточно для решения всех содержательных задач предлагаемой темы. Но при таком подходе доказывать, что $(a-b)^2\geqslant 0$, не следует, в то время как неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ уже требует некоторого доказательства.

Какие же факты нужно доказывать? На первый взгляд логична точка зрения, что неочевидные факты нужно доказывать исходя из очевидных. Но где проходит граница между очевидными и неочевидным? Если мы не зафиксируем эту границу, понятие доказательства расплывется.

Например, в геометрии — что считать более очевидным: тот факт, что через точку, лежащую вне прямой, проходит только одна параллельная к этой прямой, или то, что через точку можно провести только один перпендикуляр к прямой?

В математике выходят из этого затруднения следующим образом. Составляется список основных фактов (аксиом), которые считаются «очевидными»; все остальные факты считаются «неочевидными». При этом вовсе не требуется, чтобы аксиомы были действительно очевиднее теорем с точки зрения здравого смысла.

Такой способ изложения и принят у нас в теме «Неравенства». Четыре основных свойства неравенства выделены в качестве аксиом.

При этом оказалось, что все остальные верные утверждения о неравенствах можно вывести из этих аксиом. Например, оказалось, что неравенство $0<1$ можно доказать. С точки зрения здравого смысла это столь же очевидный (или даже более очевидный) факт, как и, например, 4-я аксиома. Но неравенство $0<1$ можно вывести из аксиом, поэтому мы не включаем его в число основных фактов. Можно вообще забыть о том, что означает неравенство (забыть общепринятый смысл понятия «меньше») и помнить только аксиомы, а затем из аксиом с помощью формальных рассуждений вывести и самый смысл понятия «меньше» (выяснению смысла знака $<$ посвящены задачи **79—84**). Иначе говоря, если некоторое соотношение между числами, обозначаемое значком $<$, удовлетворяет выбранным четырем аксиомам, то это и есть соотношение «меньше».

В теме «Неравенства» мы считаем известными правила действий над целыми и рациональными числами. Этот момент требует пояснений.

Строго говоря, если мы не хотим аккуратно строить систему целых и рациональных чисел, то мы должны были бы по крайней мере точно выписать, какими свойствами целых и рациональных чисел и действий с ними мы будем пользоваться. Однако это увело бы нас в сторону. Поэтому ограничимся нестрогим изложением ситуации. Что значит, что мы «знаем целые и рациональные числа и правила действий с ними»? Это значит, что:

1. Мы умеем считать: 1, 2, 3, 4, ... (в частности, знаем принцип математической индукции). Кроме того, вводим в обиход символ 0 и символы -1, -2, -3, -4, ...

Символы 1, 2, 3, 4, ... называем *натуральными числами.*

(Заметим, что понятие «меньше», в частности «меньше 0», пока не использовано.)

2. Для любых двух целых чисел a и b мы можем вычислить $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$ и в некоторых случаях $\frac{a}{b}$, причем выполняются обычные свойства этих операций, например $a+b=b+a$, $a(b+c)=ab+ac$, и т. д.

3. Мы вводим в рассмотрение дроби (рациональные числа), т. е. символы вида $\frac{p}{q}$, где p, q — целые и $q\neq0$. Две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ считаются равными, если $p\cdot n=q\cdot m$. Дробь $\frac{p}{1}$ отождествляется с числом p.

4. Для любых двух дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ мы можем вычислить сумму, разность, произведение и частное (если $m\neq0$), причем эти операции снова обладают обычными свойствами. Например, считается известным, что $(-2)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$; при этом не может быть речи о том, что $-2<0$, так как понятие «$<$» не вводи-

лось: оно не нужно для определения операций. Правило знаков «минус на минус дает плюс» — это не то же самое, что утверждение «произведение двух чисел, меньших нуля, есть число, большее нуля, или положительное». Еще считаются известными факты: $4\neq 5$ и т. п.

§ 7. Основные свойства отношения «меньше» (аксиомы неравенства)

1. Для любых двух чисел a и b верно одно и только одно из утверждений: $a<b$, $a=b$, $b<a$.

2. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

3. Если $a<b$, то $a+c<b+c$. (Напоминаем, что правила действий с целыми и рациональными числами мы считаем известными.)

4. Если $a<b$ и $0<c$, то $ac<bc$.

Задачи.

79. Доказать, что $0<1$.

80. Всякое натуральное число положительно (положительное — значит большее нуля). Доказать.

81. Если k — натуральное, то $(-k)$ — отрицательное (отрицательное — значит меньшее нуля). Если $p-k>0$, то $p>k$. Доказать.

Замечание: $a>b$ означает $b<a$.

82. Если p и k — натуральные, то $\frac{p}{k}>0$, $-\frac{p}{k}<0$.

Определение. *Модулем* x (обозначается $|x|$) называется: x, если $x\geqslant 0$ и $-x$, если $x<0$.

83. Доказать, что $|xy|=|x|\cdot|y|$; $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

84. Пусть p_1, k_1, p_2, k_2 — целые числа и k_1 и k_2 отличны от 0. Обозначим $\frac{p_1}{k_1}$ через a, $\frac{p_2}{k_2}$ через b. Тогда

1) если $a<0$, $b>0$, то $a<b$;

2) если $a>0$, $b>0$ и $|p_1|\cdot|k_2|>|k_1|\,|p_2|$, то $a>b$;

3) если $a<0$, $b<0$ и $|a|>|b|$, то $a<b$.

85. Если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. Когда достигается равенство?

86. Найти наименьшее значение выражения $a+\frac{9}{a}$.

87. Если $a>0$ и $b>0$, то $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. Доказать.

88. Доказать, что $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$. Указать геометрический смысл.

§ 8. Вспомогательные свойства отношения неравенства

89. Если $a<b$, $c<d$, то $a+c<b+d$. Доказать.

90. Если $0<a<b$, то $a^2<b^2$. Доказать.

91. Если $0<a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$. Доказать.

(Корни берутся положительные.)

Задачи о независимости аксиом (дополнительные).

92. Доказать, что аксиому 4 нельзя доказать, исходя из остальных.

93. Доказать, что аксиому 3 нельзя доказать, исходя из остальных.

94. Доказать, что аксиому 2 нельзя доказать, исходя из остальных.

[Во всех случаях пока предполагается, что рассматриваемое нами отношение неравенства (точнее, отношение «меньше») определено в области рациональных чисел.]

Система аксиом 1, 2, 3, 4 обладает следующим свойством: ни одна из них не может быть выведена (доказана), исходя из остальных. Этот факт называется *независимостью* аксиом.

Приведем решение задачи **92**.

Введем отношение $a \prec b$, определяемое следующим образом: $a \prec b$, если $b<a$ ($<$ — обычный знак «меньше»). Иначе говоря, введем в качестве «меньше» обычный знак «больше». Тогда аксиомы 1, 2, 3, в которых вместо $<$ поставлено $\prec$, выполняются (легко видеть), а аксиома 4 не выполняется, так как $-1<0$, т. е. $0 \prec -1$ (1), и в то же время $0<1$, т. е. $1 \prec 0$ (2), в то время как из аксиомы 4, применяя ее к (1), имеем $0 \prec 1$, что в сопоставлении с (2) противоречит аксиоме 1.

Но если существует понятие (а именно, $\prec$), для которого выполняются аксиомы 1, 2, 3 и не выполняется 4, то аксиома 4 не может быть доказана, исходя из остальных.

§ 9. Важные задачи.

95. Доказать, что найдется такое k, что при любом $n>k$, $2^n>n^{10}$.

96. Доказать, что найдется такое k, что при всех $n>k$ $\frac{2n^2+2n+1}{3n^2-2}-\frac{2}{3}<\frac{3}{100}$.

97. Доказать, что найдется такое k, что при всех $n>k$ $1000\cdot 2^n<n!$.

98. Пусть $|q|<1$. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k, что при любом $n>k$ имеет место неравенство $|q|^n<\varepsilon$.

Дополнительные задачи.

99. В городе 57 автобусных маршрутов. На каждом маршруте не меньше трех остановок. С любой остановки на любую можно попасть без пересадки. Для любых двух маршрутов найдется ровно одна общая остановка. Сколько остановок на каждом маршруте?

100. Придумать такое алгебраическое действие, т. е. правило, по которому двум числам a и b однозначно сопоставляется третье, обозначаемое через $a \otimes b$, чтобы было:

1) $a \otimes b = b \otimes a$,
2) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$,
3) $(a \otimes b) + c = (a+c) \otimes (b+c)$.

§ 10. Важные задачи (полезные для дальнейшего, но трудные, а потому не обязательные).

101. Пусть $a_i \geqslant 0$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Доказать.

102. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 - 3x + 1$.
Доказать, что найдется такое рациональное p, что $P(p) < \frac{1}{1000}$.

103. Найти такое $\delta > 0$, чтобы при всяком неотрицательном k, меньшем $\frac{1}{\delta}$, было $|P(k\delta) - P((k-1)\delta)| < \frac{1}{10}$.

104. Существует ли такое δ, чтобы неравенство предыдущей задачи выполнялось при любом k?

Обязательные задачи.

105. Доказать, что $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

106. Решить неравенство $\frac{(x-2)(x+1)(x+3)}{(x-5)} > 0$.

Пояснение. Говорят, что число x_0 удовлетворяет неравенству, содержащему x, если в результате подстановки в это неравенство числа x_0 вместо x получается верное неравенство. Решить неравенство, содержащее x,— значит дать явное описание всех x, которые ему удовлетворяют.

107. Решить неравенство $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 3$.

108. Дана функция $\Phi(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ и число x_0. Найти такую линейную функцию $p(x) = kx + g$, чтобы было

1) $p(x_0) = \Phi(x_0)$,
2) $p(x) \leqslant \Phi(x)$ при всех x (выразить k и g через a, b, c).

109. $k \cdot p$ человек выстроились в ряды и шеренги (k рядов, p шеренг). Кто выше: самый высокий среди самых низких в шеренге или самый низкий среди самых высоких в ряду?

§ 11. Основные задачи.

110. Доказать, что $|x-a|<b$ тогда и только тогда, когда $a-b<x<a+b$.

111. Пусть трехчлен ax^2+bx+c имеет два различных корня x_0 и x_1, причем a положительно и x_0 меньше x_1. Какой знак принимает трехчлен для x, меньших x_0, какой для x между x_0 и x_1 и какой для x, больших x_1? Что можно сказать о знаке трехчлена, который не имеет корней или имеет только один двойной корень?

112. Доказать, что $p(x)=ax^2+bx+c$ при $a>0$ есть строго выпуклая функция, т. е. $p\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{p(x)+p(y)}{2}$, причем знак равенства может стоять только, если $x=y$.

113. Решить неравенство $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}>2$.

§ 12. Дополнительные задачи.

114. Построить на прямой систему попарно не пересекающихся отрезков единичной длины так, чтобы во всякой арифметической прогрессии нашелся член, лежащий на одном из отрезков.

115. Доказать, что среди треугольников, вписанных в окружность, правильный имеет наибольшую площадь.

116. Среди прямоугольных треугольников с данной гипотенузой найти треугольник с наибольшим периметром.

117. Доказать, что в треугольнике сумма квадратов сторон меньше половины квадрата периметра.

118. Доказать, что $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$.

119. При каком x трехчлен x^2+px+q достигает минимального значения. Найти это значение.

Контрольная работа.

120. Верно ли, что существует бесконечное число таких целых p, что выполняется неравенство:

$$\sqrt{p}+(-1)^p\cdot\sqrt{p-1}<\frac{1}{10}.$$

121. Верно ли, что найдется такое C, что при всех целых k выполняется неравенство: $\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|<C$.

122. Доказать, что при всяком натуральном k имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

123. Верно ли, что для любого C найдется целое k такое, что имеет место неравенство: $k\cdot\sin k>C$?

§ 13. Основные задачи.

124. Доказать, что существует такое p, что $\sqrt[p]{p}<1{,}001$.

125. Найти геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $0<x<y$, б) $0>x>y$, в) $0\leqslant x<y$, г) $0\leqslant x\leqslant y$, д) $1<x^2+y^2<4$, е) $x^2<y$, ж) $2x+5y>0$, з) $x<y$ и $1-x<y$, и) $\sin x<\frac{1}{2}$ и $\sin y\leqslant\frac{1}{2}$. Сделать рисунки.

(Запись $0<x<y$ употребляется как сокращение, заменяющее два неравенства: $0<x$ и $x<y$; требуется, чтобы эти два неравенства выполнялись одновременно, то есть мы ищем такие пары чисел x, y, чтобы выполнялись оба неравенства.)

Дополнительные задачи.

126. На плоскости дана система точек. Допустим, мы хотим каждой паре точек (a, b) [в том числе и парам (a, a)] поставить в соответствие число $\rho(a, b)$ так, чтобы выполнялись требования:

1) $\rho(a, b)$ неотрицательно; 2) $\rho(a, a)=0$; 3) $\rho(a, b)=0$ влечет $a=b$; 4) $\rho(a, b)=\rho(b, a)$; 5) $\rho(a, b)+\rho(b, c)\geqslant\rho(a, c)$.

Доказать, что эта система требований непротиворечива, и исследовать ее независимость.

127. Доказать, что два равновеликих параллелограмма можно разрезать на равное число попарно конгруэнтных фигур.

§ 14. *Тема.* Некоторые сведения о множествах (4 часа)

128. Доказать, что между двумя рациональными числами найдется бесконечно много рациональных чисел.

129. Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Доказать.

130. Не существует рационального числа, квадрат которого равен 5. Доказать.

131. Если $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, то $\sqrt{n}$ — целое. Доказать.

Определение. Говорят, что между множествами M_1 и M_2 установлено *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу множества M_1 поставлен в соответствие один определенный элемент множества M_2 таким образом, что при этом каждый элемент множества M_2 оказался поставлен в соответствие одному и только одному элементу множества M_1.

Определение. Взаимно однозначное соответствие двух числовых множеств M_1 и M_2 называется *подобным* соответствием, если оно сохраняет порядок, т. е. из неравенства $x_1<y_1$ следует неравенство $x_2<y_2$ (x_2 и y_2 — элементы M_2, соответствующие

x_1 и y_1). Пусть теперь M_1 есть множество рациональных чисел, бо́льших 0 и меньших 1.

132. Можно ли установить подобное соответствие между M_1 и множеством M_2 рациональных чисел, больших 0 и меньших 2?

133. Тот же вопрос, если M_2 есть множество рациональных положительных чисел.

134. (Тонкий вопрос.) Тот же вопрос, если M_2 есть множество рациональных чисел, для которых или $0<x<1$, или $2<x<3$.

Определение. Множество M называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между M и множеством натуральных чисел; множество, не являющееся конечным или счетным, называется *несчетным*.

135. Доказать, что множество всех целых чисел счетно.

136. Доказать, что множество всех положительных простых чисел счетно.

137. Доказать, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема. *Множество всех последовательностей из* 0 *и* 1 *несчетно.* (Говорят, что задана последовательность из 0 и 1, если каждому натуральному числу приписан 0 или 1.)

138. Доказать, что множество конечных слов русского алфавита счетно.

139. Множество M состоит из восьмерок, лежащих на плоскости и не пересекающих друг друга (восьмерка — пара касающихся окружностей). Доказать, что M конечно или счетно.

140. Число x_0 называется *максимумом* функции $\varphi(x)$, если существует положительное число d такое, что в интервале $(x_0-d,\ x_0+d)$ $\varphi(x)$ больше всякого другого значения функции в этом интервале. Доказать, что множество максимумов любой функции конечно или счетно.

§ 15. *Тема.* **Действительные числа** (32 часа)

Для строгого изложения анализа необходимо аккуратное построение системы действительных чисел. Дело в том, что математический анализ требует значительно более высокой степени логической подготовки, чем традиционная элементарная математика. Часто случается, что учащийся, успешно справляющийся с задачами из элементарной геометрии, но обладающий плохой логической подготовкой, не может отличить два простых утверждения из анализа, одно из которых верно, а другое неверно. В нашем курсе переход от элементарной математики к высшей сделан по возможности постепенным, в соответствии с чем и уровень логических требований повышается непрерывно. Все же при нашем изложении при переходе к теме «Действительные числа» в этом отношении имеется скачок. Это неприятное обстоятельство у нас было в какой-то степени скомпенсировано тем, что на прохождение темы было отведено много времени. Контрольных работ не проводилось. Для контроля усвоения было задано письменное домашнее задание, состоящее из задач **154**, **160**, **161**, **165**, **170**, **171**, которое долго разбиралось индивидуально с каждым учеником. В зависимости от уровня подготовки и направленности интересов класса можно мыслить различные способы прохождения темы «Действительные числа», отличные от нашего. Один из способов состоит в том, чтобы предложить учащимся выучить действительные числа по книге А. Я. Хинчина «Восемь лекций по математическому анализу» (лекция 1, до лемм) и проверить усвоение у доски. Вообще, нужно заметить, что в каждом из четырех классов нашей школы эта тема проходилась по-своему, и у преподавателей школы нет единого мнения по вопросу, какой способ является наилучшим. Одним из важных психологических результатов прохождения темы должно быть убеждение, что нет «бесконечно малых величин», которые отличны от нуля, но в то же время меньше любого конечного числа.

Определение. Если A и B — подмножества множества M, причем 1) каждый элемент множества M входит в одно и только одно из них, 2) в каждое из этих подмножеств входит хотя бы по одному элементу, то говорят, что подмножества A и B образуют *разбиение* множества M.

Множество рациональных чисел обозначим через P.

Определение. Разбиение множества P на два подмножества A и B называется *сечением* множества P, если каждый элемент одного подмножества меньше каждого элемента другого подмножества. Подмножество, содержащее меньшие элементы, называется *нижним классом* сечения, другое подмножество — *верхним классом*.

Сечение обозначается так: $(X_н | X_в)$. Сечения бывают четырех типов:

1) в $X_н$ есть наибольший элемент, в $X_в$ нет наименьшего;
2) в $X_н$ нет наибольшего элемента, в $X_в$ есть наименьший;
3) в $X_н$ нет наибольшего элемента, в $X_в$ нет наименьшего;
4) в $X_н$ есть наибольший элемент, в $X_в$ есть наименьший.

§ 16. Задачи.

141. Привести пример сечения 1-го типа, 2-го типа.

142. Доказать, что не существует сечений 4-го типа.

143. Доказать, что если существует подобное соответствие, которое требуется в задаче **134**, то оно порождает сечение 3-го типа в множестве M_1.

144. Отнесем к классу $X_н$ все отрицательные рациональные числа и все такие рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а к классу $X_в$ — все такие положительные рациональные числа, квадрат которых больше 2.

Доказать, что это сечение. Доказать, что оно 3-го типа.

145. Доказать утверждение: если два сечения $(X_н|X_в)$ и $(Y_н|Y_в)$ не совпадают, то имеет место одно и только одно из двух обстоятельств:

a) $X_н$ входит в $Y_н$, $Y_в$ входит в $X_в$; b) $Y_н$ входит в $X_н$, $X_в$ входит в $Y_в$.

146. Пусть $(X_н|X_в)$—сечение. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon>0$ найдутся числа a из $X_н$ и b из $X_в$ такие, что $|b-a|<\varepsilon$. Доказать.

Определения: 1) *Действительным числом* называется сечение множества рациональных чисел.

2) Действительные числа $x=(X_н|X_в)$ и $y=(Y_н|Y_в)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда

a) либо $X_н=Y_н$, $X_в=Y_в$ (то есть когда они совпадают),

b) либо в $X_н$ есть наибольший элемент a, в $Y_в$ есть наименьший элемент b и $a=b$,

c) либо в $Y_н$ есть наибольший элемент a, в $X_н$ есть наименьший элемент b и $a=b$.

Определение. Сечение 3-го типа называется *иррациональным числом;* сечения 1-го и 2-го типов называются *рациональными действительными числами* (наибольший элемент $X_н$ в первом случае и наименьший элемент $X_в$ во втором называются рациональными числами, соответствующими данному рациональному действительному числу.

Замечание. До задачи **159** включительно мы делаем различие между рациональными числами и рациональными действительными числами.

Определение. Пусть $x=(X_н|X_в)$ и $y=(Y_н|Y_в)$ — действительные числа. Говорят, что x *меньше* y, если найдется два рациональных числа $p_1\neq p_2$, принадлежащих одновременно $X_в$ и $Y_н$.

147. Пусть $x_1=x_2$ и x_1 меньше y. Доказать, что x_2 меньше y. Почему для определения неравенства в области действительных чисел нужно это утверждение?

148. Доказать, что среди действительных чисел выполняется первая аксиома неравенства.

149. Доказать, что выполняется вторая аксиома (транзитивность).

150. Доказать, что между любыми двумя действительными числами найдется бесконечно много рациональных действительных чисел.

Определение. Пусть $x=(X_н|X_в)$ и $y=(Y_н|Y_в)$ — действительные числа. Определим сечение $z=(Z_н|Z_в)$ следующим образом: к классу $Z_н$ отнесем всякое такое рациональное число p, что найдется a из $X_н$ и b из $Y_н$ такие, что $p<a+b$, а к классу $Z_в$ — все остальные рациональные числа. (Докажите, что это сечение.) Сечение z называется *суммой*

x и y и обозначается через $x+y$ (если есть другое действительное число, равное z, то оно тоже называется суммой x и y).

Определение. Пусть $x=(X_н|X_в)$ и $y=(Y_н|Y_в)$. Если $X_н$ состоит из элементов $Y_в$, взятых со знаком —, а $X_в$ — из элементов $Y_н$, взятых со знаком —, то говорят что число y *противоположно* числу x и пишут $y=-x$.

151. Доказать, что $x+(-x)=0$.

152. Рассмотрим сумму двух действительных чисел. Доказать, что если заменить слагаемые на равные им числа, то сумма не изменится (с точностью до равенства).

153. Определить *произведение* действительных чисел.

154. Доказать, что квадрат числа, определенного в задаче **144**, есть сечение, производимое двойкой.

Дополнительное упражнение.

155. Определить разность и частное действительных чисел.

156. Пусть x и y — рациональные числа, x_1 и y_1 — соответствующие им рациональные действительные числа. Тогда, если x меньше y, то x_1 меньше y_1.

157. Доказать, что сложение рациональных чисел и соответствующих им рациональных действительных чисел приводят к соответствующим результатам.

158. То же для умножения.

Дополнительное упражнение.

159. То же для разности и частного.

Замечание. Теперь мы не будем делать различия между рациональными числами и соответствующими им рациональными действительными числами.

160. Доказать, что в области действительных чисел верна аксиома 3 для неравенства («к обеим частям неравенства можно прибавить равные числа»).

161. Доказать, что верна аксиома 4 (об умножении неравенства на положительное число).

162. Доказать, что в области действительных чисел $a+b=b+a$.

Примечание. Аналогично доказываются остальные свойства действий.

§ 17. **163.** Доказать, что сечения в области действительных чисел не бывают 3-го типа.

Определение. Пусть a и b — действительные числа и $a<b$. *Отрезком* $[a, b]$ называется множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a\leqslant x\leqslant b$. Если в последовательности отрезков A_1, A_2, ... каждый отрезок, начиная со второго, принадлежит предыдущему, то говорят, что это *система вложенных отрезков*.

164a. Доказать лемму: система вложенных отрезков имеет общую точку.

164b. Система вложенных отрезков называется *стягивающейся,* если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что длина n-го отрезка будет меньше ε, как только $n>N$. Доказать, что стягивающаяся система вложенных отрезков имеет одну и только одну общую точку.

Запись действительного числа с помощью десятичной дроби

(для простоты рассматриваются положительные числа)

1) Обозначим через Π множество символов вида $a_1a_2...a_n,k_1k_2...$, где a_i и k_i могут принимать значения 0, 1, 2, ... , 9 (a_1 может равняться 0 только при $n=1$), и хотя бы одно из чисел a_i, k_i отлично от 0. Эти символы называются *положительными десятичными дробями.* (Дробь всегда считается бесконечной, даже если она кончается последовательностью из одних нулей.)

2) Дробь называется *простоватой,* если начиная с некоторого места в ней идут одни нули или одни девятки.

3) Если $x_{(0)}$ и $x_{(9)}$ — две простоватые дроби, причем в них некоторое количество первых знаков совпадает (это количество может равняться 0), потом в $x_{(9)}$ идет какая-то цифра p, а затем девятки, а в $x_{(0)}$ идет $p+1$, а затем все нули, то эти дроби называются близнецами.

4) Определим множество D следующим образом: а) всякая дробь из Π, не являющаяся простоватой, входит в D; всякая пара близнецов входит в D (как один элемент множества).

165. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством D и множеством всех положительных действительных чисел (так, чтобы это соответствие не противоречило общепринятому употреблению десятичных дробей).

Аналогично строится множество D_2 для двоичных дробей (записываемых нулями и единицами).

166. Задача, аналогичная **165**, но для двоичных дробей.

167. Определить сумму двух десятичных дробей так, чтобы при этом соответствующие действительные числа складывались.

168. Доказать, что рациональные числа соответствуют периодическим дробям.

169. (Дополнительная задача для тех, кто знает систему аксиом геометрии.) Установить взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками прямой (пользуясь аксиомами геометрии).

§ 18. **170.** Пусть x_1, x_2, ..., x_k — монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность. Доказать, что среди чисел, больших всех x_n, есть наименьшее. (Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ называется монотонно возрастающей, если $x_i < x_{i+1}$ для всех i; ограниченной сверху, если найдется такое C, что $x_i < C$.

171. Пусть X_p — периметр правильного 2^p-угольника, вписанного в окружность диаметра 1, Y_p — то же для описанного многоугольника. Доказать, что существует число π, заключенное между всеми X_p и Y_p, и что оно только одно.

§ 19. *Тема.* Предел (26 часов)

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, если для каждого положительного числа ε найдется номер k такой, что при всех $n > k$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$. Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или просто $\lim x_n = a$, а также $x_n \to a$.

Некоторые последовательности, используемые в следующих задачах

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(2) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, \ldots$

(3) $x_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k}$ (x_k — число, стоящее на k-м месте последовательности)

(4) $x_k = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^k$

(5) $1, 1, 1, 1, \ldots$

(6) $1, -1, 1, -1 \ldots$

(7) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \ldots$

(8) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

(9) $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{11}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{3} \ldots$ (знаменатель дроби, стоящий на четном месте, равен числу знаков знаменателя предыдущей дроби).

(10) $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \ldots$

172. Доказать, что 0 есть предел последовательностей (1), (2), (8), (9).

173. Найти пределы последовательностей (3), (4), (10).

174. Доказать, что 1 не есть предел последовательности (1).

175. Имеют ли пределы последовательности (5), (6), (7)?

Определение. Точка x_0 называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности точки x_0 найдется бесконечно много членов последовательности. (*Окрестностью* точки x_0 называется множество точек x таких, что $x_0-h_1<x<x_0+h_2$.)

176. Придумать такую последовательность, чтобы число a было предельной точкой этой последовательности, но не было ее пределом.

177. Придумать такую последовательность, чтобы все натуральные числа были ее предельными точками.

178. Придумать последовательность, которая удовлетворяет условиям предыдущей задачи и в которой нет при этом целых чисел.

179. Придумать последовательность, для которой все числа вида $^1/_n$ являются предельными точками.

180. Придумать последовательность, для которой все рациональные числа являются предельными точками.

§ 20. **181.** Написать, что означает, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$ (не употребляя отрицаний).

182. Выяснить, что означают следующие 16 условий (л — «для любого», н — «найдется такое ..., что ...»):

1. н $\varepsilon>0$ н k н $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
2. н $\varepsilon>0$ н k н $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
3. н $\varepsilon>0$ н k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
4. н $\varepsilon>0$ н k л $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
5. н $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
6. н $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
7. н $\varepsilon>0$ л k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
8. н $\varepsilon>0$ л k л $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
9. л $\varepsilon>0$ н k н $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
10. л $\varepsilon>0$ н k н $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
11. л $\varepsilon>0$ н k л $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
12. л $\varepsilon>0$ н k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
13. л $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
14. л $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
15. л $\varepsilon>0$ л k л $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$
16. л $\varepsilon>0$ л k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

Определение. Точка a называется *точкой прикосновения* последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности точки a найдется хотя бы один член последовательности $\{x_n\}$.

183. Может ли a быть точкой прикосновения последовательности $\{x_n\}$, но не быть при этом ее предельной точкой?

184. Доказать, что условия

1) л $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n-a|>\varepsilon$

и

2) л $\varepsilon>0$ л k н $n>k$ $|x_n|>\varepsilon$

эквивалентны при любом a: если последовательность удовлетворяет одному из них, то она удовлетворяет и другому.

185. Доказать эквивалентность условий:

1) н $\varepsilon>0$ л k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
2) н $\varepsilon>0$ н k л $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$
3) н $\varepsilon>0$ л n $|x_n-a|<\varepsilon$
4) н $\varepsilon>0$ л n $|x_n|<\varepsilon$

186. Контрольная называется легкой, если на каждой парте найдется ученик, который решил все задачи. Сформулировать определение трудной контрольной (трудная — значит не легкая).

187. Контрольная называется легкой, если в каждом варианте найдется задача, которую решили все ученики, пишущие этот вариант. Сформулировать определение трудной контрольной.

§ 21. **188.** Доказать, что если последовательность стремится к $+\infty$, (т. е. л ε н k л $n>k$ $x_n>\varepsilon$), то среди принимаемых ею значений найдется наименьшее.

189. Доказать, что если последовательность стремится к числу a, то среди принимаемых ею значений либо найдется наименьшее, либо наибольшее, либо и то и другое.

190. Доказать следующее утверждение: если $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность и a — ее предельная точка, то a есть предел последовательности $\{x_n\}$.

191. Доказать, что если $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $b\neq a$, то b не есть предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

192. Доказать, что $\dfrac{2n-1}{n^2+1}\to 0$.

193. Доказать, что $\dfrac{n}{2^n}\to 0$.

194. Доказать, что $\dfrac{2^n}{n!}\to 0$.

195. Доказать, что $q^n\to 0$, если $|q|<1$.

196. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i\to\dfrac{1}{1-q}$, если $|q|<1$.

§ 22. **197.** Доказать неравенство $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

198. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен a и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует и равен b, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ существует и равен $a+b$. Доказать.

199. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n-\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Доказать.

200. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Доказать.

201. Аналогичная теорема для частного. Написать формулировку и доказать.

202. Если $\lim x_n > 0$, то все x_n, начиная с некоторого, больше 0. Доказать.

203. Доказать, что предел последовательности есть ее предельная точка.

204. Если последовательность монотонно возрастает и ограничена, то она имеет предел. Доказать.

205. Всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку. (Последовательность ограничена, если существует такое C, что $|a_n| < C$ при любом n.)

206. Доказать сходимость последовательности $\{a_i\}$, где $a_i = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{i!}$.

Ее предел обозначим через e. Доказать, что $2 < e < 3$.

207. Доказать, что e — иррациональное число.

§ 23. Определения

1. Пусть $a < b$. *Интервалом* (a, b) называется множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

2. *Окрестностью* точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.

3. *ε-окрестностью* точки x называется интервал длиной 2ε, центром которого служит точка x; иными словами, ε-окрестностью точки x называется множество чисел y, удовлетворяющих условию $|x - y| < \varepsilon$.

4. Пусть M — множество на прямой. Точка x называется *предельной точкой* M, если в любой окрестности точки x найдется точка множества M, отличная от x (эквивалентное определение: если в любой окрестности точки x найдется бесконечно много точек из M).

5. Множество M называется *ограниченным*, если существует число C такое, что для любого x из M имеет место неравенство: $x| <| C$.

6. Множество M называется *ограниченным сверху*, если существует число C такое, что для любого x из M имеет место неравенство $x < C$.

6а. Множество M называется *ограниченным снизу*, если существует число C такое, что для любого x из M имеет место неравенство $C < x$.

7. Множество называется *непустым*, если в нем есть хотя бы один элемент.

8. Число C называется *точной верхней гранью* множества M, если выполнены два условия:

а) для всякого x из M имеет место неравенство: $x \leqslant C$;

б) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется x из M такое, что $x > C - \varepsilon$.

(Из задачи **211** следует, что ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.)

Аналогично определяется точная нижняя грань множества (и доказывается ее существование для множества, ограниченного снизу).

9. Определение предела функции $\Phi(x)$ при x, стремящемся к x_0.

Пусть M — множество на прямой, $\Phi(x)$ — функция, определенная на M, x_0 — предельная точка M.

Число A называется *пределом функции* $\Phi(x)$ *при* x, *стремящемся* к x_0, если для любого положительного ε найдется положительное δ такое, что для всякого x из M, отличного от x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. Мы не придаем самостоятельного смысла словам: «x стремится к x_0» или «предел функции $\Phi(x)$». Смысл имеет только все сочетание слов: «предел функции $\Phi(x)$ при x, стремящемся к x_0», и этот смысл высказан в вышеприведенном определении.

10. Частный случай определения предела, если M — вся числовая прямая.

Число A называется *пределом функции* $\Phi(x)$ при x, *стремящемся* к x_0, если для любого положительного ε найдется положительное δ такое, что для всякого x, отличного от x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x) - A| < \varepsilon$.

11. Оределение предела в некоторых несобственных случаях.

Пусть M — множество на прямой, не ограниченное сверху, $\Phi(x)$ — функция, определенная на M.

Число A называется пределом функции $\Phi(x)$ при x, стремящемся к плюс бесконечности, если для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для всякого x из M, которое больше δ, выполняется неравенство $|\Phi(x) - A| < \varepsilon$.

В частном случае, если M — натуральный ряд, применяют специальную терминологию: функцию называют *последовательностью*, аргумент пишут в виде индекса и не говорят слов «при x, стремящемся к плюс бесконечности».

Число A называется *пределом последовательности* Φ_n, если для любого положительного ε найдется N такое, что из неравенства $k > N$ следует неравенство $|\Phi_k - A| < \varepsilon$.

§ 24. **208.** Доказать, что если множество ограничено и сверху и снизу, то оно ограничено.

209. Не употребляя отрицаний, сформулировать определение множества, неограниченного сверху.

210. Пусть M ограничено сверху. Верно ли, что среди чисел, которые больше всех чисел из M, найдется наименьшее?

211. Пусть M ограничено сверху и непусто. Верно ли, что среди чисел, не меньших каждого числа из M, есть наименьшее?

212. Существует ли множество, предельными точками которого служат все числа вида $\frac{1}{k}$ (k—натуральное) и только они?

213. Рассмотрим запись: $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)=A$. Символу a будем придавать один из четырех смыслов: 1) a есть число, 2) a есть бесконечность, 3) a есть плюс бесконечность, 4) a есть минус бесконечность.

Символу A также будем придавать эти четыре смысла. Произвольно комбинируя указанные четыре смысла a с четырьмя смыслами A, получим 16 понятий (в том числе 2 старых). Дайте определение каждому из них (через $\varepsilon-\delta$).

§ 25. **214.** Примем снова сокращенные обозначения: л — «для любого», н — «найдется ... такое, что ...».

Рассмотрим условия:

1. л $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
2. л $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
3. л $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
4. л $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
5. л $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
6. л $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
7. л $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
8. л $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
9. н $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
10. н $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
11. н $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
12. н $\varepsilon>0$ л $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.
13. н $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.
14. н $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ л $x\neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\Phi(x)-A|\geqslant\delta$.

15. н $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|<\varepsilon$.

16. н $\varepsilon>0$ н $\delta>0$ н $x\neq x_0$, такое, что $|x-x_0|<\delta$ и $|\Phi(x)-A|\geqslant\varepsilon$.

Среди этих условий найдите определения знакомых вам понятий и их отрицания. Про каждое из остальных условий скажите, что оно означает. Для каждого из условий 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16 приведите следующее исследование.

Рассмотрим скобки вида (x, y), где x — одно из чисел 1, 2, ..., 16, а y — одно из чисел 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16. Скобке поставим в соответствие 1, если из условия x следует условие y, и 0, если из x не следует y.

Рассмотрите все скобки указанного вида. Каждой из них сопоставьте 0 или 1 по указанному правилу. В случае «1» вы должны уметь дать доказательство, а в случае «0» — привести пример.

215. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

§ 26. *Тема.* Непрерывные функции; свойства непрерывных функций (42 часа)

Определение. Пусть $f(x)$ есть функция, определенная при $x\in M$ (M — множество на прямой). $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если: 1) $x_0\in M$ и является предельной точкой M; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Другими словами, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что как только $|x-x_0|<\delta$ ($x\in M$), $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (x_0—предельная точка M). Функция называется *непрерывной на некотором множестве* $M_1\subseteq M$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

216. Сформулировать определение разрывности.

217. Что будет, если в определении непрерывности отбросить требование $\varepsilon>0$. Какие функции окажутся непрерывными по такому определению?

218. Аналогичный вопрос для требования $\delta>0$.

219. Доказать, что функция $y=5x$ непрерывна.

220. Привести пример функции, разрывной ровно в одной точке.

221. Всюду разрывной.

222. Разрывной в точках вида $\frac{1}{n}$ и только в них.

223. Непрерывной ровно в одной точке.

224. Разрывной в рациональных, непрерывной в иррациональных.

Дополнительные задачи.

225. Разрывной в рациональных, непрерывной в иррациональных и притом монотонной.

226. Доказать, что для того, чтобы $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$ ($x_n \in M$ и предельна для M) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

227. Доказать, что достаточно потребовать существование $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для любой последовательности.

§ 27. **228.** Придумать определения:

1) ограниченной функции;
2) $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$;
3) $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} a$.

Определение. Число a называется *правым пределом* функции, заданной на множестве M, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $0<x-x_0<\delta$ ($x\in M$) будет $|f(x)-a|<\varepsilon$. Аналогично определяется левый предел, правая и левая непрерывность в точке.

229. Верно ли, что если $f(x)$ непрерывна при $x>0$ и ограничена, то существует правый предел в точке 0?

Контрольные.

230. Доказать непрерывность функции $y=x^2$ в точке $\frac{3}{2}$ (указать правило нахождения δ по ε).

231. Доказать, что многочлен $y=x^3 \quad x-1$ имеет корень.

232. Доказать, что этот многочлен непрерывен в точке $x=2$.

233. Доказать теорему:
если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$, то существует окрестность точки x_0, в которой всюду $f(x)>0$.

234. Функция $f(x)$, заданная на всей прямой, ограничена и монотонна. Доказать, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

235. $\Phi(x)=p(x)+k(x)$; $p(x)$, $k(x)$ разрывны в точке x_0. Можно ли утверждать, что $\Phi(x)$ разрывна в точке x_0?

236. $\Phi(x)=p(x)+k(x)$; $p(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в этой точке. Можно ли утверждать, что $\Phi(x)$ разрывна в точке x_0?

237. $\Phi(x)=p(x)\cdot k(x)$; $p(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в этой точке. Можно ли утверждать, что $\Phi(x)$ разрывна в точке x_0?

238. $\Phi(x)=p(x)\cdot k(x)$; $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0. Можно ли утверждать, что $\Phi(x)$ разрывна в точке x_0?

239. Пусть функции $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны в точке x_0 и $q(x) \neq 0$. Доказать, что $\Phi(x)=\frac{f(x)}{q(x)}$ непрерывна в точке x_0.

240. Функция $p(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать, что функция $\Phi(x)=|p(x)|$ непрерывна в точке x_0.

241. Пусть функции $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны в точке x_0. Доказать, что функция $\Phi(x)=\max(f(x),\ q(x))$ непрерывна в точке x_0.

242. Пусть функция $\Phi(x)$ непрерывна на всей прямой. Определим функцию $C(x)$ так: пусть $k>0$ — фиксированное число. Положим $C(x)=\Phi(x)$, если $|\Phi(x)| \geqslant k$; $C(x)=k$, если $\Phi(x)>k$, и $C(x)=-k$, если $\Phi(x)<-k$. Доказать, что функция $C(x)$ всюду непрерывна.

243. Функция $\Phi(x)$ разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что функция $(\Phi(x))^2$ разрывна в точке x_0?

244. Функции $f(x)$ и $q(x)$ заданы на всей прямой. Всюду выполняется неравенство $f(x)>q(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=a$, $\lim\limits_{x \to 1} q(x)=b$. Доказать, что $a \geqslant b$. Можно ли утверждать, что $a>b$?

245. Функция называется *выпуклой*, если для любых двух точек ее графика отрезок, соединяющий эти точки, лежит не выше соответствующего участка графика. Что можно утверждать о непрерывности выпуклой функции, заданной на отрезке?

246. $f(x)=\sin x^2$. Найти правило, указывающее, как для этой функции по ε подобрать δ (см. определение непрерывности).

247. Найти такое положительное δ, чтобы из неравенства $|x|<\delta$ вытекало неравенство $\left|\frac{1+x^2\cos x}{1-x\sin x}\right|<10$.

248. Доказать, что функция $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей прямой.

§ 29. **249.** Доказать непрерывность многочлена.

250. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3+5x^2-7x+4}{3x^3-2x^2+x-13}$.

251. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2-2x+5}{-2x^3+11x^2+x+4}$.

252. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$.

253. Дан многочлен $M(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$; доказать, что найдется такое k, что при $|x|>k$ $|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|$.

254. Построить графики функций $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^{100}$. Для функции $y=x^{100}$ оценить область по x, где $y<0{,}1$.

255. Доказать, что предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ равен e. (См. **206.**)

256. Дано: $f(x)\underset{x\to c}{\to} a$, $q(x)\underset{x\to c}{\to} b$, $b\neq 0$. Доказать, что
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{q(x)}=\frac{a}{b}.$$

257. Условия задачи **256** — только $b=0$, $a\neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{q(x)}=\infty$.

258. Найти пределы (m, n — всюду натуральные):

1) $\lim\limits_{x\to c}\frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^4+x^5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+10}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^n-(x+b)^n}{x^{n-1}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

Обосновать возможность сокращения на общий множитель многочленов, стоящих в числителе и знаменателе.

259. Найти предел $\lim\limits_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{x}$, где $P(x)$ — многочлен.

260. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^{100}$ и отрезками $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0\}$ и $\{x=1,\ y\leqslant 1\}$.

261. Пусть $F(x)=f(g(x))$. Если $g(x)$ непрерывна в x_0, а $f(x)$ в точке $g(x_0)$, то $F(x)$ непрерывна в x_0. Доказать.

262. Построить график $\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-1)^2(x-2)}$.

§ 30. Определение показательной функции.

263. Пусть $a>1$, а p натурально. Доказать, что существует и притом только одно такое число $x>0$, что $x^p=a$.

Замечание. Такое x обозначают через $a^{\frac{1}{p}}$ или $\sqrt[p]{a}$.

264. $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$. Доказать.

265. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$. Доказать.

266. $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Доказать.

267. $\left(a^{km}\right)^{\frac{1}{kn}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$. Доказать.

Определение a^r (r — рационально и положительно): $a^r=\sqrt[n]{a^m}$, где $r=\frac{m}{n}$.

268. Доказать, что $(a^{r_1})^{r_2}=(a^{r_2})^{r_1}$.

269. Доказать, что $a^{r_1+r_2}=a^{r_1}\cdot a^{r_2}$, где r_1, r_2 — рациональны.

270. Доказать монотонность функции a^r (r — рационально, $r>0$).

271. Построить график функции a^r ($a>1$, $r>0$ — рационально).

272. Доказать непрерывность a^r, заданной на множестве рациональных $r>0$ ($a>1$).

273. Доказать, что для всяких трех чисел a, b и c, удовлетворяющих условиям $1<b<c$ и $a>1$, найдется рациональное $r>0$ такое, что $b<a^r<c$.

274. Пусть a и x — действительные числа, $a>1$, $x>0$, x—иррационально. Доказать, что существует одно и только одно число y такое, что для любого положительного элемента r_1 нижнего класса числа x $a^{r_1}<y$, а для любого элемента r_2 верхнего класса числа x $a^{r_2}>y$.

Определение. Число y, существование которого доказано в задаче **274**, обозначается через a^x.

Рассмотрим функцию a^x для действительных x.

275. Доказать, что a^x монотонна при $x>0$.

276. Доказать, что a^x непрерывна при $x>0$.

277. Доказать, что при всяких положительных x и y $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

278. В этих же условиях $(a^x)^y=a^{xy}$.

Определение. Положим $a^0=1$ ($a>1$). Если $x<0$, положим $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$.

279. Доказать, что a^x монотонна и непрерывна всюду. Нарисовать ее график.

280. Доказать, что для любых пар x и y $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

Определение. При $0<a<1$ положим $a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ (x — любое).

281. Доказать, что при любом x и $0<a<1$ $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$.

282. Пусть $1<a<b$, $x>0$.
Доказать, что
a) $a^x\leqslant b^x$;
b) $a^x<b^x$.

283. Доказать, что $(a^x)^y=a^{xy}$ при любом $a>0$ и любых действительных x и y.

284. Доказать, что $(ab)^x=a^x\cdot b^x$ при любых $a>0$ и $b>0$ и любом действительном x.

285. Поскольку уже определено число a^x при условии $a>0$, определена и функция x^a при $x>0$. Доказать ее непрерывность при $x>0$.

§ 31. Теоремы о непрерывных функциях

286. Основная теорема Дедекинда. В любом сечении действительных чисел в одном из классов существует максимальный (минимальный) элемент (т. е. не бывает сечений третьего типа). Доказать.

287*. Система вложенных стягивающихся отрезков имеет одну и только одну общую точку. Доказать.

288. Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку. Доказать.

289. Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Доказать.

Определение. Система (множество) интервалов $\{I\}$ называется *покрытием* множества M, если для любого $x \in M$ найдется такой интервал $i \in \{I\}$, что $x \in i$.

Примечание. Система $\{I\}$ может быть конечной, счетной или даже несчетной.

Пример. Рассмотрим множество точек отрезка $[0,1]$, т. е. множество таких x, что $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда: А. Конечное покрытие $\{I\}$ состоит из интервала $(-1, 2)$; В. Счетное покрытие $\{I\}$ состоит из интервала $\left(\frac{4}{5}, 2\right)$ и интервалов вида $\left(-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$, $n=1;\ 2;\ 3\ldots$; С. Несчетное покрытие $\{I\}$ состоит из интервалов вида $(-y, y)$, где $0<y$ (y — действительное число).

Определение. Пусть $\{I\}$ — покрытие множества. Система $\{I'\} \in \{I\}$, если каждый интервал, входящий в $\{I'\}$, входит и в $\{I\}$; если вдобавок $\{I'\}$ покрывает M, то говорят что $\{I'\}$ есть *подпокрытие* $\{I\}$.

290. Из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие. Доказать.

291. Критерий Коши. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое N, что как только $n'>N$, $n''>N$, то $|a_{n'}-a_{n''}|<\varepsilon$. Доказать.

291а. Сформулировать и доказать критерий Коши для функций.

292. Доказать, что не существует функции, непрерывной в рациональных точках и разрывной в иррациональных.

293. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Доказать, что $f(x)$ ограничена, т. е. существует такое C, что для любого $x \in [a, b]$ $|f(x)|<C$.

---

* К этой задаче, фигурировавшей выше под номером **164b**, мы сочли необходимым в этом месте курса вернуться еще раз (и на этот раз добиться, чтобы она была решена всеми учениками).

Примечание. Доказать тремя способами с помощью теорем **287, 288, 290.**

293a. Назовем функцию ограниченной в точке, если у этой точки есть окрестность, в которой функция ограничена. Доказать, что функция, ограниченная в каждой точке отрезка, ограничена на всем отрезке.

294. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; $f(a)<0$, $f(b)>0$. Доказать, что найдется такая точка c, $a<c<b$, что $f(c)=0$.

Примечание. Тремя способами с помощью **287, 289, 290.**

294a. Из теоремы **294** следует, что непрерывная функция принимает все промежуточные значения. Всякая ли функция, принимающая все промежуточные значения, непрерывна?

295. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Доказать, что найдется такая точках x_0, что $f(x_0)=M$ и для любого $x\in[a, b]$ $f(x)\leqslant M$.

Примечание. Воспользоваться **287, 288, 289, 293.**

296. Пусть дана $f(x)$ такая, что для каждого y_0 существует лишь одна точка x_0, для которой $f(x_0)=y_0$. Пусть функция $f^{-1}y$ ставит в соответствие каждому y такое x, что $f(x)=y$. По отношению к $f(x)$ $f^{-1}(y)$ называется *обратной* функцией. Пусть теперь $f(x)$ непрерывна и строго возрастает на $[a, b]$, т. е. при $x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$. Тогда на отрезке $[f(a), f(b)]$ существует, монотонна и непрерывна обратная функция $f^{-1}(y)$. Доказать.

Определение. **Функция,** обратная к функции $y=a^x (a\neq1)$, обозначается $\log_a y$.

296a. Построить графики: $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_{10} x$.

296b. Доказать: 1) $\log_a x_1\cdot x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$; 2) $\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$; 3) $\log_a x^\alpha=\alpha\cdot\log_a x$; 4) $a^{\log_a x}=x$; 5) $\log_a x=\log_a b\cdot\log_b x$.

296c. Доказать, что $\log_a x$ равномерно непрерывна при $x\geqslant1$.

Определение. Пусть $f(x)$ задана на M. Если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что из $|x_1-x_2|<\delta$ $(x_1\in M,\ x_2\in M)$ следует $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, то $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на M.

297. Теорема Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Примечание. Воспользоваться **288** и **290.**

297a. Доказать, что для интервала теорема неверна.

298. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны и ограничены на всей прямой. Доказать, что $f(x)\cdot g(x)$ — равномерно непрерывная функция.

298a. Построить на прямой ограниченную непрерывную, но не равномерно непрерывную функцию.

299. Доказать теорему **290**, пользуясь следующей идеей. «Рассмотрим множество таких точек x, что отрезок $[a, x]$ допускает выбор конечного подпокрытия...».

300. Доказать, что из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие такое, что каждая точка будет покрыта не более чем двумя интервалами.

301. Доказать, что не из всякого покрытия интервала интервалами или отрезками можно выбрать конечное подпокрытие.

302. Назовем покрытие минимальным, если при отбрасывании хотя бы одного интервала оно перестает быть покрытием. Доказать, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выбрать минимальное подпокрытие, а из любого покрытия интервала интервалами — нельзя.

303. Пусть $f(x)$ такова, что для любых x_1 и x_2 $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1-x_2|$. Доказать, что уравнение $f(x)=x$ имеет один и только один корень.

304. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна и для любых x, y:

a) $f(x)=f(2x)$, то $f(x)=\mathrm{const}$;

b) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, то $f(x)=Cx$;

c) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, то $f(x)=a^x$.

305. Пусть $f(x)$ — непрерывна, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ при $x\in[0,1]$; $f(0)=0$; $f(1)=1$ и $f[f(x)]=x$. Доказать, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ $f(x)=x$.

X КЛАСС*

§ 32. О п р е д е л е н и е. ε-окрестностью ($\varepsilon>0$) точки P_0 плоскости с координатами (x_0, y_0) называется множество таких точек $P(x, y)$, что $\rho(P_0, P)<\varepsilon$,

$$\text{где } \rho(P_0, P)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

306. Доказать, что последовательность вложенных прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, и периметрами, стремящимися к нулю, имеет одну и только одну общую точку.

307. Точка (x^*, y^*) называется предельной точкой последовательности (x_n, y_n) если для любого $\varepsilon>0$, ε-окрестность точки (x^*, y^*) содержит бесконечно много точек последовательности (x_n, y_n). Доказать, что всякое бесконечное ограниченное множество на плоскости имеет предельную точку. (Множество M плоскости ограничено, если существует такой круг, что M целиком ему принадлежит.)

* Задачи **306—310** — повторение материала IX класса.

308. Поставим в соответствие каждой точке квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ некоторую ее ε-окрестность. Получим покрытие квадрата. Доказать, что из него можно выбрать конечное подпокрытие.

309. Придумать определение непрерывности функции двух переменных (аналогично определению для функции одного переменного).

310. Построить $f(x, y)$, такую, что при любом y_0 $f(x, y_0)$ непрерывна как функция x, а при любом x_0 $f(x_0, y)$ непрерывна как функция y, но $f(x, y)$ как функция двух переменных разрывна в точке $(0, 0)$.

311. Начертить графики:

$$y=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x+1}, \quad y=\ln(1+e^x), \quad y=\frac{x\cdot e^{x^2}}{e^x-1}.$$

312. Определение асимптоты. Прямая $kx+b$ является при $x\to+\infty$ *асимптотой* графика функции $f(x)$, если расстояние от точки графика $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к 0 при $x\to+\infty$. Аналогичное определение при $x\to-\infty$. Как по $f(x)$ найти k и b?

313. Найти асимптоты графиков функций:

$$y=x\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}; \quad y=\ln(1+e^x); \quad y=\frac{x\cdot e^x}{e^x-1}.$$

Дополнительная задача.

314. На плоскости даны 2 многоугольника. Доказать, что существует прямая, которая делит каждый из многоугольников на равновеликие части.

§ 33. Трудная задача.

315. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^{1-x}}{(1+x)^x}$.

Основные задачи.

316. Придумать функцию $f(x)$, такую, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ не существовал.

317. Дать определение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $[x, f(x)]$. Придумать пример непрерывной функции, не имеющей касательной в некоторой точке.

318. Прямая l касается графика функции $y=x^k$ в точке $(x_0, y_0=x_0^k)$. В какой точке l пересекает ось x?

319. Под какими углами пересекает ось x синусоида $y=\sin x$?

Дополнительная задача.

320. На плоскости даны 3 луча, выходящие из одной точки, и многоугольник M. Можно ли передвинуть M, как жесткое тело, в такое положение, чтобы лучи разбили его на 3 равновеликие части?

§ 34. Основные задачи.

321. Вертикальное сечение телескопа имеет форму параболы $y=ax^2$, $a>0$. Доказать, что световые лучи, падающие вертикально сверху, фокусируются в одной точке.

322. Доказать, что при $x\to\infty$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$. $\left(e+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)$

323. Под каким углом график логарифмической функции пересекает ось x? Под каким углом график показательной функции пересекает ось y?

Дополнительная задача.

324. Доказать, что всякая выпуклая функция (определение см. задачу **245**) имеет в каждой точке правую и левую касательные.

Трудная задача.

325. Лиса бежит по прямой с постоянной скоростью. Собака гонится за лисой с той же скоростью, причем бежит так, что видит лису все время прямо перед собой. Считаем, что и лиса, и собака — точки. Лиса бежит по оси x в положительном направлении из точки O. В начальный момент собака находится в точке (x_0, y_0). При каких x_0 и y_0 собака догонит лису?

Контрольная работа.

326. Построить графики:

$$y=\sqrt{x^2+x}-x;\quad y=\sqrt{x^2-x}-x;\quad y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

327. Найти пределы при $x\to 0$

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3};\quad \frac{e^{2x}-1}{\arcsin x}.$$

§ 35. Основные задачи.

328. Под каким углом пересекают ось y графики:

$$y=\sqrt{1\pm x};\quad y=\sqrt[n]{1+x};\quad y=(1+x)^2.$$

329. Найти асимптоты $\sqrt{x^2+7x-6}-x$.

330. Дано, что при $x\to 0$ $\frac{e^x-f(x)}{g(x)}\to a$. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)-f(x)}{g(x)}$ существует и равен a?

Определения.

1. $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малы при $x\to x_0$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k$. Если $k=0$, то $f(x)$ *более высокого порядка малости,* чем $g(x)$; если $k\neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ *одного порядка малости;* если $k=1$, то $f(x)$ и $g(x)$ — *эквивалентные* бесконечно малые.

В первом случае употребительно обозначение $f(x)=o(g(x))$, в третьем $f(x)\sim g(x)$.

331. Доказать, что при $x\to 0$

$$\sin x\sim x;\ \operatorname{tg} x\sim x;\ \arcsin x\sim x;\ \operatorname{arctg} x\sim x;\ \ln(1+x)\sim x;$$
$$e^x-1\sim x;\ a^x-1\sim x\cdot\ln a;\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

332. Дано, что $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$. Если $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\underset{x\to x_0}{\to} a$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен a. Доказать.

333. Найти пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2};\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

Трудные задачи.

334. Найти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{\operatorname{arctg}[\sin^2(e^x-1)]};\ \lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{1-\cos 3x}.$$

335. Исследовать ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

§ 36. Основные задачи.

336. Доказать, что если $f_1(x)=o(g(x))$ и $f_2(x)=o(g(x))$, то $f_1(x)+f_2(x)=o(g(x))$.

Например, $o(x)+o(x)=o(x)$; $o(x)-o(x)=o(x)$;
$o(x^2)+o(x)=o(x)$.

337. Если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to x_0$ и $h(x)$ ограничена в окрестности x_0, то $f(x)\cdot h(x)=o(g(x))$. Доказать.

338. Доказать, что $f(x)\sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)-g(x)=o(g(x))$.

339. Пусть при $x\to 0$ $f(x)=kx+b+o(x)$.

Замена линейной функцией $kx+b$ называется линеаризацией $f(x)$ при $x\to 0$. Каков геометрический смысл линеаризации непрерывной функции?

340. Написать формулы линеаризации при $x\to 0$ для функций: $(1+x)^n$; $\frac{1}{1+x}$; $\sqrt{1+x}$; $(1+x)^\alpha$; $\sin x$; $\arcsin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{arctg} x$; $\cos x$; e^x; a^x; $\ln(1+x)$; $\log_a(1+x)$.

341. Доказать, что при $x\to0$ $\sin x - x = o(x^2)$.

342. Найти такой многочлен $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, чтобы при $x\to0$ $\frac{1}{1+x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+o(x^n)$.

343. Найти:

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)\sqrt{1+x}-e^{\operatorname{tg} x}}{\sin x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)\sqrt{1+bx^2}-e^{x^2}}{x^2};\quad \lim_{x\to0}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-a^a};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right).$$

Основные задачи.

344. Найти:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2[e^x-2^{\operatorname{arctg} x}]}{\ln\cos x};\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{(\sec x-e^{-x})^{5/2}};\quad \lim_{x\to0}\frac{a^{\operatorname{tg} x}-a^{\sin x}}{x^3}.$$

345. Вычислить приближение $\sqrt[3]{8{,}024}$ с 5 верными знаками.

346. Яма имеет форму параболоида $z=x^2+y^2$. В яму бросили шарик. Верно ли, что если шарик достаточно мал, то он достигнет дна? Или, как бы шарик ни был мал, он застрянет между стенками (как в случае конусообразной ямы)?

347. Построить такую функцию $f(x)\neq0$, чтобы для любого n $f(x)=o(x^n)$ при $x\to0$.

348. Найти пределы:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-1}{e^{x^2}-1};\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos(x\cdot e^x)-\cos(x\cdot e^{-x})}{\operatorname{arctg}^3\ln(1-\sin x)};$$

$$\lim_{x\to0}\left[\ln(x\cdot\ln a)\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right],\quad a>0.$$

349. Найти пределы: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\ln x]{x};\quad \lim_{x\to+\infty}x^x;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} ax};\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{1+\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

350. Дано: $u(x)\to a$, $v(x)\to b$ при $x\to x_0$.
Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$.

351. Найти:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1-\frac{x^2}{a}}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

352. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln\cos x}$.

К о н т р о л ь н а я р а б о т а.

Вычислить пределы:

353. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left[a^{x^2}-b^{x\cdot\sin x}\right]}{[\arcsin(a^x-b^{\operatorname{tg}x})]^2}$, $a>0$, $b>0$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

355. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}x}$.

356. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{\frac{7}{2}}$.

357. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[\cos(x-\sin x)-\sin(x-\sin x)]}{\arcsin x}$.

358. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3-\sin\frac{1}{x}}-\sqrt[8]{x^8-\ln x}\right)$.

359. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-x}\right)^n$.

360. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

361. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-1}{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{a^x-\sin x}-a^{\sqrt{x}}}$.

363. $\lim\limits_{n\to 0}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

364. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x[1-\cos(1-\cos x)]}{\operatorname{arctg}^2(\sin x^4)}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)}{x^3}$.

366. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

367. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x[\ln(1+e^x)-x]$.

368. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+\sin^3 x}\cdot\left(\sqrt{x\cdot\cos\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\right)$.

369. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x+a}{x+a}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

371. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

§ 37. Основные задачи.

372. Доказать, что, какова бы ни была последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_n(x)$, ... $(0<x<+\infty)$, можно построить такую функцию $f(x)$, что для любого n $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0$.

Рассмотреть примеры:

а) $f_n(x)=n$, $f(x)=x$; б) $f_n(x)=nx$, $f(x)=x^2$;
в) $f_n(x)=x^n$, $f(x)=x^x$; г) $f_n(x)=x^n$, $f(x)=e^x$.

373. Построить на одном чертеже графики функций:

а) $y=x^n (n=1, 2, 3)$; б) $y=\sqrt[n]{x} (n=1, 2, 3)$;
в) $y=e^x$; г) $y=\ln x$.

374. Построить график функции $y=x^x$. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$. Найти касательную к графику в точке O.

375. Дана последовательность положительных функций; при любом n $f_n(x)\to+\infty$. Обязательно ли существует функция $f(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f_n(x)}=0$ для любого n, а $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$? Рассмотреть примеры:

а) $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$; б) $f_n(x)=\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n\text{ раз}}x$.

376. Даны две функции $f(x)$ и $f_1(x)$ такие, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f(x)}=0$. Существует ли такая функция $r(x)$, что $\frac{f_1(x)}{r(x)}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ и $\frac{r(x)}{f(x)}\underset{x\to+\infty}{\to}0$?

377. Дана последовательность функций $f_n(x)$ и функция $f(x)$ такие, что при любом n $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0$. Существует ли такая функция $r(x)$, что при любом n $\frac{f_n(x)}{r(x)}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ и $\frac{f(x)}{r(x)}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$?

378. Дана последовательность функций $f_n(x)$ и функция $f(x)$ такие, что при любом n $\frac{f(x)}{f_n(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Существует ли такая функция $r(x)$, что при любом n $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{f_n(x)}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{r(x)}=0$?

379. Даны две последовательности функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$ такие, что при любых k и m $\frac{f_k(x)}{g_m(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$? Существует ли такая функция $r(x)$, что при любом n $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{r(x)}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{g_n(x)}=0$?

380. Графики $y=e^x$ и $y=x^n$ не имеют общих точек при $n=1$ и имеют ровно две общие точки при достаточно больших n. (Доказать.)

Следовательно, при некотором α графики $y=x^\alpha$ и $y=e^x$ имеют ровно одну общую точку. (Доказать.) Найти это α.

381. Дана последовательность функций $f_n(x)$ $(0<x<+\infty)$. При любом n $f_n(x)\to 0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\max\{f_1(x),\ldots, f_n(x)\}$ при $n-1\leqslant x\leqslant n$. Может ли случиться, что $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}\infty$?

382. Каковы различные взаимные расположения графиков $y=a^x$ и $y=\log_a x$ (при разных a)?

383. Пусть $b(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$, имеющая в каждой точке касательную; l — прямая, проходящая через точки $[a, f(a)]$ и $[b, f(b)]$. Доказать, что существует точка x, в которой касательная параллельна l, т. е. доказать, что существует точка $x\in[a, b]$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$.

Определение. Пусть $f(x)$ имеет касательную в точке x. Угловой коэффициент касательной называется *производной* и обозначается $f'(x)$. Производную будем называть также *первой производной*. *n-й производной* будем называть производную от $(n-1)$-й производной.

384. Нарисовать эскиз-график $f'(x)$ по заданной (графиком) $f(x)$.

385. Найти производные функций: x, x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$.

Определение. По отношению к своей производной $f'(x)$ функция $f(x)$ называется *первообразной*.

386. Доказать, что разность любых двух первообразных одной и той же функции есть константа.

Верны ли следующие утверждения?

(В задачах **387—392** предполагается, что $f(x)$ задана всюду и в каждой точке имеет производную.)

387. $f(x)$ — монотонно возрастающая функция тогда и только тогда, когда $f'(x)>0$.

388. Пусть $f(x)$ достигает максимума в точке x_0. Тогда найдется $\delta>0$ такое, что $f'(x)>0$ при $x_0-\delta<x<x_0$; $f'(x_0)=0$; $f'(x)<0$ при $x_0<x<x_0+\delta$.

389. Дано: $f'(a)=0$, $f'(b)=2$. Тогда найдется такое x, $a<x<b$, что $f'(x)=1{,}5$.

390. Производная суммы равна сумме производных $f'(x)+g'(x)=[f(x)+g(x)]'$. Производная произведения $[f(x)\cdot g(x)]'$ равна произведению производных $f'(x)\cdot g'(x)$.

391. $f(x)\neq ax+b$. Найдется такая окрестность точки x_0, в которой график $f(x)$ и график касательной к $f(x)$ в точке x_0 имеют ровно одну общую точку $[x_0, f(x_0)]$.

392. Для любой точки x найдутся такие a и b $(a<x<b)$, что хорда, соединяющая точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, параллельна касательной в точке x.

§ 38. Основные задачи.

393. Доказать, что производная сложной функции вычисляется по формуле $(f(g(x)))'=f'(g)\cdot g'(x)$.

394. $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ и имеет производную в каждой точке. $f(0)=f(1)=0, \max f(x)=1, 0\leqslant x\leqslant 1$. Доказать, что найдется точка $x_0\in[0, 1]$, где $|f'(x)|>2$.

394а. $f(x)$ — дважды дифференцируема. $f(0)=f(1)=0$. $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. Доказать, что $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

395. $f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$; всюду, кроме множества M, $f(x)$ имеет производную, равную 0. (На M $f'(x)$, может быть, не существует.) Можно ли утверждать, что $f(x)=\mathrm{const}$, если а) M — счетно; б) M — меры 0? (M имеет меру 0, если для любого $\varepsilon>0$ его можно покрыть конечным или счетным множеством интервалов с суммой длин $<\varepsilon$.)

Контрольная.

396. Сформулировать и доказать теоремы о производной частного и обратной функции.

397. Найти производные функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

398. При каких x принимают наибольшие и наименьшие значения и под каким углом пересекают ось x функции $x^2\ln|x|$; $e^x\sin x$? Начертить графики.

399. Построить функцию $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, имеющую производную только при $x=0$.

На дом задано упражнение: 25 примеров на дифференцирование (см. любой задачник по анализу).

400. Известно, что $\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}\dfrac{1}{2}$. Продифференцируем числитель и знаменатель и рассмотрим отношение производных:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1\cdot(1-\cos^3 x)}{\cos^2 x\cdot 3x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos^2 x\cdot 3x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$

Этот предел еще не известен: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Можно ли вычислить его аналогичным способом: $\frac{1-\cos x}{3x^2}\underset{x\to 0}{\to}\frac{1}{6}$, а следовательно (?!), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$?

Сформулировать и доказать общее правило.

Верны ли следующие утверждения?

401. $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$, $f(x)$ имеет производную всюду.

Тогда $f'(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.

402. Не существует функции $f(x)$, дифференцируемой всюду и такой, что $f'(x)\to\pm 1$ при $x\to\pm 0$.

403. Для функций $f(x)$ найти многочлен $P(x)$ такой, что $f(x)-P(x)=o(x^n)$ $(x\to 0)$;

а) $f(x)=\sin x$ $\quad n=1, 2, 3$;
б) $f(x)=\cos x$ $\quad n=1, 2, 3$;
в) $f(x)=\ln(1+x)$ $\quad n=1, 2, 3$;
г) $f(x)=1+x-2x^2$ $\quad n=1, 2, 3$.

§ 39. Основные задачи.

404. Доказать теорему: функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b); $[f'(x)]^2+[g'(x)]^2\neq 0$ при $a<x<b$ $g(a)\neq g(b)$. Тогда найдется точка $c\in(a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

405. Функция $y=k\cdot e^{cx}$ удовлетворяет уравнению $y'=cy$. Имеет ли это уравнение другие решения?

Трудная задача.

406. Существует ли а) непрерывная, б) дифференцируемая функция, не монотонная ни на каком отрезке?

Основные задачи.

407. Найти производные функций $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg}\frac{x+a}{1-ax}$. Вывести зависимость между этими функциями.

408. Доказать тождества:

$2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x$ при $|x|\geqslant 1$;

$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ при $|x|\geqslant\frac{1}{2}$.

409. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет конечную производную в каждой точке интервала (a, b) и не является линейной. Доказать, что найдется точка $c \in (a, b)$, где $|f'(c)| > \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}$.

410. Если на отрезке $[a, b]$ $f'(x)>0$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x)=0$ или не существует (но $f(x)$ непрерывна), то $f(x)$ монотонна на $[a, b]$. Доказать.

411. То же, но с заменой «конечного» на «счетного».

412. Если $f(x)$ достигает максимума или минимума в точке x_0 и $f'(x)$ существует, то $f'(x_0)=0$. Доказать.

413. Может ли быть так: $f'(x)\underset{x\to+0}{\to}2$, $f'(0)=1$?

414. Пусть функция $r(x)$ имеет n производных в некоторой окрестности нуля и $r(0)=r'(0)=r''(0)=\ldots=r^n(0)=0$. Тогда $r(x)=o(x^n)$. Доказать.

415. Пусть для функции $f(x)$ существует многочлен $p(x)$ степени n такой, что $f(x)=p(x)+o(x^n)$. Доказать, что $f(x)$ имеет n производных в нуле. Выразить эти производные через коэффициенты многочлена.

416. Показать, что условия задачи **415** необходимы и достаточны.

417. Пусть $f(x)$ имеет производные любого порядка. $f'(0)=0$, $f^{(k)}(0)\neq0$. Написать достаточные условия максимума.

418. Доказать неравенства:

а) $e^x>1+x$ при $x\neq0$;

б) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ при $x>0$;

в) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ при $x>0$;

г) $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$;

е) $\sqrt[\alpha]{x^\alpha+y^\alpha}>\sqrt[\beta]{x^\beta+y^\beta}$ при $x>0$, $y>0$, $0<\alpha<\beta$.

419. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание будет наиболее экономичным?

420. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и имеет на нем n производных (в концах — односторонние производные). Существует ли на всей прямой $F(x)$, имеющая n производных и совпадающая с $f(x)$ на $[0, 1]$?

421. То же, но $f(x)$ задана на двух отрезках $[0, 1]$ и $[2, 3]$.