Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год второй

№ 1

Январь - Март 1998 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 1(4), 1998 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 1(4), январь – март 1998 г.

Содержание

И. Р. Шафаревич. Избранные главы алгебры (продолжение) 2

В. П. Паламодов. Лекции по интегральной геометрии
и компьютерной томографии (окончание) 22

В. В. Прасолов. Четыре рассказа по геометрии 34

Образовательные инициативы. Волгоградский областной лагерь “Интеграл” 52

Задача с продолжением 68

Интервью номера. Н. Н. Константинов о математическом образовании 69

В. А. Дементьев. Как живет-умирает наша страна 85

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1998 г.
“Математическое образование”, периодическое издание
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 15.06.98 г. Корректура: О. В. Никишкина
Объем 6 п.л. Тираж 1500 экз. Цена свободная.

Избранные главы алгебры (продолжение)

И. Р. Шафаревич

В российском (и ранее советском) математическом образовании существует замечательная традиция: крупные ученые, внесшие существенный вклад в развитие математики, создают произведения, рассчитанные на школьников, заинтересованных этой наукой. Мы продолжаем публикацию журнального варианта "Избранных глав алгебры", написанных выдающимся русским математиком академиком РАН И. Р. Шафаревичем. Надеемся, что материал заинтересует старших школьников и учителей, работающих по углубленной программе. Главы I, II, III были опубликованы соответственно в первом, втором и третьем номерах журнала.

Глава IV. Простые числа

§1. Бесконечность числа простых чисел

В этой главе мы вернемся к вопросу, разбиравшемуся в главе I. Там было доказано, что натуральное число единственным образом разлагается на простые сомножители. Поэтому с точки зрения операции умножения, простые числа — это простейшие элементы, из которых операцией умножения получаются все натуральные числа, подобно тому, как при помощи операции сложения они все получаются из числа 1. С этой точки зрения понятен интерес к совокупности простых чисел. В первом десятке натуральных чисел находится четыре простых: 2, 3, 5, 7. Дальше можно находить простые числа, по очереди деля каждое число на все уже найденные меньшие простые числа, чтобы выяснить, будет ли оно простым. Таким образом, мы найдем в первой сотне 25 простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Как далеко продолжается этот ряд? Вопрос возник еще в античности. У Евклида мы находим ответ:

Теорема 1. Число простых чисел бесконечно.

Мы приведем несколько доказательств этой теоремы.

Первое доказательство — то, которое содержится в "Началах" Евклида. Пусть мы нашли n простых чисел: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Как мы видели в §2 главы I, каждое число имеет по крайней мере один простой делитель. В частности, N имеет простой делитель. Но им не может быть ни одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$. Действительно, пусть это будет p_i. Тогда и $N - p_1 \ldots p_n$ должно делиться на p_i, а так как $N - p_1 \ldots p_n = 1$, то это невозможно. Таким образом, этот простой делитель отличен от всех p_i, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, за каждыми n простыми числами следует еще одно простое число. Это доказывает теорему.

Второе доказательство. Согласно теореме параграфа "Алгебра множеств" главы III число чисел, меньших заданного числа N и взаимно простых с ним, задается формулой

$$N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right), \tag{1}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — все простые делители числа N. Докажем теорему от противного. Предположим, что число простых чисел конечно и $p_1, \ldots, p_n$ — это все простые числа. Положим $N = p_1 \ldots p_n$. Подставляя это выражение в формулу (1), мы получим для каждого множителя $p_i\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ выражение $p_i - 1$, а для всего произведения (1) выражение $(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)$. Так как мы знаем, что существуют простые числа, большие 2 (например, 3), то это число *больше* 1. Таким образом, существует число a, меньшее N, взаимно простое с N и отличное от 1. Но a имеет хотя бы один простой делитель, который должен содержаться среди чисел $p_1, \ldots, p_n$, поэтому a не может быть взаимно простым с N. Мы получили противоречие, которое доказывает теорему.

Бесконечная последовательность простых чисел, с другой стороны, довольно редко располагается среди натуральных чисел. Например, в ней существуют сколь угодно большие "пустоты", то есть можно найти (достаточно далеко) любое заданное число последовательных чисел, не являющихся простыми. Например, n чисел: $(n+1)!+2$, $(n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n+1$ очевидно не являются простыми — первое из них делится на 2, второе — на 3, последнее — на $n+1$.

Некоторое время пытались найти формулу, выражающую простые числа. Например, Эйлер нашел удивительный многочлен x^2+x+41, который при 40 значениях x — от 0 до 39 — принимает простые значения. Однако очевидно, что при $x = 40$ он принимает непростое значение 41^2. Нетрудно убедиться, что вообще не может существовать многочлен $f(x)$, который при всех целых значениях $x = 0, 1, 2, \ldots$ принимал бы простые значения (не говоря уж о том, чтобы его значения давали *все* простые числа). Покажем это на примере многочлена второй степени ax^2+bx+c с целыми коэффициентами a, b, c. Предположим, что при $x = 0$ многочлен принимает простое значение c. Тогда при любом $x = kc$ его значение $ak^2c^2+bkc+c$ делится на c. При этом от силы еще при одном значении k (кроме $k = 0$) он может принимать то же значение c, как вы сами легко убедитесь. Более того, не существует многочлена $f(x) = ax^2+bx+c$, все значения которого являются простыми при всех целых x, *начиная с некоторой границы.* Действительно, предположим, что значения многочлена $f(x)$ являются простыми для всех целых $x \geq m$. Положим $x = y+m$, $f(y+m) = g(y)$; тогда все значения многочлена $g(y)$ по предположению являются простыми при всех целых $y \geq 0$, а коэффициенты его по-прежнему целые, так как $g(y) = a(y+m)^2+b(y+m)+c$. То же рассуждение применимо и к многочлену произвольной степени $n: \ f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Если все его значения при $x \geq 0$ и целых являются простыми, то значит и $f(0) = a_0 = p$ является простым. Тогда при любом целом k значения $f(kp) = p+a_1kp+\ldots+a_n(kp)^n$ делятся на p. Они могут совпадать со значением p только, если $p+a_1kp+\ldots+a_n(kp)^n = p$, то есть $a_1+a_2kp+\ldots+a_n(kp)^{n-1} = 0$, а это — уравнение степени $n-1$ относительно k и согласно теореме 3 главы II имеет самое большее $n-1$ корень. При всех остальных значениях k число $f(kp)$ делится на p и отлично от p, то есть не является простым.

Если же предположим, что значения многочлена $f(x)$ являются простыми лишь для целых значений $x \geq m$, где m – некоторое число, то можем положить $x = y + m$ и $f(y+m) = g(y)$. Многочлен $g(y) = a_0 + a_1(y+m) + \ldots + a_n(y+m)^n$ получается раскрытием всех скобок по формуле бинома и приведения подобных членов. Поэтому его коэффициенты опять целые, но он принимает простые значения уже для всех целых $y \geq 0$, так что мы опять приходим к противоречию.

Можно доказать, что и для любого числа неизвестных k не может существовать многочлен с целыми коэффициентами от k неизвестных, все значения которого при всех натуральных значениях неизвестных являются простыми числами. Тем не менее оказалось, что существует многочлен степени 25 от 26 неизвестных, обладающий следующим свойством: если отобрать значения, которые он принимает при целых неотрицательных значениях неизвестных и которые сами положительны, то их множество совпадает с множеством простых чисел. Так как 26 равно числу букв латинского алфавита, то можно неизвестные обозначить этими буквами: $a, b, \ldots, x, y, z$. Тогда многочлен имеет вид:

$$
\begin{gathered}
F(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z) = \\
= (k+2)\,\{1 - [wz + h + j - q]^2 - [(gk + 2g + k + 1)(h + j) + h_z]^2 - \\
-[2n + p + q + z - e]^2 - [16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2]^2 - \\
-[e^3(t+2)(a+1)^2 + 1 - o^2]^2 - [(a^2-1)y^2 + 1 - x^2]^2 - \\
-[16r^2y^4(a^2-1) + 1 - u^2]^2 - [(a + u^2(u^2 - a^2) - 1)(n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2]^2 - \\
-[n + l + v - y]^2 - [(a-1)l^2 + 1 - m^2]^2 - [ai + k + 1 - l - i]^2 - \\
-[p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m^2] - \\
-[q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 20 - x]^2 - \\
-[z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm]^2\}\,.
\end{gathered}
$$

Этот многочлен выписан здесь только для того, чтобы поразить воображение читателя. Число переменных в нем очень велико. Можно показать, что он принимает также отрицательные значения $-m$, где m не просто. Поэтому и он не дает нам представления о последовательности простых чисел.

Длительные попытки склонили большинство математиков к убеждению, что не существует более или менее простой формулы, описывающей последовательность простых чисел. “Явные формулы”, описывающие простые числа, существуют, но они используют объекты, о которых мы знаем еще меньше, чем о простых числах. Поэтому внимание математиков сконцентрировалось на характеристике последовательности простых чисел “в целом”, а не “поштучно”. Эту постановку вопроса мы разъясним в следующих параграфах.

Задачи

1. Докажите бесконечность числа простых чисел вида $3s+2$.

2. То же — для простых чисел вида $4s+3$.

3. Докажите, что любые два числа $2^{2^n}+1$ и $2^{2^m}+1$ взаимно просты. Выведите отсюда еще раз бесконечность числа простых чисел.

Указание: Предположив, что p — общий делитель двух таких чисел, найти остатки от деления 2^{2^m} и 2^{2^n} на p.

4. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что среди простых делителей его значений $f(1)$, $f(2), \ldots$ существует бесконечное число различных. (Если задача не будет сразу получаться, решите ее сначала для многочлена $f(x)$ первой, потом — второй степени.)

5. Обозначим через p_n n-е по порядку простое число. Докажите, что $p_{n+1} < p_n^n + 1$.

6. В обозначениях задачи 5 докажите, что $p_n < 2^{2^n}$. Выведите близкое неравенство $p_n \leq 2^{2^n} + 1$ из результата задачи 3.

7. В обозначениях задачи 5 докажите, что $p_{n+1} < p_1 p_2 \ldots p_n$.

§2. Доказательство бесконечности числа простых чисел по Эйлеру

Мы изложим еще одно доказательство бесконечности числа простых чисел, принадлежащее Эйлеру, которое проясняет некоторые общие свойства этой последовательности.

Начнем с "предыстории", то есть с некоторых простых фактов, которые были известны до того, как Эйлер стал заниматься вопросом о простых числах. Речь идет о величине сумм

$$1,\ 1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \ldots$$

В обозначениях §3 главы II это суммы $(Sa)_n$, где a — последовательность обратных натуральных чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Поскольку суммы m-х степеней натуральных чисел от 1 до $n-1$ мы обозначали через $S_m(n)$ (ср. формулу (28) главы II), естественно наши суммы обозначить $S_{-1}(n)$.

Мы здесь столкнулись с понятием, которое дальше будет часто встречаться, поэтому обсудим его подробнее. Оно относится вообще к свойствам *бесконечной* последовательности положительных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ (у нас она возникла как последовательность сумм другой последовательности, но сейчас это не важно). Один тип последовательностей называется *ограниченными*. Это значит, что существует такое единое для всей последовательности число C, что $s_n < C$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если последовательность этим свойством не обладает, то она называется *неограниченной*. Это значит, что *никакое* число C не может обладать указанным свойством, то есть для любого числа C найдется такой индекс n, что $s_n \geq C$. Наконец, может случиться, что для любого числа C найдется такой индекс n, что все $s_m \geq C$ для $m = n, n+1, \ldots$. Иначе говоря, при достаточно большом n число s_n станет сколь угодно большим. В этом случае последовательность называется *неограниченно возрастающей*. Например, последовательность $1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots$, в которой на нечетных местах стоит 1, а на четных идут подряд натуральные числа, является неограниченной, но не неограниченно возрастающей, так как в ней сколь угодно далеко стоят числа, равные 1.

Если задана последовательность $a = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ положительных чисел и $s = Sa$, то $s_{n+1} > s_n$ (так как $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, $a_{n+1} > 0$), и вообще $s_m > s_n$ при $m > n$. Поэтому такая последовательность будет неограниченно возрастающей, если она неограниченна. Например, если все $a_i = 1$, то $s_n = n$ и последовательность $s_1, s_2, \ldots$ будет неограниченной. Но в других случаях она может быть ограниченной. Пример можно наглядно усмотреть на рис. 1, где мы делим отрезок между 0 и 1 сначала пополам и полагаем $a_1 = \frac{1}{2}$, потом отрезок между 0 и $\frac{1}{2}$ опять делим пополам и полагаем $a_2 = \frac{1}{4}$ и т. д.

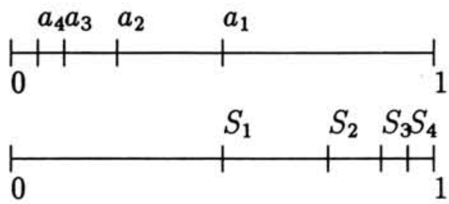


Рис. 1

Таким образом, $a_n = \frac{1}{2^n}$. Результат сложения этих чисел изображен на рис. 1 и видно, что их суммы S_n всегда остаются внутри нашего отрезка, то есть $S_n < 1$. Это легко проверить и вычислением. Если $a_n = \frac{1}{2^n}$, то

$$(Sa)_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}),$$

и по формуле (12) главы I

$$(Sa)_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

так что $(Sa)_n < 1$ при любом n.

Мы покажем, что в случае последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ имеет место *первый* случай: хотя члены последовательности убывают, но недостаточно быстро и суммы их (то есть $S_{-1}(n)$) неограниченно возрастают.

Лемма 1. Сумма $S_{-1}(n)$ при достаточно большом n больше любого наперед заданного числа.

Пусть нам задано число k. Мы утверждаем, что для некоторого n (и, значит, также для следующих за ним) $S_{-1}(n) > k$. Возьмем n таким, что $n - 1 = 2^m$ при некотором m. Сумму

$$S_{-1}(n) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)$$

разобьем на части так, как указано в формуле: на группы, заключенные между двумя последовательными степенями двойки. Каждая скобка имеет вид $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}$, а число скобок равно m. В каждой скобке заменим каждое слагаемое наименьшим из входящих в скобку, то есть последним. Так как число слагаемых в такой скобке равно $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$, то мы получим, что k-я скобка больше, чем $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$. В результате мы получаем, что $S_{-1}(n) > 1 + \frac{m}{2}$. Это неравенство имеет место при любом n, если $n - 1 = 2^m$. Нам остается положить $1 + \frac{m}{2} = k$, то есть $m = 2k - 1$ и $n = 2^{2k-1} + 1$. Тогда $S_{-1}(n) > k$.

Теперь переходим к изложению доказательства Эйлера. Его идея связана с методом вычисления сумм степеней делителей натурального числа, который был описан в §3 главы I (ср. формулу (13) главы I). Сумма k-х степеней всех делителей (включая 1 и n) натурального числа n обозначают $\sigma_k(n)$. Согласно формуле (13) главы I для числа n, имеющего каноническое разложение $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot_r^{\alpha_r}$,

$$\sigma_k(n) = \frac{p_1^{k(\alpha_1+1)} - 1}{p_1^k - 1} \frac{p_2^{k(\alpha_2+1)} - 1}{p_2^k - 1} \cdots \frac{p_r^{k(\alpha_r+1)} - 1}{p_r^k - 1}. \tag{2}$$

Формула (2) была известна еще со времен античности, но молчаливо предполагалось, что в ней k — положительное число. Наконец она попала в круг интересов Эйлера, задавшегося вопросом — а что будет при k целом, но отрицательном? Ответ, конечно, заключается в том, что никакой разницы здесь нет, вывод формулы (2) совершенно формальный и одинаково годится как для положительных, так и для отрицательных значений k. В частности, она верна и для $k = -1$. Сумму $(-1) - x$ степеней (то есть их обратных величин) делителей заданного числа n мы, сохраняя прежние обозначения, будем записывать как $\sigma_{-1}(n)$. Формула (2) дает тогда:

$$\sigma_{-1}(n) = \frac{1 - \frac{1}{p_1^{\alpha_1+1}}}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \frac{1}{p_r^{\alpha_r+1}}}{1 - \frac{1}{p_r}}$$

(мы изменили порядок слагаемых в числителе и знаменателе каждой дроби). Отсюда (так как все выражения в числителе меньше 1),

$$\sigma_{-1}(n) < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)}. \tag{3}$$

Заменим теперь в этой формуле n на $n!$ ($p_1, \ldots, p_r$ — теперь простые делители $n!$). Среди делителей $n!$ наверняка содержатся $1, 2, \ldots, n$. Поэтому в сумму $\sigma_{-1}(n)$ заведомо войдут слагаемые $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$, которые в сумме равны $S_{-1}(n+1)$. По лемме 1 уже сумма $S_{-1}(n+1)$ больше любого наперед заданного числа k при достаточно большом n. Так как другие слагаемые в сумме $\sigma_{-1}(n!)$ тоже положительны, то тем более это утверждение верно и для нее. Если бы число простых чисел было конечно и $p_1, \ldots, p_r$ — это был их полный список, то мы получили бы, что

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)} > k,$$

где k — любое число. Это, конечно, противоречие.

В приведенном доказательстве ценно то, что оно не только приводит к противоречию предположение о конечности числа простых чисел, но когда бесконечность их числа уже доказана, дает некоторую количественную характеристику их последовательности. Именно, перефразируя полученный результат, мы можем теперь сказать, что если $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ — бесконечная последовательность всех простых чисел, то выражение $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)}$ при достаточно большом n становится больше любого наперед заданного числа. Это, конечно, равносильно тому, что знаменатель выписанной выше дроби при достаточно большом n становится *меньше* любого наперед заданного числа. Нами доказана

Теорема 2. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ — последовательность всех простых чисел, то произведение $\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ при достаточно большом n становится меньше любого наперед заданного положительного числа.

Это первое приближение к нашей цели. Теперь постараемся придать полученной характеристике более привычный вид.

Теорема 3. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ — последовательность всех простых чисел, то последовательность сумм $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$ неограниченно возрастает.

Вывод теоремы 3 из теоремы 2 — чисто формальный: он не зависит от того, что $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ — последовательность *простых чисел* — это могла бы быть любая последовательность натуральных чисел, для которой выполняется утверждение теоремы 2.

Лемма 2. Для любого натурального $n > 1$ имеет место неравенство

$$1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}. \tag{4}$$

Так как обе части неравенства (4) положительны, то возведя его в степень n, мы получим *равносильное* неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{4}, \tag{5}$$

которое мы и докажем. Развернем левую часть неравенства (5) по формуле бинома. Мы получим

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n^n}. \tag{6}$$

Абсолютные величины слагаемых в правой части равенства (6) образуют последовательность $C_n^k \frac{1}{n^k}$. Такую последовательность чисел мы рассматривали в связи со схемой Бернулли в параграфе “Язык вероятностей” главы III (формула (34)).

Точнее говоря, если в тех формулах мы положим $p = \frac{1}{n+1}$, $\quad q = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, то получим, что $p+q=1$, $p^k q^{n-k} = (n+1)^{-n} n^{n-k}$, и полученные нами числа отличаются от рассматривавшихся в формуле (7) лишь общим для всех множителем $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Выражение $(n+1)p-1$ в нашем случае равно 0. Мы доказали в параграфе "Язык вероятностей" главы III, что если $k > (n+1)p-1$ (в нашем случае $k>0$), то $k+1$-й член меньше k-го. Значит, все числа последовательности $C_n^k \frac{1}{n^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ монотонно убывают. (Мы сослались здесь на главу III, чтобы обратить внимание на то, как связаны между собой вопросы, которыми мы занимаемся. (Легко было бы и непосредственно выписать отношение $k+1$-го к k-му члену этой последовательности и убедиться, что оно меньше 1.) Мы видим, что в формуле (6) слева первые два члена сокращаются. Следующие два члена (после сокращений, которые вы легко выполните), дадут $\frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2}$. Это число не меньше $\frac{1}{4}$ при $n \geq 2$ (проверьте и это сами!). Остальные же члены группируются в пары, причем в каждой паре первое слагаемое положительное, а следующее отрицательное, но, как мы видели, по абсолютной величине меньше первого. Поэтому каждая пара дает положительный вклад в сумму (6). Если n нечетно, то число слагаемых в правой части формулы (6) четно (оно равно $n+1$) и сумма точно разбивается на $\frac{n+1}{2}$ пар. Если же n четно, то после объединения слагаемых в пары остается еще одно положительное слагаемое $\frac{1}{n^n}$. Таким образом, в любом случае правая часть состоит из слагаемого, которое не меньше $\frac{1}{4}$, и еще некоторых положительных слагаемых. Это доказывает неравенство (6), а, значит, и лемму.

Теперь теорема 3 почти очевидна. Для любого p_i мы имеем согласно лемме:

$$1 - \frac{1}{p_i} \geq \frac{1}{4^{\frac{1}{p_i}}}.$$

Перемножая эти неравенства для $i = 1, \ldots, n$, мы получим:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \geq \frac{1}{4^{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right)}}.$$

Если бы суммы $\frac{1}{p_1} + + \ldots + \frac{1}{p_n}$ для всех n не превосходили некоторой величины k, то отсюда следовало бы, что

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \geq \frac{1}{4^k}.$$

Это противоречит теореме 2.

Мы сталкиваемся здесь с вопросом нового типа. Если N — подмножество конечного множества M, то мы можем сказать, насколько N "меньше", чем M, сравнивая их число элементов, например, вычисляя отношение $\frac{n(N)}{n(M)}$. Но сейчас мы имеем два бесконечных подмножества: множество натуральных чисел и содержащееся в нем множество простых чисел. Как сравнить их? Теорема 3 предлагает один способ сравнения, на первый взгляд не очень простой. Его можно применить к любой последовательности натуральных чисел $a : a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Согласно лемме 1, для последовательности всех натуральных чисел суммы обратных величин (то есть суммы $S_{-1}(n)$) неограниченно возрастают. Мы можем считать последовательность a "густо" расположенной среди натуральных чисел, если для нее сохраняется то же свойство, то есть суммы $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}, \ldots$ неограниченно возрастают. Это значит, что в последовательности a сохранилось еще достаточно много натуральных чисел, так что суммы обратных величин ее членов не намного меньше сумм $S_{-1}(n)$ обратных всех натуральных чисел. Если же суммы обратных величин последовательности a остаются ограниченными, то мы можем считать ее "редко" расположенной в натуральном ряду. Теорема 3 утверждает, что последовательность простых чисел "густа". Самый крайний "редкий" случай — когда последовательность a состоит только из конечного числа членов.

Но бывают и промежуточные случаи. Например, последовательность квадратов: $1, 4, 9, \ldots, n^2 \ldots$. Для нее соответствующие суммы $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ естественно обозначить $S_{-2}(n)$. Докажем, что они ограничены величиной, не зависящей от n. Для этого применим тот же прием, что и при доказательстве леммы 1. Пусть m таково, что $2^m \geq n$. Тогда $S_{-2}(n) \leq S_{-2}(2^m)$. Сумму $S_{-2}(2^m) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2m}}$ разобьем на части:

$$(1) + \left(\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{m-1}+1)^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2m}}\right).$$

В каждой части $\frac{1}{(2^{k-1}+1)^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}}$ опять содержится 2^{k-1} членов и первый член является наибольшим. Поэтому эта часть не превосходит $2^{k-1}\frac{1}{(2^{k-1}+1)^2} < 2^{k-1}\frac{1}{(2^{k-1})^2} = \frac{1}{2^{k-1}}$. Таким образом, $S_{-2}(2^m) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$. То есть, все суммы $S_{-2}(n)$ не превосходят 3.

Таким образом теорема 3 показывает, например, что простые числа в натуральном ряде расположены "гуще", чем квадраты.

Задачи

1. Докажите, что при любом заданном целом $k \geq 2$ и всех натуральных n суммы $S_{-k}(n) = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{n^k}$ ограничены.

2. Пусть последовательность a является арифметической прогрессией: $a_0 = p$, $a_1 = p + q$, $a_2 = p + 2q, \ldots, a_n = p + nq$ при некоторых натуральных p и q. Доказать, что суммы $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}, \ldots$ становятся неограниченно большими при достаточно больших n.

3. Пусть последовательность a является геометрической прогрессией: $a_0 = c$, $a_1 = cq, a_2 = cq^2, \ldots, a_n = cq^n \ldots$, где c и q — некоторые натуральные числа. Является она "густой" или "редкой" в ряду натуральных чисел?

4. Пусть $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел. Доказать, что выражения $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)}$ ограничены для всех n.

§3. Функция $\pi(n)$

В этом параграфе мы еще раз попытаемся оценить, насколько отличается последовательность простых чисел от всей последовательности натуральных чисел. При этом более вычурный метод сравнения "густых" и "редких" последовательностей, обсуждающийся в предыдущем перегрфе, заменим более наивным, сразу приходящим в голову. А именно, наивный вопрос — "какую долю составляют простые числа среди всех натуральных?" — попытаемся решить, определяя, сколько есть простых чисел, меньших 10, сколько — меньше 100, сколько — меньше 1000 и т.д. Для любого натурального числа n через $\pi(n)$ обозначают число простых чисел, не превосходящих n, так что $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(4) = 2, \ldots$. Что можно сказать об отношении $\frac{\pi(n)}{n}$, когда n неограниченно возрастает?

Прежде всего, познакомимся с тем, что говорят таблицы. Любое утверждение или вопрос о натуральных числах можно проверить для всех натуральных чисел, не превосходящих некоторой границы N. Это обстоятельство играет для теории чисел, изучающей свойства натуральных чисел, такую же роль, как возможность эксперимента для теоретической физики. В частности, можно вычислить значение $\pi(n)$ для $n = 10^k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Получается следующая таблица.

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\pi(n)}$
10	4	2,5
100	25	4,0
1000	168	6,0
10000	1229	8,1
100000	9592	10,4
1000000	78498	12,7
10000000	664579	15,0
100000000	5761455	17,4
1000000000	50847534	19,7
10000000000	455059512	22,0

Таблица 1

Мы видим, что отношение $\frac{n}{\pi(n)}$ постоянно растет, а, значит, $\frac{\pi(n)}{n}$ все время уменьшается. То есть доля простых чисел среди первых n чисел становится с ростом n все ближе к нулю. Можно сказать, что согласно таблицам "простые числа составляют нулевую долю среди всех натуральных чисел". Так это формулировал Эйлер, хотя его рассуждения не содержат полного доказательства. Это утверждение мы и сформулируем точно, а потом докажем.

Теорема 4. Отношение $\frac{\pi(n)}{n}$ становится меньше любого наперед заданного положительного числа при достаточно большом n.

Для доказательства теоремы нам надо как-то оценить функцию $\pi(n)$. Для фактического вычисления ее значения начинают с простого числа 2, затем вычеркивают все числа, кратные 2 и не превосходящие n. Затем берут первое оставшееся число — это будет 3 — и повторяют тот же процесс с ним. Так поступают, пока не исчерпают все числа, не превосходящие n. Не вычеркнутые (2, 3 и т.д.) и будут всеми простыми числами, не превосходящими n. Такой прием применялся еще в античности; он называется "решетом Эратосфена".

Этот же процесс мы применим в нашем рассуждении. Пусть мы уже нашли первые r простых чисел: $p_1, p_2, \dots p_r$. Тогда следующие простые числа, не превосходящие n, содержатся среди "невычеркнутых" чисел, не превосходящих n, то есть среди тех чисел $m \leq n$, которые не делятся ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots p_r$. Но число чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \dots p_r$, мы исследовали в главе III — оно задается формулой в §Алгебра множеств главы III. Выражение, входящее в эту формулу, можно, как мы там показали, заменить на более простое: $n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, причем ошибка не будет превосходить 2^r (формула (28) главы III). Таким образом, число s чисел $m \leq n$ и не делящихся ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \dots p_r$, удовлетворяет неравенству

$$s \leq n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+2^r. \tag{7}$$

Все $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих n, содержатся либо среди r простых чисел $p_1, p_2, \dots p_r$, либо среди s чисел, учтенных неравенством (7). Таким образом, $\pi(n) \leq s + r$ и, значит,

$$\pi(n) \leq n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+2^r+r. \tag{8}$$

Неравенство (8) замечательно тем, что в него входит произведение $\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, сведения о величине которого дает нам теорема 2.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 4. Пусть нам дано сколь угодно малое положительное число ε. По нему мы должны найти такое число N, что $\frac{\pi(n)}{n} < \varepsilon$ для всех $n > N$. В неравенстве (8) мы заменим r большей величиной 2^r (ср. задачу 6 к §2 главы I), чтобы получить более простое неравенство

$$\pi(n) \leq n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+2^{r+1}. \tag{9}$$

В неравенстве (9) присутствуют два слагаемых, и мы выберем N так, чтобы при $n \geq N$ каждое слагаемое не превосходило $\frac{\varepsilon n}{2}$. Тогда из неравенства (9) получится, что $\pi(n) < \varepsilon n$ и, значит, $\frac{\pi(n)}{n} < \varepsilon$. Но вспомним, что пока число r в нашем рассуждении было произвольным. Мы выберем сначала его так, чтобы первое слагаемое не превосходило $\frac{\varepsilon n}{2}$, а потом выберем N так, чтобы второе слагаемое не превосходило $\frac{\varepsilon n}{2}$. Первый выбор возможен в силу теоремы 2. Она утверждает, что при достаточно большом r произведение $\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$ меньше любого наперед заданного положительного числа. За такое положительное число мы можем взять $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда первое слагаемое в неравенстве (9) не превосходит $\frac{\varepsilon n}{2}$. Со вторым слагаемым дело обстоит еще проще. Теперь r нами уже выбрано. Выберем N так, что $2^{r+1} < \frac{\varepsilon N}{2}$. Для этого надо выбрать $N > \frac{2^{r+2}}{\varepsilon}$. Тогда $2^{r+1} < \frac{\varepsilon N}{2} \leq \frac{\varepsilon n}{2}$ для любого $n \geq N$. Теорема 4 доказана.

Заметим, что если мы выберем арифметическую прогрессию $am + b$ даже с очень большой разностью a, то есть идущую очень редко, то число членов этой прогрессии, не превосходящих n, совпадает с числом целых m, для которых $am \leq n-b$, то есть $[\frac{n-b}{a}]$. Мы видели в §3 главы III, что $[\frac{n-b}{a}]$ отличается от $\frac{n-b}{a}$ не больше, чем на 1. Поэтому число членов прогрессии, не превосходящих n, не меньше, чем $\frac{n-b}{a}-1$. Его отношение к n не меньше, чем $\frac{1}{n}(\frac{n-b}{a} - 1) = \frac{1}{a} - \frac{1}{n}\frac{b}{a} - \frac{1}{n}$. С ростом n это число приближается к $\frac{1}{a}$ и не становится неограниченно малым. Поэтому теорема 4 была бы неверна, если бы за последовательность мы взяли любую арифметическую прогрессию. Она показывает, что простые числа расположены реже любой арифметической прогрессии.

Задачи

1. Пусть p_n обозначает n-е простое число. Докажите, что для любого сколь угодно большого положительного числа C выполняется неравенство $p_n > Cn$ для всех достаточно больших n.

(**Указание**. Воспользоваться тем, что $\pi(p_n) = n$).

2. Рассмотрим натуральные числа, обладающие тем свойством, что их запись в десятичной системе счисления не содержит определенной цифры (например, 0). Пусть $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots$ — эти числа, записанные в порядке возрастания и $\pi_1(n)$ обозначает число таких чисел, не превосходящих n. Докажите, что отношение $\frac{\pi_1(n)}{n}$ становится меньше любого наперед заданного положительного числа при достаточно большом n. Докажите, что суммы $\frac{1}{q}, \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \ldots, \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}, \ldots$ ограничены.

(**Указание.** Не пытайтесь копировать доказательство теоремы 4. Разбейте сумму на участки, где знаменатели расположены между 10^k и 10^{k+1}. Найдите число чисел q_i в таком интервале. Ответ зависит от той цифры r, которую мы исключаем: $r = 0$ или $r \neq 0$.)

Приложение. Чебышевские неравенства для $\pi(n)$

Мы вынесем этот текст в приложение, во-первых, по формальной причине, так как здесь мы будем вынуждены пользоваться логарифмами, знакомство с которыми в остальном тексте не предполагается. Напомним, что *логарифмом при основании a числа x* называется такое число y, что

$$a^y = x.$$

Это записывается так: $y = \log_a x$. Дальше всегда будет предполагаться, что $a > 1$ и будут рассматриваться положительные числа x. Основные свойства логарифмов, сразу вытекающие из определения:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a c^n = n \log_a c, \quad \log_a a = 1.$$

$\log_a(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 1$. Логарифм является монотонной функцией, то есть $\log_a x \leq \log_a y$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$.

Если основание логарифмов не указано, то предполагается, что оно равно 2: $\log x$ — это $\log_2 x$.

Вторая причина, почему следующие далее рассуждения выделены в приложение, заключается в следующем. В остальной части книги была ясна логика рассуждений, почему мы идем именно этим путем (так я, по крайней мере, надеюсь). Здесь же мы столкнемся со случаем, не редким в математических исследованиях, когда некоторое новое соображение как бы упало с неба и даже автор часто не может объяснить, как он к нему пришел. О таких ситуациях Эйлер говорил: "Мне иногда кажется, что мой карандаш умнее меня". Разумеется, это есть результат многочисленных проб, размышлений и неосознанной работы психики.

Мы здесь продолжим изучение вопроса об отношении $\frac{\pi(n)}{n}$, когда n неограниченно возрастает. Всмотримся еще раз в таблицу 1, показывающую значения $\pi(n)$ для $n = 10^k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Обратим внимание на последний столбец таблицы, указывающий отношения $\frac{n}{\pi(n)}$ для некоторых значений n. Мы видим, что при переходе от $n = 10^k$ к $n = 10^{k+1}$, то есть при спуске на одну строку таблицы, значения $\frac{n}{\pi(n)}$ меняются почти на одну и ту же величину. А именно, первое число равно 2,5; второе отличается от него на 1,5 и дальше последовательные разности равны: 2; 2,1; 2,3; 2,3; 2,3; 2,4; 2,3; 2,3. Мы видим, что все эти числа очень близки к одному: 2,3. Не пытаясь пока разгадать загадку именно этого значения разностей, предположим, что и дальше, за пределами нашей таблицы, число $\frac{n}{\pi(n)}$ при переходе от $n = 10^k$ к $n = 10^{k+1}$ будет увеличиваться на число все более близкое к некоторой фиксированной постоянной α. Это значило бы, что $\frac{n}{\pi(n)}$ для $n = 10^k$ было очень близко к αk. Но если $n = 10^k$, то по определению $k = \log_{10} n$. Естественно тогда предположить, что и для других значений n величина $\frac{n}{\pi(n)}$ очень близка к $\alpha \log_{10} n$. Значит, $\pi(n)$ очень близко к $c\frac{n}{\log_{10} n}$, где $c = \alpha^{-1}$.

Многие математики были увлечены тайной расположения простых чисел и пытались ее раскрыть на основании таблиц. В частности, Гаусс заинтересовался этим вопросом почти в детском возрасте. Его интерес к математике начался, видимо, с детского интереса к числам и с составления таблиц. Вообще многие великие математики были виртуозами счета и умели производить громадные вычисления, иногда в уме (Эйлер таким способом даже боролся с бессоницей!). Когда Гауссу было еще 14 лет, он составил таблицы простых чисел (правда, менее обширные, чем наша таблица 1) и пришел к тому предположению, которое мы формулировали. Позже оно обсуждалось многими математиками. Но первый результат в этом направлении был доказан более полувека спустя, в 1850 г. Чебышевым.

Чебышев доказал следующее утверждение:

Теорема. Существуют такие постоянные c и C, что для всех $n > 1$

$$c\frac{n}{\log n} \leq \pi(n) \leq C\frac{n}{\log n}. \tag{10}$$

Прежде, чем переходить к доказательству, сделаем несколько замечаний по поводу формулировки теоремы. С каким основанием здесь рассматриваются логарифмы? Ответ: с любым. Из определения логарифма сразу следует, что $\log_b x = \log_b a \log_a x$: надо только в соотношении $a^{\log_a x} = x$ заменить a на $b^{\log_b a}$ и мы получим, что $b^{\log_b a \log_a x} = x$, что и показывает, что $\log_b x = \log_b a \log_a x$. Поэтому, если неравенство (10) доказано для $\log_a n$, то оно верно и для $\log_b n$ с заменой c и C на $\frac{c}{\log_b a}$ и $\frac{C}{\log_b a}$.

Неравенства (10) и выражают подсказанную таблицей мысль, что $\pi(n)$ "близко" к $c\frac{n}{\log n}$ при некотором c. Вопрос о том, почему в наших гипотетических рассуждениях встречалась одна постоянная c, а в теореме — две: c и C, и нельзя ли заменить в ней две постоянные одной — мы обсудим после доказательства теоремы.

Таинственным ключом к доказательству теоремы Чебышева являются свойства биномиальных коэффициентов C_n^k: прежде всего тот факт, что они являются целыми числами, и некоторые свойства их делимости на простые числа. Перечислим те свойства, которые нам понадобятся в доказательстве.

Прежде всего, это утверждение, доказанное в §3 главы II, согласно которому сумма всех биномиальных коэффициентов C_n^k при $k = 0, 1, \ldots, n$ равна 2^n. Так как сумма положительных слагаемых больше каждого из них, то отсюда получаем, что

$$C_n^k \leq 2^n \tag{11}$$

Нам будут особенно полезны большие биномиальные коэффициенты. Мы видели в главе II, что при четном $n = 2m$ коэффициент C_{2m}^m больше всех остальных, а при нечетном $n = 2m + 1$ существуют два равных коэффициента: C_{2m}^m и C_{2m}^{m+1}, которые больше остальных. На них мы обратим особое внимание. В частности,

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \tag{12}$$

Если мы сгруппируем множители числителя с множителями знаменателя, идущими в обратном порядке, то получим:

$$C_{2n}^n = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{1}.$$

Очевидно, что в этой формуле каждый множитель не меньше 2, поэтому

$$C_{2n}^n \geq 2^n \tag{13}$$

Теперь рассмотрим свойства делимости биномиальных коэффициентов на простые числа. В выражении (12) множители в числителе очевидно делятся на все простые числа, не превосходящие $2n$ и большие n. Такие простые числа не могут делить множители знаменателя, поэтому они не сокращаются и будут делителями C_{2n}^n. Число простых чисел, расположенных между $2n$ и n, равно $\pi(2n) - \pi(n)$, и все они больше, чем n, поэтому

$$C_{2n}^n \geq n^{\pi(2n)-\pi(n)}. \tag{14}$$

Аналогичное утверждение верно, конечно, и для "средних" коэффициентов $C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$ с нечетным нижним индексом. Записав их в виде

$$C_{2n+1}^n = \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

мы увидим, что $\pi(2n+1)-\pi(n+1)$ простых чисел, не превосходящих $2n+1$ и больших $n+1$, входят в числитель и не могут сократиться со знаменателем. Так как они больше, чем $n+1$, то

$$C_{2n+1}^{n} > (n+1)^{\pi(2n+1)-\pi(n+1)}. \tag{15}$$

В неравенствах (14) и (15) уже вскрывается замечательная связь между биномиальными коэффициентами и простыми числами.

Наконец, приведем последнее из нужных для доказательства свойств биномиальных коэффициентов, хотя и совсем простое, но в отличие от предыдущих не совсем очевидное.

Лемма. Для любого биномиального коэффициента C_n^k степень простого числа, делящего его, не превосходит n.

Обратим внимание, что речь идет не о *показателе* степени, а о *самой степени.* То есть мы утверждаем, что если p^r делит C_n^k, где p — простое число, то $p^r \le n$. Например, $C_9^2 = 9\cdot 4$ делится на 9 и на 4, и оба числа не превосходят 9.

Запишем биномиальный коэффициент в виде

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots\cdot k}. \tag{16}$$

Рассматриваемое нами простое число p должно делить числитель этой дроби. Обозначим через m тот множитель, в котором p входит в максимальной степени (или один из них, если их несколько), а через p^r — эту максимальную степень. Очевидно, $n \ge m \ge n-k+1$. Положим $n-m=a$, $m-(n-k+1)=b$, тогда $a+b=k-1$ и C_n^k можно записать в виде

$$C_n^k = \frac{(m+a)(m+a-1)\dots(m+1)m(m-1)\dots(m-b)}{k!}. \tag{17}$$

Для нас сейчас множитель m является основным и мы записываем произведение в числителе как a множителей слева от него и b справа. Преобразуем аналогично знаменатель: $k! = (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot a)(a+1)\dots(a+b)(a+b+1)$. Так как $(a+1)(a+2)\dots(a+b)$ делится на $b!$, то это произведение (знаменатель) имеет вид $a!b!l$, где l – некоторое целое число. Теперь можно переписать C_n^k в удобном для нас виде:

$$C_n^k = \frac{m+a}{a}\cdot\frac{m+a-1}{a-1}\cdot\ldots\cdot\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{m-b}{b}\cdot\frac{m}{l}, \tag{18}$$

где мы множитель $\frac{m}{l}$ перенесли в конец.

Заметим, что в каждом из множителей $\frac{m+i}{i}$ или $\frac{m-j}{j}$ ($i=1,\dots,a$, $j=1,\dots,b$) степень p, входящая в числитель, полностью сокращается со знаменателем, так что после сокращения общих множителей в числителе и знаменателе на p делиться может только знаменатель (хотя и он может оказаться взаимно простым с p). Действительно, рассмотрим, например, дроби $\frac{m+i}{i}$ (множитель вида $\frac{m-j}{j}$ рассматривается точно так же). Пусть i делится точно на p^s, то есть $i=p^s u$, где u взаимно просто с p. Если $s<r$, то $m+i$ тоже делится точно на p^s: положив $m=p^r v$, (вспомним, что m делится на p^r), получим, что $m+i=p^s(u+p^{r-s}v)$. Если же $s\ge r$,

то точно так же $m+i$ делится на p^r и вспомнив выбор m (оно делится на самую большую степень p среди всех чисел между n и $n-k+1$ и эта степень есть p^r), мы заключаем, что на большую степень p, чем r-я, число $m+i$ делиться не может. Таким образом p^r сократится в числителе и знаменателе и в числителе останется число, не делящееся на p. В результате мы видим, что из всех множителей в выражении (18) p может содержаться в числителе последнего, то есть в m. Но степень p, делящая m, есть p^r, а значит произведение (18) не может делиться на большую степень p, чем p^r. Так как p^r делит m, а $m \le n$, то $p^r \le n$. Лемма доказана.

Представим себе, что она говорит нам о каноническом разложении $C_n^k = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Прежде всего, простые числа $p_1, \dots, p_m$ могут появиться только из числителя выражения (16), значит, все $p_i \le n$ и поэтому $m \le \pi(n)$. По лемме, $p_i^{\alpha_i} \le n$ для $i = 1, \dots, m$. В результате мы получаем, что

$$C_n^k \le n^{\pi(n)}. \tag{19}$$

Теперь можно приступить к самому доказательству теоремы Чебышева, то есть неравенств (1). Заметим, что нам достаточно доказать выполнение этих неравенств лишь для всех n, начиная с некоторой фиксированной границы n_0. Для всех $n < n_0$ выполнения можно добиться за счет уменьшения постоянной c и увеличения постоянной C. Если же стремиться получить значения этих постоянных в явном виде и наиболее экономно, то можно проверить, составляя таблицы простых чисел, что неравенства (1) выполняются при значениях $n \le n_0$ (в наших рассуждениях n_0 будет получаться небольшим числом).

Начнем с сопоставления неравенств (13) и (19) для биномиального коэффициента C_{2n}^n. Мы получаем, что $2^n \le C_{2n}^n \le (2n)^{\pi(2n)}$ и следовательно

$$2^n \le (2n)^{\pi(2n)}. \tag{20}$$

Беря от обеих частей логарифм с основанием 2 (напомним, что мы будем писать $\log_2 x = \log x$) и воспользовавшись монотонностью логарифма, мы получим, что $n \le \pi(2n)\log 2n$ и значит

$$\pi(2n) \ge \frac{n}{\log 2n} = \frac{1}{2}\frac{2n}{\log 2n},$$

то есть левое из двух неравенств (10) с постоянной $c = \frac{1}{2}$. Но покамест оно доказано только для четных значений n. Для нечетных значений вида $2n+1$ мы воспользуемся монотонностью логарифма и функции $\pi(n)$. Отсюда следует, что

$$\pi(2n+1)\log(2n+1) \ge \pi(2n)\log 2n.$$

Подставляя сюда полученное неравенство для $\pi(2n)$, мы видим, что

$$\pi(2n+1) \ge \frac{n \log 2n}{\log(2n)\log(2n+1)} = \frac{n}{\log(2n+1)}.$$

Так как всегда $n \ge \frac{1}{3}(2n+1)$, то отсюда

$$\pi(2n+1) \ge \frac{1}{3}\frac{2n+1}{\log(2n+1)}.$$

Таким образом левое из неравенств (10) доказано для нечетных n с постоянной $c = \frac{1}{3}$. Значит, левое неравенство (10) верно для всех n и $c = \frac{1}{3}$.

Переходим к доказательству второго правого неравенства (10). Мы докажем его индукцией по n. Пусть сначала n четно. Мы будем писать вместо него $2n$. Соединим неравенство (11) для коэффициента C_{2n}^n (то есть, заменим в C_n^k n на $2n$ и k на n) с неравенством (14). Как следствие мы получим:

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \le 2^{2n}$$

и, переходя к логарифмам, получаем:

$$\begin{aligned} \pi(2n) - \pi(n) &\le \tfrac{2n}{\log n}, \\ \pi(2n) &\le \pi(n) + \tfrac{2n}{\log n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Согласно индуктивному предположению мы можем считать нужное нам неравенство доказанным: $\pi(n) \le C\frac{n}{\log n}$ с постоянной C, значение которой мы позже уточним. Подставляя в формулу (21), получим:

$$\pi(2n) \le C\frac{n}{\log n} + \frac{2n}{\log n} = \frac{(C+2)n}{\log n}.$$

Мы же хотели бы доказать неравенство $\pi(2n) \le \frac{C\cdot 2n}{\log 2n}$ и для этого нам остается подобрать постоянную C так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(C+2)n}{\log n} \le \frac{2Cn}{\log 2n} \tag{22}$$

для всех n, начиная с некоторого.

Это уже — чисто школьное упражнение. Сократим в неравенстве обе части на n, заметим, что $\log 2n = \log 2 + \log n = \log n + 1$ и обозначим $\log n$ через x. Тогда неравенство (22) приобретает вид

$$\frac{C+2}{x} \le \frac{2C}{x+1}.$$

Умножая обе части на $x(x+1)$ (так как $x > 0$) и приводя подобные члены, мы запишем его в виде

$$(C-2)x \ge C+2.$$

Очевидно, что C надо выбрать так, чтобы $C - 2 > 0$. Положив, например, $C = 3$, мы получаем, что оно выполнено для $C = 3$ и всех $x \ge 5$. Так как x обозначает у нас $\log n$, то это значит, что нужное неравенство будет выполнено для $n \ge 2^5 = 32$, $2n \ge 64$.

Остается рассмотреть случай нечетных значений имеющих вид $2n+1$. Сравним для этого неравенство (11) (заменив в нем n на $2n+1$, а k — на n) с неравенством (15). Мы получим неравенство

$$2^{2n+1} \ge (n+1)^{\pi(2n+1)-\pi(n+1)}$$

и логарифмируя его, — неравенство

$$2n+1 \geq (\pi(2n+1) - \pi(n+1))\log(n+1).$$

Отсюда, используя индуктивное предположение о $\pi(n+1)$, мы получаем, как и раньше:

$$\pi(2n+1) \leq C\frac{n+1}{\log(n+1)} + \frac{2n+1}{\log(n+1)}.$$

Нужное нам неравенство $\pi(2n+1) \leq C\frac{2n+1}{\log(2n+1)}$ будет доказано, если мы проверим, что

$$C\frac{n+1}{\log(n+1)} + \frac{2n+1}{\log(n+1)} \leq C\frac{2n+1}{\log(2n+1)} \tag{23}$$

при надлежащем подборе постоянной C и для всех n, начиная с некоторого. Это опять упражнение чисто школьного типа, хотя немного сложнее предыдущего. Чтобы сделать разные члены неравенства легче сравнимыми друг с другом, заменим в левой части $2n+1$ на большее значение: $2(n+1)$

$$C\frac{n+1}{\log(n+1)} + \frac{2n+1}{\log(n+1)} \leq \frac{(C+2)(n+1)}{\log(n+1)}. \tag{24}$$

Для преобразования правой части заметим, что $2n+1 \geq \frac{3}{2}(n+1)$ для $n \geq 1$, $\log(2n+1) \leq \log(2n+2) = \log(n+1)+1$. Поэтому

$$\frac{2n+1}{\log(2n+1)} \geq \frac{(3/2)(n+1)}{\log(n+1)+1}. \tag{25}$$

Сравнивая неравенства (24) и (25) мы видим, что неравенство (23) будет доказано, если мы докажем, что

$$\frac{(C+2)(n+1)}{\log(n+1)} \leq \frac{(3/2)C(n+1)}{\log(n+1)+1}.$$

Сократим обе части на $n+1$ и положим $\log(n+1) = x$. Мы приходим к неравенству

$$\frac{C+2}{x} \leq \frac{(3/2)C}{x+1},$$

которое решается совершенно так же, как в разобранном случае. Надо умножить обе его части на $x(x+1)$ и привести подобные члены. Мы получим неравенство $(C+2)x + C + 2 \leq \frac{3}{2}Cx$ или $(\frac{1}{2}C - 2)x \geq C+2$. Полагая $C = 6$, мы видим, что неравенство верно при $x \geq 8$, то есть $n+1 \geq 2^8$, $2n+1 \geq 511$. Таким образом, правое неравенство (10) доказано при постоянной $C = 6$ и для всех значений n, начиная с 511. Тем самым теорема доказана.

Заметим, что теорема 4 является очень простым следствием доказанной теоремы. Действительно, раз $\pi(n) < C\frac{n}{\log n}$, то $\frac{\pi(n)}{n} \leq \frac{C}{\log n}$. А так как логарифм меняется монотонно и неограниченно растет ($\log 2^k = k$), то $\frac{\pi(n)}{n}$ становится меньше любого положительного числа. С другой стороны, доказательство теоремы Чебышева основано совсем на других соображениях, чем доказательство теоремы 4.

В заключение обратимся еще раз к предположениям, которые можно сделать из рассмотрения таблицы 1. Исходя из нее мы пришли к догадке, что $\frac{n}{\pi(n)}$ близко к $\log_{10} n$ с некоторым определенным значением постоянной C: первые два знака в десятичном представлении числа C^{-1} имеют вид 2,3. Отсюда можно заключить, что $\pi(n)$ близко к $C^{-1}\frac{n}{\log_{10} n}$. Этому выражению можно придать более простой вид $\frac{n}{\log_e n}$, если подобрать новое основание логарифмов e так, чтобы было $C \log_{10} n = \log_e n$. Но, как было сказано выше, всегда $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$, поэтому наше соотношение будет выполнено, если $C = \log_e 10$. Подставляя в соотношение $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$ значение $x = b$, мы получаем, что $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ и интересующее нас соотношение $C = \log_e 10$ можно переписать в виде $C^{-1} = \log_{10} e$.

14-летний Гаусс конечно обратил внимание на эти соотношения и угадал, что это за число e, для которого $\log_{10} e$ близко к $(2,3)^{-1}$. Такое число к этому времени было хорошо известно именно благодаря тому, что логарифм с таким основанием обладает многими полезными свойствами. Для этого числа, e — это его общепринятое обозначение. Логарифм с основанием e называется *натуральным* и обозначается ln: $\log_e(x) = \ln(x)$. Здесь мы вынуждены считать (в оставшейся странице), что читатель знаком с понятием натуральных логарифмов.

Таким образом, естественное предположение, вытекающее из рассмотрения таблиц, заключается в том, что $\pi(n)$ становится все ближе к $\frac{n}{ln\, n}$. Доказанная теорема Чебышева утверждает (если пользоваться натуральными логарифмами) существование двух таких постоянных c и C, что $c\frac{n}{ln\, n} < \pi(n) < C\frac{n}{ln\, n}$, начиная с некоторого n. То гипотетическое уточнение, к которому можно прийти исходя из таблиц, утверждает, что неравенства $c\frac{n}{ln\, n} < \pi(n) < C\frac{n}{ln\, n}$ выполняются начиная с некоторого n, какие бы постоянные $c < 1$ и $C > 1$ мы ни взяли. Это утверждение называется *асимптотическим законом распределения* простых чисел. Оно было высказано Гауссом и другими математиками в конце XVIII и начале XIX в. После доказательства неравенств Чебышева в 1850 г. речь шла, казалось бы, только о более точном нахождении и сближении постоянных c и C. Однако асимптотический закон распределения простых чисел был доказан лишь полвека спустя, в самом конце XIX в., на основании совершенно новых идей, предложенных Риманом.

Задачи

1. Докажите, что $p_n > an \log n$ при некоторой постоянной $a > 0$. (Указание: воспользоваться тем, что $\pi(p_n) = n$.)

2. Докажите, что $\log n < \sqrt{n}$, начиная с некоторой границы (определите ее). (Указание: сведите вопрос к доказательству неравенства $2^x > x^2$ для вещественных x, начиная с некоторой границы. Пусть $n \le x \le n+1$, где n — целое. Сведите к доказательству неравенства $2^n \ge (n+1)^2$ и используйте индукцию.)

3. Докажите, что $p_n < Cn^2$ при некоторой постоянной C. (Указание: примените неравенство предшествующей задачи и воспользуйтесь тем, что $n = \pi(p_n)$.)

4. Докажите, что $p_n < An \log n$ при некоторой постоянной A.

5. Докажите, что показатель степени a в наибольшей степени p^a, делящей $n!$,

равен

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Здесь $\left[\frac{r}{s}\right]$ — неполное частное от деления r на s, сумма распространяется на все k, для которых $p^k \leq n$, p обозначает произвольное простое число, а n — произвольное натуральное число.

6. При помощи результата задачи 5 дайте другое доказательство леммы в Приложении.

7. Докажите, что если $p_1, \ldots, p_r$ — все простые числа, заключенные между m и $2m + 1$, то их произведение не превосходит 2^{2m}.

8. Определите постоянные c и C, при которых неравенство (10) выполнено при всех n.

9. Постарайтесь найти по возможности бóльшую постоянную c и по возможности мéньшую постоянную C, при которых неравенство (10) выполнено для всех n, начиная с некоторого.

Интегральная геометрия и компьютерная томография (окончание)

В.П. Паламодов

Специальный курс по интересному разделу современной математики – интегральной геометрии – и ее приложениям в компьютерной томографии был прочитан профессором Виктором Павловичем Паламодовым в Математическом Колледже Независимого Московского Университета в осеннем семестре 1995/96 г. Мы завершаем публикацию избранных частей этого курса. Лекции 1-2, представляющие логически связное введение в вопрос, были опубликованы в первом номере журнала. В третьем номере были опубликованы лекции 3-6, излагающие основной математический аппарат. В лекциях 7-9, приведенных в настоящем выпуске, изучаются алгоритмы компьютерной томографии и связанные с ними математические вопросы.

Лекция 7

Теорема отсчетов

Рассмотрим вещественную функцию $y = f(t)$ на оси t (время). Пусть в некоторые моменты ее значения известны (фиксируются прибором): $y_k = f(t_k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Функцию $y_k = f(t_k)$, определенную на дискретном множестве $\{t_k : k \in \mathbf{Z}\}$, будем называть *функцией отсчетов* для данной функции $y = f(t)$. Можно ли по функции отсчетов восстановить саму функцию f? Произвольную, очевидно, нет. Но, оказывается, можно восстановить функцию с ограниченным спектром. Такие функции не могут вести себя хаотично, в частности, их корни не могут быть расположены слишком часто.

Примеры. 1. $y = \operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$, рис. 1.

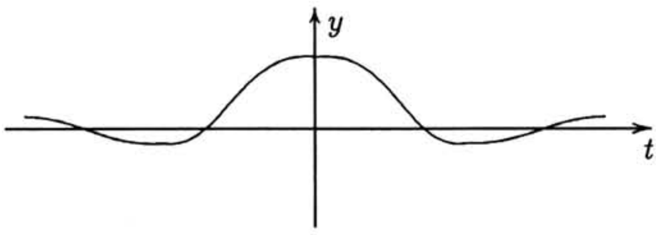


Рис. 1

Эта функция имеет нули в точках $t_k = k\pi$, $k \neq 0$, в 0 значение считается равным 1. Ее функция отсчетов на множестве $\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ является так называемой базисной (одно значение 1, остальные — нули). Покажем, что функцию sinc можно восстановить по отсчетам. Найдем ее спектр. В одной из предыдущих лекций он явно вычислялся, но можно его найти и по теореме Пейли–Винера, сделав оценку роста: $|\operatorname{sinc} z| \le \frac{e^{|z|}+1}{|z|}$. Имеем: $\operatorname{sinc} = F^{-1}(\pi\chi)$, где χ — индикатор отрезка $\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$, то есть sinc — функция с ограниченным спектром, см. рис. 2.

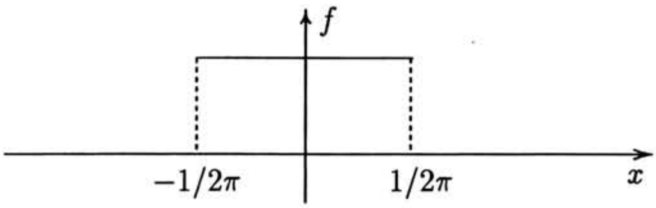


Рис. 2

2. $y(t) = \operatorname{sinc}(t - s)$. Это тоже функция с ограниченным спектром для любого $s \in \mathbf{R}$ (и даже для любого $s \in \mathbf{C}$). При $s = k\pi$ ее функция отсчетов тоже получится базисной на множестве $\{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$.

3. $y(t) = \operatorname{sinc}(\lambda t)$.

Упражнение. Если $F : f(x) \mapsto \tilde{f}(\xi)$, то $F : f(\lambda x) \to \frac{1}{\lambda}\tilde{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

Для получения отрезка $\left[-\frac{\lambda}{2\pi}, \frac{\lambda}{2\pi}\right]$ (спектр функции $y(t)$), надо функцию, спектр которой — стандартный отрезок $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, подвергнуть растяжению с $\lambda = \pi$. Добавив еще сдвиги на πk, получим все базисные функции отсчетов:

$$g_0(t) = \operatorname{sinc}(\pi t),$$

$$g_k(t) = \operatorname{sinc}(\pi t - \pi k) = \operatorname{sinc}(\pi(t - k)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Тогда

$$g_k(l) = \delta_k^l = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \ne k \end{cases}$$

Гипотеза: Пусть спектр лежит в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда должно быть $f(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(k) g_k(t)$.

Теорема (Уиттекер Э.Т.–Котельников–Шеннон). Пусть $f \in L_2(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\operatorname{sinc}(\pi(x - k))$, причем ряд сходится в L_2 и в каждой точке x.

Доказательство. По теореме Планшереля $\tilde{f} \in L_2\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, вне этого отрезка $\tilde{f}$ равна нулю. Разложим $\tilde{f}$ в ряд Фурье: $\tilde{f}(\xi) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \xi}$, причем $\sum |c_k|^2 = \int |\tilde{f}|^2 d\xi = \int |f|^2 dx$ (равенство Парсеваля).

Тогда на всей оси $\tilde{f}(\xi) = \sum c_k \chi(\xi) e^{2\pi i k \xi}$, где χ — индикатор отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Возьмем обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \sum c_k F^{-1}\left(\chi(\xi) e^{2\pi i k \xi}\right) = \sum c_k \operatorname{sinc}(\pi(x - k)),$$

очевидно, $c_k = f(k)$.

Ряд сходится абсолютно для любого $x \in \mathbf{R}$. Действительно,

$$\left(\sum |c_k \operatorname{sinc}(\pi(x-k))|\right)^2 \le \sum |c_k|^2 \sum |\operatorname{sinc}(\pi(x-k))|^2.$$

Поскольку $|\operatorname{sinc}\pi(x-k)| \le \frac{1}{\pi|x-k|}$, то $\sum |\operatorname{sinc}(\pi(x-k))|^2 < \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Сходимость ряда довольно медленная. При практическом численном восстановлении используется конечная сумма:

$$f(x) \approx \sum_{-N}^{N} f(k) \operatorname{sinc}(\pi(x-k)).$$

Отброшенный "хвост" имеет оценку $\left|\frac{2}{\pi^2(N-|x|)} \sum f^2(k)\right|^{1/2}$.

Медленность убывания происходит из-за разрыва характеристической функции. Поэтому можно ее сначала сгладить, рис. 3.

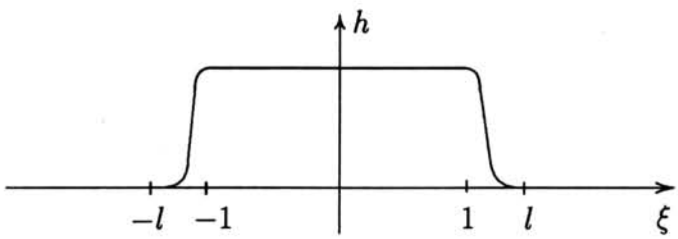


Рис. 3

Пусть $\bar{\bar{S}}(x) = F^{-1}(h)$. Эта функция быстро убывает, если h бесконечно гладкая. У функции $\bar{\bar{S}}$ спектр шире, поэтому последовательность отсчетов должна быть более частой.

Задача 1 (Аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона). Покажите, что

$$f(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{l}\right) s\left(x - \frac{k}{l}\right),$$

где s – преобразование Фурье функции h, которая равна 1 на $[-1/2, 1/2]$ и $\operatorname{supp} h \subset [-l/2, l/2]$.

Указание. Разложите $\tilde{f}$ в ряд Фурье на $[-l/2, l/2]$.

Напишем ряд $\sum f(k)\operatorname{sinc}(\pi(x-k))$ для произвольной функции $f \in L_2(\mathbf{R})$ — не обязательно с ограниченным спектром. Предположим, что $\tilde{f} \in L_1(\mathbf{R})$ Как значение ряда связано с исходной функцией f? См. рис. 4.

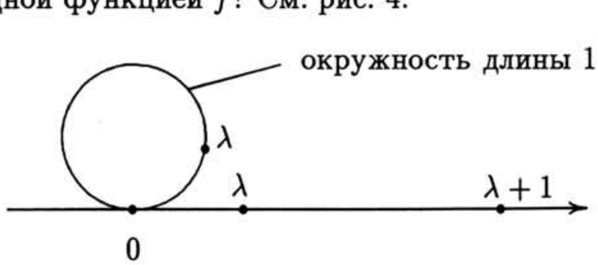


Рис. 4

Задача 2. Рассмотрим $\{\lambda+k\}$ — последовательность прообразов λ при намотке оси ξ на окружность. Положим $g(\lambda) = \chi(\lambda) \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + k)$. Докажите, что

$$\sum f(k)\mathrm{sinc}(\pi(x-k)) = F^{-1}g(x) \tag{1}$$

Указание. Сдвиг $T_k\varphi$ функции $\varphi(\xi)$ на целое число k не меняет значений $F^{-1}\varphi$ в целых точках $x = n$.

Пространство функций со спектром в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ является замкнутым подпространством в $L^2(\mathbf{R})$. Формула (1) дает явный вид этого проектора на это подпространство: $Pf = \sum f(k)\mathrm{sinc}\,(\pi(x-k))$.

Задача 3 (формула Пуассона). Предположим дополнительно, что $\sum |f(k)| < \infty$. Докажите, что

$$\sum f(k) = \sum \tilde{f}(k).$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (1).

Пусть непрерывный процесс (одномерный) описывается функцией $f(x)$. Вообще говоря, ее спектр не ограничен. А численно восстановить можно только функцию с ограниченным спектром. Отсюда возникает необходимость фильтрации перед восстановлением, по следующей схеме:

$$f \xrightarrow{F} \tilde{f} \longrightarrow h\tilde{f} \xrightarrow{F^{-1}} fh,$$

где h — финитная функция.

Томография основана на двумерном аналоге теоремы отсчетов. Очевидно, справедлив простой декартов аналог теоремы восстановления с использованием разложения по произведениям $\mathrm{sinc}\,(x)\mathrm{sinc}\,(y)$. На практике используются также и другие базисные функции.

Лекция 8

Свертка

Свертка на прямой R

Рассмотрим $\mathbf{R}$ как группу по сложению с инвариантной мерой dx.

Определим свертку функций на $\mathbf{R}$ формулой

$$f * g(x) \stackrel{def}{=} \int f(x-y)g(y)dy.$$

Достаточные условия существования свертки: $\int |f|dx < \infty$ и $|g| \leq c$ или $\int |g|dx < \infty$.

Свойства свертки:

1) это билинейная операция по каждой свертываемой функции;

2) симметричность (коммутативность) $f * g(x) = \int f(z)g(x-z)dz = g * f$ (где $z = x - y$);

3) если f и g суммируемы, то свертка тоже суммируема и $\int |f * g|dx \leq \int |f|dx \int |g|dx$ или $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$.

   Следствие.Свертка превращает пространство $L_1(\mathbf{R})$ суммируемых функций в коммутативную нормированную алгебру с нормой: $||f||_1 := \int |f|dx$.

4) ассоциативность: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Теорема.Если $f, g \in L^1$, то $F(f * g) = F(f)F(g)$

Доказательство.

$$\begin{gathered}\int e^{-2\pi i\xi x}dx \int f(x-y)g(y)dy = \\ \iint e^{-2\pi i\xi x} f(x-y)g(y)dxdy = \\ \iint e^{-2\pi i\xi(z+y)} f(z)g(y)dzdy = \\ \int e^{-2\pi i\xi z} f(z)dz \int e^{-2\pi i\xi y} g(y)dy = F(f)F(g),\end{gathered}$$

здесь сделана замена $x - y = z$, $x = z + y$, ее матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет определитель 1. Кроме того, дважды применена теорема Фубини.

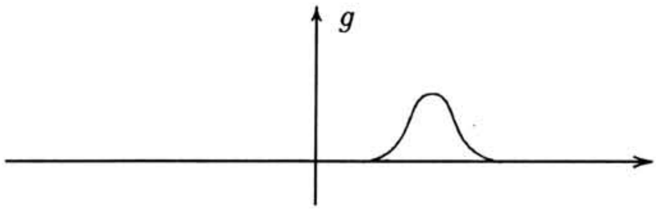
Следствие.

$$F^{-1}(\varphi\psi) = F^{-1}(\varphi) * F^{-1}(\psi).$$

Задача 1. Докажите тождество $F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$ для функций f, g из пространства Шварца $S(\mathbf{R})$.

Свертка несуммируемых функций

Пусть функция f — локально суммируема, а g — финитная ограниченная функция.



Тогда свертка $f * g$ определена и локально суммируема.

Обобщенные функции

Пусть K — основное пространство — состоит из финитных гладких плотностей $\rho = \varphi dx$, где φ — гладкая финитная функция.

Сходимость. Пусть имеется последовательность финитных гладких плотностей $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k \ldots$. Мы пишем $\rho_k \to 0$ если:

1) имеется некоторый промежуток [-c,c], такой, что $\rho_k = 0$ вне этого промежутка.

2) $\frac{d^j \varphi_k}{dx^j} \to 0$ при $k \to 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$

Такая последовательность плотностей называется сходящейся к нулю.

Более общо: $\rho_k \to \rho \Leftrightarrow (\rho_k - \rho) \to 0$. Если $\rho_k \to \rho$, $\sigma_k \to \sigma$ *в* K, то $(\rho_k + \sigma_k) \to (\rho + \sigma)$.

Доказательство очевидно.

Определение. Обобщенная функция на прямой есть непрерывный линейный функционал на $K(\mathbf{R})$, т.е. такое отображение $u : \ K(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$, что

$$u(a\rho + b\sigma) = au(\rho) + bu(\sigma) \text{ (линейность)},$$

$$u(\rho_k) \to u(\rho), \text{ если } \rho_k \to \rho \text{ (непрерывность)}.$$

Пространство обобщенных функций обозначается K'.

Слабая сходимость: $u_k \overset{слабо}{\Longrightarrow} u$ если $u_k(\rho) \to u(\rho)$ $\forall \rho \in K$ (слабая сходимость — поточечная сходимость).

Примеры:

I. Пусть f локально суммируемая функция на прямой (обычная функция). $[f]$ — обобщенная функция, которая действует на плотность $\rho = \varphi dx$ по формуле $[f](\rho) := \int f \varphi dx$; линейность такого функционала очевидна, а непрерывность обеспечивается сходимостью интегралов $\int f \varphi_k dx \to \int f \varphi dx$.

II. Дельта функция $\delta_a(\rho) = \varphi(a)$.

III. Интеграл Коши $\left[\frac{1}{x}\right](\rho) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi}{x} dx$.

Операции над обобщенными функциями

1) Линейные операции определяются обычным образом.

2) Умножение на гладкие функции.

Пусть $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ и $u \in K'(\mathbf{R})$. По определению $hu(\rho) = u(h\rho)$.

Замечание. Если мы возьмем обычную функцию f, то $[hf]\rho = \int hf\varphi dx = \int f(h\varphi)dx$, следовательно это определение согласовано с умножением обычных функций.

3) Дифференцирование

$$\frac{du}{dx}(\rho) = -u(\varphi' dx)$$

Замечание. Для обычных функций f, имеющих локально суммируемую производную f',

$$[f'](\rho) = \int f'\varphi dx \underset{\substack{\text{интегрирование}\\ \text{по частям}}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int f\varphi' dx + \underset{\text{т.к.}\varphi - \text{финитна}}{\overset{\uparrow}{0 =}}$$

$= \frac{df}{dx}(\rho)$, т.е. обычная производная и производная в смысле обобщенных функций совпадают.

4) Свертка обобщенной функции с элементом из K. Пусть σ — гладкая финитная плотность $\sigma = \psi(x)dx$, а f — локально суммируемая функция. Имеем:

$$[f * \sigma](\rho) =$$

$$= \int\int f(y)\psi(x-y)dy\varphi dx \overset{\textit{по теореме Фубини}}{=} \int f(y) \left[\int \psi(x-y)\varphi(x)dx\right] dy =$$

$$(\text{полагаем } \check{\sigma} = \check{\psi}dx, \text{где } \check{\psi}(x) = \psi(-x))$$

$$= \int f(y)(\int \check{\psi}(y-x)\varphi(x)dx)dy = \int f(\check{\psi} * \rho)dy = [f](\check{\sigma} * \rho)$$

Поэтому для обобщенной функции u мы полагаем по определению $(\sigma * u)(\rho) = u(\check{\sigma} * \rho)$.

Примеры.

IV. Производная δ-функции

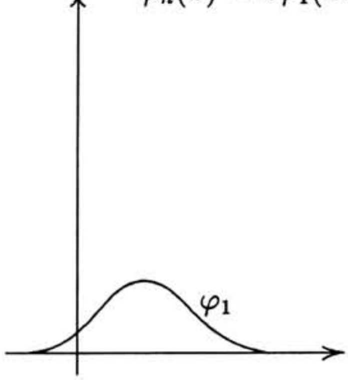
$$\delta' a = \frac{d\delta a}{dx} \quad \delta a'(\rho) = -\delta a(\rho') = -\varphi'(a).$$

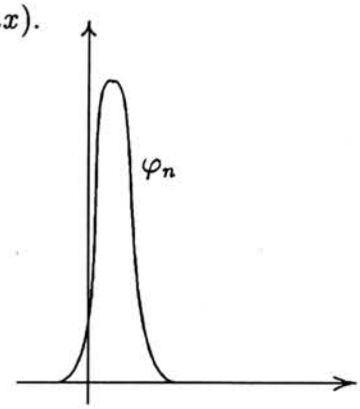
Регуляризация обобщенных функций

Дельта-образной последовательностью элементов из K будем называть последовательность $\rho_n = \varphi_n dx$, где φ_n слабо стремится к δ_0.

Выберем произвольную функцию φ_1 такую, что $\int \varphi_1 dx = 1$ и построим последовательность плотностей:

$$\varphi_n(x) = n\varphi_1(nx) \text{ и } \rho_n = \varphi_1(nx)d(nx).$$





Заметим, что $\int \rho_n = \int \varphi_1(nx)d(nx) = \int \varphi_1(y)dy = 1$ (подобно δ-функции).
Задача 2.
Если имеется δ-образная последовательность $\{\rho_n\}$, то для всякой $u \in K'$

$$u * \rho_n \overset{\text{слабо}}{\Longrightarrow} u.$$

Задача 3. Докажите, что

$$\forall u \in K',\ \forall \sigma \in K:\ u * \sigma \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

Алгоритм томографического восстановления

Пусть $g(p, \alpha)$ — преобразование Радона функции $f(x, y)$.

Запишем формулу обращения:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int (g' * \frac{1}{p})(x\cos\alpha + y\sin\alpha, \alpha)d\alpha =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int g * \left[\frac{1}{p}\right]'(x\cos\alpha + y\sin\alpha, \alpha)d\alpha$$

Таким образом восстановление f достигается сверткой и обратной проекцией

Идея алгоритма: заменить $\left[\frac{1}{p}\right]'$ на ее свертку $\left[\frac{1}{p}\right]' * \psi$ с дельтаобразной функцие ψ.

Лекция 9

Алгоритмы плоской томографии

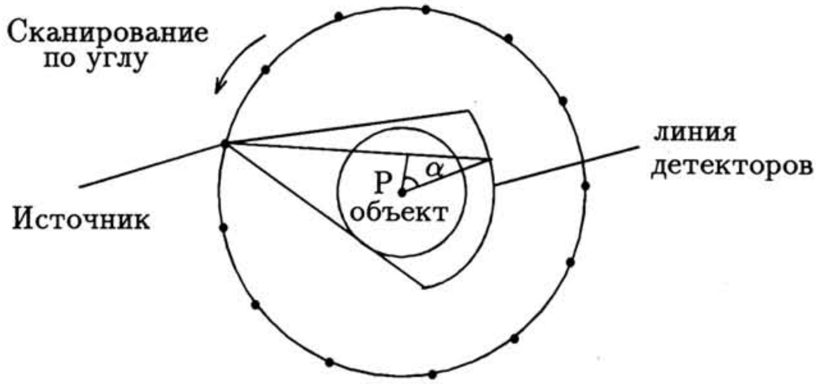


Рис. 1

Стандартные алгоритмы "свертка" и "обратная проекция"

Установка медицинской томографии (см. рис. 1) получает значения около 20 тысяч интегралов по лучам, распределенным по параметрам α и p. Функция плотности теоретически может быть восстановлена по формуле

$$f(x.y) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\int\frac{g'_p(p,\alpha)dp\,d\alpha}{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p} =$$
$$= \text{Обратная проекция}\ \left(g * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right]\right)$$

Алгоритм свертки и обратной проекции основан на этой формуле, но оба интеграла заменяются дискретными интегральными суммами; производится выборка отсчетов по p и α. Поэтому важно провести ограничения спектра функции g. Вообще говоря g не обязана иметь ограниченный спектр. Исходная функция f имела компактный носитель (тело помещается внутри томографа). Значит и g имеет компактный носитель, ее спектр не может быть конечным (иначе она была бы целой аналитической). Так что условия компактности носителя и конечности спектра противоречивы. Восстановление функции плотности осуществляется по схеме:

1) Обрезка спектра функции g : $g \mapsto g_b$, $\operatorname{supp} F(g_b) \subset [-b, b]$. Самый простой способ: умножить $F(g)$ на финитную функцию Φ_b с носителем в $[-b, b]$. Функция Φ_b называется фильтром. Итак, $F(g_b) = F(g)\cdot\Phi_b$, отсюда находится g_b. Это можно делать непосредственно по указанным формулам при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (число операций порядка $n\ln n$, где n — число точек, в которых задана g). Но можно воспользоваться свойствами свертки.

Пусть $w_b = F^{-1}(\Phi_b)$ (эта функция называется окном), мы имеем $g_b = g * w_b$. При такой фильтрации отбрасывается значительная часть шума (он имеет квантовый характер и является неустранимой погрешностью).

2) Дискретная свертка

$$(g_b) * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right] = g * w_b * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right] = (g) * r_b.$$

Функция $r_b = w_b * \left[-\frac{1}{2\pi^2 p^2}\right]$ называется регуляризацией сингулярной функции $-\frac{1}{2\pi^2 p^2}$, ее график показан на рис. 2.

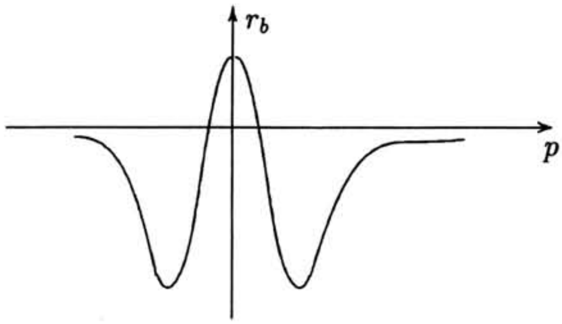


Рис. 2

Приведем пример конкретного окна и конкретного фильтра (алгоритм Shepp-Logan).

$$w_b(\xi) = \begin{cases} sinc\,\frac{\xi\pi}{2b}, & |\xi| \le 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

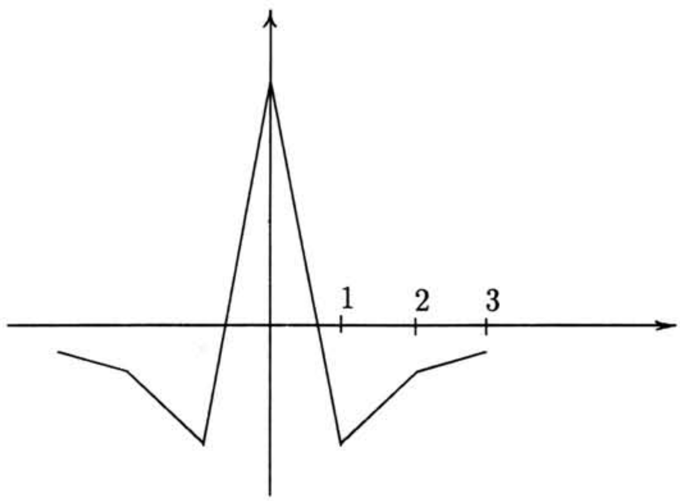


Рис. 3

$r_b(lh) = \frac{8b^2}{\pi^2}\frac{1}{1-4l^2}$, где $h = \frac{1}{2b}$ — шаг дискретизации (расстояния между точками отсчетов), l — номер точки отсчета. График см. на рис. 3. $w_b(0) = \frac{2}{\pi^2 h^2}$. В промежуточных точках функция r_b вычисляется при помощи линейной интерполяции.

Итак, окончательный результат в этом случае

$$\sum_l g(hl,\alpha) r_b(x\cos\alpha + y\sin\alpha - hl) = G(x,y,\alpha).$$

3) Дискретная обратная проекция делается в предположении, что углы α распределены равномерно, рис. 1. Тогда $F(x,y) = \sum_k G(x,y,\alpha_k)\delta\alpha$, здесь $F(x,y)$ — восстановление по дискретным данным. Выбор шага по углу делается из условия $\alpha_k = k\delta\alpha$, $\delta\alpha r = h$. Неправильный выбор шага или алгоритма приводит к снижению качества и появлению артефактов.

Замечание. Мы занимались восстановлением, исходя из "параллельной геометрии": $\alpha_k = k\varphi$, $p_l = lh$. Сбор данных осуществляется по "веерной геометрии", рис. 4. Естественными координатами являются β и γ. Тогда решетка будет $\gamma = l\psi$, $\beta_k = k\chi$. Формулы перехода (элементарная геометрическая задача).

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \gamma - \tfrac{\pi}{2} \\ p &= R\sin\beta \end{aligned}$$

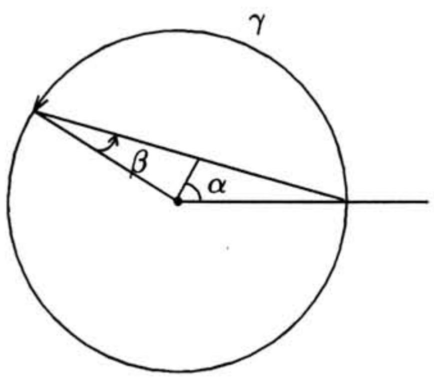


Рис. 4

Тогда необходим еще шаг интерполяции для перевода данных веерной геометрии в данные параллельной геометрии. Обычно применяется линейная интерполяция.

Точность восстановления

Рассмотрим процесс восстановления $f \mapsto g \mapsto F_A$, A — алгоритм восстановления, включающий фильтрацию $g \mapsto g_b * w_b$, $b = \frac{1}{2h}$. Параметр b определяется из соотношения Найквиста $2bh = 1$. Частота b и более высокие частоты отсекаются фильтром. На прикладном языке эта частота "изображает деталь размером h". В результате фильтрации отбрасываются "детали размера h и мельче". При восстановлении правильно изображаются "детали размера h".

Для проверки алгоритмов используются "фантомы" — явно заданные функции, для которых все интегралы считаются по аналитическим формулам. Восстанавливая такие функции, можно проверить точность восстановления.

Важный параметр — числа N квантов, по которым получаются данные вдоль одного луча. Чтобы измерить его, используется калибровочный детектор, находящийся вблизи источника. До него долетают почти все кванты N_0, двигающиеся в данном направлении. Можно считать, что в остальных направлениях летит примерно столько же квантов $N \approx N_0$. На самом деле имеет место квантовая флуктуация: $N \approx N_0 + O(\sqrt{N_0})$. Тогда $\frac{N}{N_0} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$. Пусть n — число дошедших до детектора квантов. $\frac{n}{N} \sim e^{-\int f ds}$. Следовательно относительная ошибка и у $\int f ds$ не меньше $O(\frac{1}{\sqrt{N_0}})$. А значит и f принципиально нельзя восстановить точнее. Например, для опухолей мозга разница в плотности здоровой и больной тканей имеет порядок $0,5 - 1\%$. Поэтому существенно, чтобы было $O\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \ll 0,01$, т.е. $N_0 \gg 10000$.

Четыре рассказа по геометрии

В. В. Прасолов

В. В. Прасолов — автор нескольких книг по геометрии, включая популярное, выпущенное массовым тиражом пособие "Задачи по планиметрии" в двух частях. Предлагаемые в настоящем выпуске заметки, кроме первой, которая публикуется впервые, вошли в его новую книгу "Рассказы о числах, многочленах и фигурах", вышедшую в 1997 г. в московском издательстве "Фазис". Каждый рассказ может служить темой занятия математического кружка или факультатива.

1. Векторы в геометрии

Векторы часто бывают полезны при решении геометрических задач. Кроме того, некоторые геометрические теоремы удобно формулировать на языке векторов.

При работе с векторами часто используют *скалярное произведение*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = OA \cdot OB \cos AOB.$$

Скалярное произведение обладает следующими важными свойствами:

$(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;

$(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$;

$(a, a) = |a|^2$ — квадрат длины вектора a.

С помощью векторов легко доказать, что *высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке.* В самом деле, пусть O — центр описанной окружности и H — такая точка, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Тогда, как легко проверить, $AH \perp BC$, $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$, т.е. H — точка пересечения высот.

Доказать это можно разными способами. Во-первых, можно заметить, что

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \\
&= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\
&= |OC|^2 - |OB|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Во-вторых, можно заметить, что проекции векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ на прямую BC равны по длине и противоположны по направлению. Следовательно, проекции векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OH}$ на прямую BC совпадают. Это означает, что $AH \perp BC$.

Мы не только доказали, что высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке, но и получили для этой точки H достаточно удобное выражение: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где O — центр описанной окружности. С помощью этого выражения можно решить, например, следующую задачу.

Задача 1. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения высот треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 совпадают.*

Указание. Если A_2 — середина отрезка A_1A, то

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right),$$

где O — центр окружности.

Векторы, идущие из центра правильного многоугольника в его вершины, обладают следующим интересным свойством: их сумма равна нулю. Сформулируем это утверждение более точно. Пусть $A_1 \dots A_n$ — правильный n-угольник, O — его центр. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Чтобы доказать равенство (1), рассмотрим поворот, переводящий A_1 в A_2, A_2 в $A_3, \dots, A_n$ в A_1. При таком повороте вектор $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$, с одной стороны, поворачивается на угол $2\pi/n$, а с другой стороны, этот вектор не изменяется, поскольку $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1}$ Следовательно, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

С помощью равенства (1) можно доказать, что *если точка X находится на расстоянии d от центра O правильного n-угольника $A_1 \dots A_n$, то*

$$A_1X^2 + \dots + A_nX^2 = n(R^2 + d^2),$$

где R — радиус описанной окружности n-угольника. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum A_iX^2 &= \sum |\overrightarrow{A_iO} + \overrightarrow{OX}|^2 = \\ &= \sum A_iO^2 + \sum OX^2 + 2(\sum \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}) = \\ &= nR^2 + nd^2, \end{aligned}$$

поскольку $\sum \overrightarrow{A_iO} = \overrightarrow{0}$.

Прежде чем приступить к последней теме этого рассказа, полезно разобрать следующую задачу.

Задача 2. *Рассмотрим выпуклый многоугольник и сопоставим каждой его стороне единичный вектор внешней нормали $\overrightarrow{n_i}$ (т.е. вектор длины 1, перпендикулярный данной стороне и направленный наружу по отношению к многоугольнику). Пусть a_i — длина i-й стороны. Докажите, что $\sum a_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}$.*

Указание. После поворота на $90°$ вектор $\sum a_i \overrightarrow{n_i}$ переходит в вектор стороны многоугольника, а сумма длин всех векторов сторон многоугольника равна нулю.

Утверждение, аналогичное задаче 2, справедливо и для многогранников. А именно, *рассмотрим выпуклый многогранник и сопоставим каждой его стороне единичный вектор внешней нормали $\overrightarrow{n_i}$. Пусть A_i — площадь i-й грани. Тогда $\sum A_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}$.*

Это утверждение вытекает из следующих физических соображений. Наполним многогранник газом. Сила давления газа на i-ю грань пропорциональна $A_i \overrightarrow{n_i}$, а сумма всех сил давления на грани равна нулю (иначе можно было бы сконструировать вечный двигатель).

Приведем, однако, математическое доказательство. Пусть $\sum A_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{x}$. Достаточно доказать, что проекция вектора $\overrightarrow{x}$ на любую прямую l в пространстве равна нулю. Наряду с проекцией вектора $\overrightarrow{x}$ на прямую l рассмотрим проекцию многогранника на плоскость Π, перпендикулярную прямой l. Легко проверить, что длина проекции вектора $A_i\overrightarrow{n_i}$ на прямую l равна площади проекции i-й грани на плоскость Π. В самом деле, если угол между вектором $\overrightarrow{n_i}$ и прямой l равен α, то угол между i-й гранью и плоскостью Π тоже равен α, поэтому как длина проекции вектора, так и площадь проекции грани равна $A_i \cos\alpha$. Остается заметить, что проекция многогранника на плоскость Π дважды покрыта проекциями граней — «верхними»и «нижними»гранями. При этом «верхним»и «нижним»граням соответствуют разные знаки проекций векторов.

2. Метод усреднения и геометрические неравенства

При доказательстве многих геометрических неравенств бывает полезен следующий факт:

«Пусть на плоскости даны две системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ и $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$, причем для любой прямой сумма длин проекций на нее векторов первой системы больше суммы длин проекций векторов второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы больше суммы длин векторов второй системы.»

Чтобы доказать это утверждение, фиксируем на плоскости систему координат и рассмотрим прямую l, образующую угол φ с осью Ox. Если вектор $\vec{a}$ образует с осью Ox угол α, то длина его проекции на прямую l равна $a|\cos(\varphi-\alpha)|$, где a — длина вектора $\vec{a}$. Таким образом, среднее значение длины вектора $\vec{a}$ равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi = \frac{2a}{\pi}.$$

В частности, среднее значение длины проекции не зависит от угла α, т.е. не зависит от положения вектора $\vec{a}$. Если сумма длин проекций векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ на любую прямую больше суммы длин проекций векторов $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$, то соответствующее неравенство выполняется и для средних значений сумм длин проекций, а значит,

$$a_1 + \ldots + a_n > b_1 + \ldots + b_m.$$

Приведем некоторые примеры использования доказанного выше геометрического факта. Начнем с достаточно простой теоремы, которую легко доказать и другими способами.

1. Если один выпуклый многоугольник расположен внутри другого выпуклого многоугольника, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего.

В самом деле, пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — векторы сторон внешнего многоугольника, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ — векторы сторон внутреннего многоугольника. Для выпуклого многоугольника сумма длин проекций его сторон ровно в два раза больше длины проекции самого многоугольника. Ясно также, что проекция внутреннего многоугольника расположена внутри внешнего многоугольника, поэтому ее длина меньше.

Разберем теперь более сложный пример, для которого трудно получить доказательство другими способами.

2. Выпуклые многоугольники с периметрами $P_1, \ldots, P_n$ расположены так, что не существует прямой, разделяющей данные многоугольники (т.е. не существует прямой, которая не пересекает данных многоугольников, но по обе стороны от нее лежит хотя бы один данный многоугольник). Тогда данные многоугольники можно заключить в выпуклый многоугольник периметра не более $P_1 + \ldots + P_n$.

Если прямая l не разделяет данные многоугольники, то их проекция на прямую, перпендикулярную прямой l, представляет собой один отрезок, а не несколько отрезков. Это означает, что сумма длин проекций векторов сторон данных многоугольников на любую прямую не меньше суммы длин проекций векторов сторон их выпуклой оболочки.[1] Следовательно, периметр выпуклой оболочки данных многоугольников не превосходит $P_1 + \ldots + P_n$.

В некоторых случаях бывает полезен и тот факт, что *среднее значение длины проекции вектора длиной a равно $2a/\pi$.*

3. Если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше 1, то его периметр меньше π.

Пусть периметр рассматриваемого многоугольника равен P. Тогда среднее значение суммы длин проекций его сторон равно $2P/\pi$. Из условия следует, что длина проекции многоугольника на любую прямую меньше 1, т.е. сумма длин проекций сторон меньше 2. Поэтому $2P/\pi < 2$, а значит, $P < \pi$.

Следующий пример связан с выпуклыми *фигурами постоянной ширины.* Так называют выпуклые фигуры, для которых длина проекции на все прямые одна и та же. Эту длину проекции называют в таком случае *шириной* фигуры постоянной ширины.

Очевидным примером выпуклой фигуры постоянной ширины является круг. Но

[1]Выпуклой оболочкой нескольких многоугольников называют наименьший выпуклый многоугольник, их содержащий.

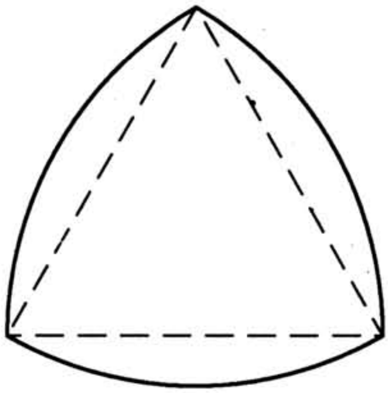


Рис. 1

есть и другие фигуры постоянной ширины. Простейший пример дает фигура, ограниченная дугами трех окружностей радиуса R с центрами в вершинах правильного треугольника со стороной R (рис. 1). Легко проверить, что длина проекции этой фигуры на любую прямую равна R.

4. Периметр любой выпуклой фигуры постоянной ширины d равен πd.

Границу данной выпуклой фигуры можно с любой точностью приблизить выпуклым многоугольником. При этом длина проекции многоугольника на любую прямую будет заключена между $\pi(d-\varepsilon)$ и $\pi(d+\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Следовательно, периметр такого выпуклого многоугольника заключен между $\pi(d-\varepsilon)$ и $\pi(d+\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ получаем, что периметр данной выпуклой фигуры равен πd.

5. Пусть на плоскости даны векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна L. Тогда из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше L/π.

Среднее значение суммы длин проекций данных векторов равно $2L/\pi$, поэтому существует прямая, для которой сумма длин проекций данных векторов не меньше $2L/\pi$. Введем на этой прямой направление. Тогда можно будет рассматривать проекции векторов со знаком, и сумма длин проекций будет равна $p-n$, где p — сумма положительных проекций, n — сумма отрицательных проекций. Так как $p-n \geq 2L/\pi$ и $p \geq 0$, $-n \geq 0$, то одно из чисел p или $-n$ не меньше L/π. Пусть для определенности $p \geq L/\pi$. Тогда длина суммы векторов, проекции которых на выбранную прямую положительны, не меньше L/π. В самом деле, сумму этих векторов можно представить в виде суммы двух ортогональных векторов, длина одного из которых равна $p \geq L/\pi$.

К вычислению среднего значения длины проекции вектора можно подойти и по-другому. Этот новый подход интересен для нас тем, что таким же способом можно будет вычислить и среднее значение длины вектора в пространстве. Пусть на плоскости каждому углу φ сопоставлено число $f(\varphi)$. Тогда среднее значение функции f равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Геометрический смысл этого интеграла следующий. Фиксируем на плоскости точку O и сопоставим каждому углу φ конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, направление которого соответствует углу φ. В результате каждому углу φ будет соответствовать точка окружности с центром O, причем разность двух углов будет равна длине соответствующей дуги. Разобьем окружность на мелкие дуги и рассмотрим сумму $\sum_k f(\varphi_k)\Delta l_k$, где φ_k — некоторая точка k-й дуги, Δl_k — длина этой дуги. При измельчении разбиения эта сумма стремится к $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Чтобы получить среднее значение функции f, этот интеграл нужно разделить на длину окружности, т.е. на 2π.

Теперь можно аналогичным образом определить среднее значение длины проекции вектора в пространстве. Фиксируем в пространстве точку O и сопоставим каждому направлению в пространстве конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, соответствующего этому направлению. В результате получим сферу радиуса 1 с центром O. Интересующая нас функция f равна длине проекции вектора $\vec{a}$ на луч OX. Чтобы определить ее среднее значение, нужно разбить сферу на достаточно мелкие области и рассмотреть сумму $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$, где X_k — точка k-й области, ΔS_k — площадь этой области. Затем нужно вычислить предел таких сумм при измельчении разбиения и поделить этот предел на площадь поверхности сферы, т.е. на 4π. Вместо разбиения сферы на мелкие области можно также рассматривать выпуклые многогранники, достаточно хорошо приближающие данную сферу. При этом можно считать, что для грани M_k точка X_k определяется как конец вектора $\overrightarrow{OX}_k$, перпендикулярного M_k. В таком случае $f(X_k) = a\Delta S_k|\cos\varphi_k|$, где ΔS_k — площадь грани M_k, φ_k — угол между векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OX}_k$. Легко проверить, что $\Delta S_k|\cos\varphi_k| = \Delta S'_k$, где $\Delta S'_k$ — площадь проекции грани M_k на плоскость, ортогональную вектору $\vec{a}$. Таким образом, рассматриваемая сумма $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$ равна сумме площадей проекций граней многогранника на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$. В пределе эта сумма равна удвоенной площади сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, среднее значение длины проекции вектора $\vec{a}$ на прямые в пространстве равно $2aS_1/S_2$, где S_1 — площадь экваториального сечения сферы, S_2 — площадь поверхности сферы. Для сферы единичного радиуса $S_1 = \pi$ и $S_2 = 4\pi$, поэтому среднее значение равно $a/2$.

С помощью среднего значения длины вектора в пространстве теми же способами, которыми мы пользовались в случае плоскости, можно доказать следующие утверждения.

6. Если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.

В данном случае мы каждой грани сопоставляем перпендикулярный ей вектор, длина которого равна площади грани.

7. Если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, *то площадь его поверхности не превосходит* 4.

8. Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна L. Тогда среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не *превосходит* $L/4$.

В заключение обсудим одно утверждение, которое можно было бы сформулировать и в случае плоскости, но оно более интересно в пространстве.

9. Пусть один тетраэдр расположен внутри другого тетраэдра. Тогда отношение суммы длин ребер внутреннего тетраэдра к сумме длин ребер внешнего тетраэдра не превосходит $4/3$, *причем это отношение может быть сколь угодно близко к* $4/3$. *(В частности, сумма длин ребер внутреннего тетраэдра может быть больше суммы длин ребер внешнего тетраэдра.)*

Мы докажем сразу более общее утверждение.

10. Пусть многогранник с m *вершинами расположен внутри многогранника с* n *вершинами. Тогда отношение суммы попарных расстояний между вершинами внутреннего многогранника к сумме попарных расстояний между вершинами внешнего многогранника не превосходит* $\frac{m^2}{4(n-1)}$ *при четном* m *и* $\frac{m^2-1}{4(n-1)}$ *при нечетном* m.

Это утверждение достаточно доказать для проекций многогранников на прямую. В случае прямой требуемое утверждение очевидным образом получается из следующей леммы.

Лемма. *Пусть на отрезке длиной* d *расположено* k *точек, причем концы отрезка входят в эту систему* k *точек. Тогда минимальная сумма попарных расстояний между данными точками равна* $(k-1)d$, *а максимальная сумма расстояний между точками равна* $k^2d/4$ *при четном* k *и* $(k^2-1)d/4$ *при нечетном* k.

Доказательство. Пусть A и B — концы рассматриваемого отрезка. Для любой точки X этого отрезка выполняется равенство $AX + BX = d$, поэтому сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d + \Sigma$, где Σ — сумма попарных расстояний для системы из $k-2$ точек, которая получается из данной системы точек после выбрасывания точек A и B. Минимальное значение Σ равно 0; оно достигается в том случае, когда все $k-2$ точки сосредоточены в одном из концов отрезка AB. Максимальное значение Σ может получиться лишь в том случае, когда в новую систему из $k-2$ точек входят обе точки A и B (мы предполагаем, что $k-2 \geq 2$). Снова выбросим точки A и B и рассмотрим систему из $k-4$ точек и т.д. В итоге получаем, что если $k = 2s$, то сумма попарных расстояний максимальна в том случае, когда s точек расположены в одном конце отрезка и s точек расположены в другом конце отрезка; эта сумма равна $s^2d = k^2d/4$. Если же $k = 2s+1$, то в одном конце отрезка должно быть расположено s точек, а в другом $s+1$ точка; в этом случае сумма равна $s(s+1)d = (k^2-1)d/4$.

3. Изогонально сопряженные точки

С каждым треугольником ABC связано весьма интересное преобразование плоскости. Это преобразование устроено следующим образом. Пусть P — некоторая точка. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C

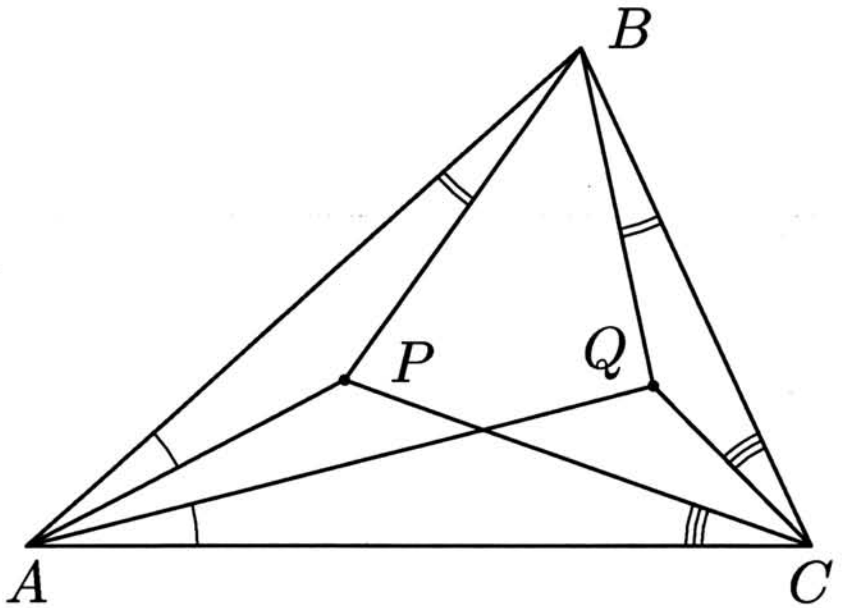


Рис. 2

соответственно. Полученные прямые пересекаются в одной точке Q (рис. 2). Для доказательства этого утверждения и для изучения свойств преобразования $P \mapsto Q$ удобно воспользоваться так называемыми трилинейными координатами, которые мы сейчас введем.

Пусть a, b, c — расстояния от точки X, лежащей внутри треугольника ABC, до сторон BC, CA, AB. Тогда набор чисел (a, b, c) называют *трилинейными координатами* точки X. При этом набор (a, b, c) рассматривается с точностью до пропорциональности, т.е. набор $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, где $\lambda > 0$, соответствует той же самой точке, что и набор (a, b, c). В таком случае любой набор (a, b, c), где $a, b, c > 0$, однозначно задает внутреннюю точку треугольника ABC. В самом деле, множество точек с трилинейными координатами вида (a, b, x), где a и b — фиксированные числа, представляет собой отрезок CK, где K — некоторая точка стороны AB. При движении по этому отрезку величина a/x монотонно изменяется от 0 до ∞.

Трилинейные координаты можно определить не только для внутренних точек треугольника, но и для всех точек плоскости. Будем считать, что a, b, c — расстояния от точки X до прямых BC, CA, AB с учетом знака, т.е. $a > 0$, если точки X и A лежат по одну сторону от прямой BC, и $a < 0$, если точки X и A лежат по разные стороны от прямой BC; знаки чисел b и c определяются аналогично.

Множество точек с трилинейными координатами вида (a, b, x), где a и b — фиксированные числа, представляет собой прямую, проходящую через вершину C. При симметрии относительно биссектрисы угла C эта прямая переходит в прямую, состоящую из точек с трилинейными координатами вида (b, a, x) или, что то же самое, (a^{-1}, b^{-1}, y). Таким образом, если точка P имеет трилинейные координаты (a, b, c), то искомая точка Q однозначно определяется как точка с трилинейными координатами (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}). В таком случае точки P и Q называют *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC.

Изогональное сопряжение имеет ровно четыре неподвижные точки (т.е. четыре точки, которые изогонально сопряжены сами с собой). Эти точки имеют трилинейные координаты $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ и $(1,1,-1)$. Ясно, что первая из этих точек — центр вписанной окружности, а три другие точки — центры вневписанных окружностей.

Докажем теперь некоторые менее очевидные, но более интересные свойства изогонального сопряжения.

Теорема 1. *Центр описанной окружности и точка пересечения высот изогонально сопряжены.*

Доказательство. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Тогда его центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Вычислим теперь трилинейные координаты точки пересечения высот H. Вычислим, например, длину отрезка HA_1, где A_1 — основание высоты, опущенной из вершины A. Ясно, что $HA_1 = BH\cos\gamma$ и $BH\sin\alpha = BC\cos\beta = 2R\sin\alpha\cos\beta$, где R — радиус описанной окружности. Поэтому $HA_1 = 2R\cos\beta\cos\gamma$. Это означает, что точка пересечения высот имеет трилинейные координаты $(1/\cos\alpha, 1/\cos\beta, 1/\cos\gamma)$.

Теорема 2. *Точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин, изогонально сопряжена с точкой, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что точка, для которой минимальна сумма квадратов до вершин, — это точка пересечения медиан M. Доказательство этого утверждение основано на том, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. В самом деле, из этого равенства следует, что если X — произвольная точка, то

$$\begin{gathered} XA^2 + XB^2 + XC^2 = \\ |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}|^2 = \\ 3XM^2 + 2(\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \\ 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA^2 + MB^2 + MC^2. \end{gathered}$$

Легко проверить, что точка пересечения медиан имеет трилинейные координаты (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}), где a, b, c — длины сторон треугольника. Это утверждение непосредственно следует из того, что площади треугольников AMB, BMC и CMA равны. Поэтому точка, изогонально сопряженная с точкой пересечения медиан, имеет трилинейные координаты (a, b, c).

Рассмотрим произвольную точку с трилинейными координатами (x, y, z). Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны kx, ky, kz, где число k определяется соотношением $k(ax + by + cz) = 2S$ (S — площадь треугольника ABC). Таким образом, сумма квадратов расстояний от рассматриваемой точки до сторон равна $4S^2 \frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}$. Требуется доказать, что эта сумма минимальна в том случае, когда $(x, y, z) = (a, b, c)$, т.е.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Доказательство последнего неравенства совсем несложно.

Теорема 3. *Описанная окружность треугольника изогонально сопряжена бесконечно удаленной прямой. Иными словами, если X — точка описанной окружности, а прямые a, b, c симметричны прямым AX, BX, CX относительно биссектрис углов A, B, C, то прямые a, b, c параллельны (рис. 3).*

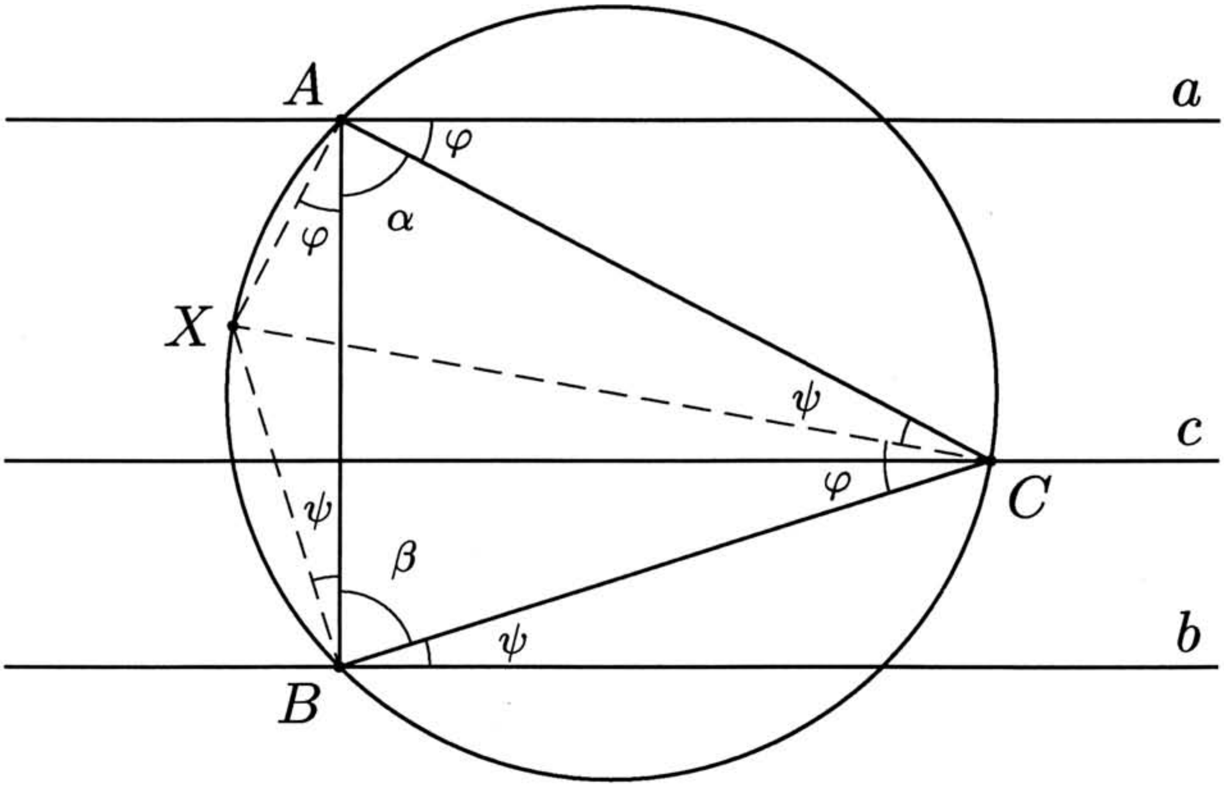


Рис. 3

Доказательство. Покажем, например, что сумма углов $\alpha + \varphi$ и $\beta + \psi$, которые отрезок AB образует с прямыми a и b, равна π. В самом деле, $\varphi + \psi = \gamma$, а $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Замечание. Несложно доказать, что в трилинейных координатах бесконечно удаленная прямая и описанная окружность задаются соответственно уравнениями $ax + by + cz = 0$ и $ayz + bzx + cxy = 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Теорема 4. *Пусть все углы треугольника ABC меньше 120°. Тогда точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом 120° (точка Торричелли), изогонально сопряжена с точкой, проекции которой на стороны треугольника ABC образуют равносторонний треугольник.*

Доказательство. Точку Торричелли T можно построить следующим образом. Построим на сторонах треугольника ABC внешним образом правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Тогда описанные окружности этих треугольников пересекаются в точке T. Из этого построения следует, что отрезки AC_1, C_1B, BA_1, A_1C, CB_1, B_1A видны из точки T под углом $60°$, поэтому T — точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Теперь уже легко показать, что точка T имеет трилинейные координаты

$$\left(\frac{1}{\sin(60°+\alpha)}, \frac{1}{\sin(60°+\beta)}, \frac{1}{\sin(60°+\gamma)}\right).$$

В самом деле, расстояния от точки C_1 до прямых BC и CA равны $c\sin(60°+\beta)$ и $c\sin(60°+\alpha)$. Поэтому отношение расстояний от точки T до сторон BC и CA равно

$$\sin(60°+\beta) : \sin(60°+\alpha).$$

Итак, нужно доказать, что проекции на стороны треугольников ABC точки с трилинейными координатами

$$(\sin(60°+\alpha), \sin(60°+\beta), \sin(60°+\gamma))$$

образуют правильный треугольник. Для этого мы поступим следующим образом. Рассмотрим точку P, из которой стороны треугольника видны под углами $60°+\alpha$, $60°+\beta$, $60°+\gamma$, и покажем, что:

1) проекции A_1B_1, C_1 точки P на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник;

2) точка P имеет трилинейные координаты

$$(\sin(60°+\alpha), \sin(60°+\beta), \sin(60°+\gamma)).$$

Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CP. Поэтому

$$\angle PA_1B_1 = \angle PCB_1 = \angle PCA.$$

Аналогично $\angle PA_1C_1 = \angle PBA$. Поэтому

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle PCA + \angle PBA = (\gamma - \angle PCB) + (\beta - \angle PBC) =$$

$$= \beta + \gamma + \angle BPC - 180° = 60°.$$

Аналогично доказывается, что и остальные углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $60°$.

Чтобы вычислить трилинейные координаты точки P, заметим сначала, что

$$AP : BP : CP = \frac{1}{\sin(60°+\alpha)} : \frac{1}{\sin(60°+\beta)} : \frac{1}{\sin(60°+\gamma)}.$$

Дело в том, что по теореме синусов

$$B_1C_1 = AP\sin A_1PB_1 = AP\sin\alpha.$$

Кроме того, как мы уже убедились, $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$. Ясно также, что $PA_1 \cdot BC = BP \cdot CP \sin(60^\circ + \alpha)$. Поэтому

$$PA_1 : PB_1 : PC_1 = \sin(60^\circ + \alpha) : \sin(60^\circ + \beta) : \sin(60^\circ + \gamma),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. [Морли]*Пусть вершины треугольника ABC расположены в комплексной плоскости на единичной окружности $|z| = 1$; пусть, далее, a, b, c — комплексные координаты этих вершин. Тогда точки p и q, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, связаны соотношением*

$$p + q + abc\bar{p}\bar{q} = a + b + c.$$

Доказательство. На комплексной плоскости биссектрисы внешнего и внутреннего углов между векторами z и w совпадают с биссектрисами внешнего и внутреннего углов между векторами z' и w' тогда и только тогда, когда

$$\frac{zw}{\bar{z}\bar{w}} = \frac{z'w'}{\bar{z}'\bar{w}'}.$$

Поэтому если лучи AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла A, то

$$\frac{(p-a)(q-a)}{(\bar{p}-\bar{a})(\bar{q}-\bar{a})} = \frac{(b-a)(c-a)}{(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})}.$$

Выражение в правой части равенства равно a^2bc, так как $ab(\bar{b} - \bar{a}) = a - b$ и $ac(\bar{c} - \bar{a}) = a - c$. Следовательно,

$$pq - a(p+q) + a^2 = a^2bc\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p} + \bar{q}) + bc.$$

Аналогично получаем

$$pq - b(p+q) + b^2 = b^2ac\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p} + \bar{q}) + ac.$$

Рассмотрим разность этих двух равенств и сократим обе части на $a - b$. В результате получим требуемое равенство.

Теорема 6. *Пусть точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены. Опустим из точки P_i перпендикуляры P_iA_i, P_iB_i, P_iC_i на стороны BC, CA, AB соответственно. Тогда описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают.*

Доказательство. Докажем, что точки B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. В самом деле, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2C_2B_2$, а так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$, то $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$. Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2, а оба эти перпендикуляра проходят через середину O отрезка P_1P_2, т.е. O — центр этой окружности. В частности, точки B_1 и C_1 равноудалены от точки O. Аналогично точки A_1 и B_1 равноудалены от точки O, т.е. O — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, $OB_1 = OB_2$.

В том случае, когда P_1 — точка пересечения высот, а P_2 — центр описанной окружности, совпадение двух описанных окружностей означает, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*).

Более интересное утверждение получается в том случае, когда точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника. В этом случае точка P_2 будет бесконечно удаленной. Это означает, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из произвольной точки описанной окружности, лежат на окружности бесконечного радиуса, т.е. они лежат на одной прямой (эту прямую часто называют *прямой Симсона*, но более правильное название — *прямая Уоллеса*). Прямая Уоллеса для точки P_1 перпендикулярна направлению бесконечно удаленной точки P_2, т.е. она перпендикулярна тем прямым, которые получаются из прямых AP_1, BP_1, CP_1 при симметрии относительно биссектрис углов A, B, C. (Это утверждение эквивалентно тому, что окружность в каждой точке перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку; правда, в данном случае мы имеем дело с окружностью бесконечного радиуса.)

Приведем в заключение без доказательства еще одно свойство геометрических фигур, связанное с изогонально сопряженными точками.

Теорема 7. *Фокусы любого эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.*

4. Кубические кривые, связанные с треугольником

Каждому треугольнику можно многими разными способами сопоставить кубическую кривую, т.е. кривую, заданную уравнением вида

$$\sum_{i+j\leq 3} a_{ij}x^i y^j = 0.$$

Некоторые из таких кубических кривых обладают интересными геометрическими свойствами. Эти кубические кривые, или *кубики*, обычно называют по именам геометров, впервые их исследовавших: кубика Дарбу, кубика Томсона, кубика Нейберга, кубика Мак-Кэя.

Наиболее интересные свойства кубик, связанных с треугольником, так или иначе используют изогональное сопряжение относительно этого треугольника. Поэтому наше изложение будет опираться на свойства изогонального сопряжения, о которых шла речь в предыдущем рассказе. Мы будем также пользоваться введенными там трилинейными координатами. Несложно понять, что в трилинейных координатах (x, y, z) кубическая кривая задается уравнением вида

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}x^i y^j z^k = 0.$$

Первоначально кубики, связанные с треугольником, определялись посредством разнообразных геометрических конструкций. Но наиболее известные из этих кубик можно получить единой конструкцией.[2] Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Теорема. *Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряженных точек P и Q, для которых прямая PQ проходит через точку F. Тогда точки P и Q заметают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трех вневписанных окружностей, а также через саму точку F.*

Доказательство. Пусть точка F имеет трилинейные координаты (f_1, f_2, f_3). Если точка P имеет трилинейные координаты (x, y, z), то точка Q, изогонально сопряженная с ней, имеет трилинейные координаты (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}), т.е. (yz, zx, xy). Поэтому условие, что точки P, Q, F лежат на одной прямой, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$f_1x(y^2 - z^2) + f_2y(z^2 - x^2) + f_3z(x^2 - y^2) = 0. \tag{1}$$

Легко проверить, что точка $F = (f_1, f_2, f_3)$, точки $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ и точки $I = (1,1,1)$, $I_a = (-1,1,1)$, $I_b = (1,-1,1)$, $I_c = (1,1,-1)$ лежат на кривой, заданной уравнением (1), т.е. координаты указанных точек удовлетворяют этому уравнению.

Непосредственно из геометрического определения кривой (1) видно, что она переходит сама в себя при изогональном сопряжении. В самом деле, если точка P лежит на кривой (1), то изогонально сопряженная с ней точка Q тоже лежит на кривой (1).

Точку F, с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть *центром вращения* для этой кривой.

Кубика Дарбу

Центром вращения для этой кривой служит точка $\tilde{H}$, симметричная точке пересечения высот H относительно центра описанной окружности O. Легко проверить, что точка $\tilde{H}$ имеет трилинейные координаты

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma, \cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha, \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta),$$

где α, β, γ — углы треугольника.

В трилинейных координатах кубика Дарбу задается уравнением

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

[2]H. M. Cundy, C. F. Parry. Some cubic curves associated with a triangle, **Journal of Geometry.** — 1995 — V. 53 — P. 41–66.

(Мы написали только коэффициент при $x(y^2 - z^2)$; коэффициенты при $y(z^2 - x^2)$ и при $z(x^2 - y^2)$ записываются очевидным образом.)

Кубика Дарбу проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

Теорема 1. *Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки D на прямые BC, CA, AB. Точка D лежит на кубике Дарбу тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Согласно теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

где AC_1 и т.д. — ориентированные длины отрезков (т.е. числа AC_1 и C_1B имеют один и тот же знак, если точка C_1 лежит на отрезке AB, а если точка C_1 лежит вне отрезка AB, то эти числа имеют противоположные знаки).

Пусть (x, y, z) — нормированные трилинейные координаты точки D, т.е. x, y, z — расстояния от точки D до прямых BC, CA, AB с учетом знака. Легко проверить, что $AC_1 = \frac{z\cos\alpha + y}{\sin\alpha}$ и т.д. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(z\cos\alpha + y)(y\cos\gamma + x)(x\cos\beta + z) =$$

$$= (z\cos\beta + x)(x\cos\gamma + y)(y\cos\alpha + z).$$

Полученное уравнение легко преобразуется в уравнение кубики Дарбу.

Замечание 1. Если равенство

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

выполняется для некоторой точки D, то такое же равенство выполняется и для точки D', симметричной точке D относительно центра описанной окружности. Поэтому кубика Дарбу симметрична относительно центра описанной окружности.

Замечание 2. Несложно доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках A_1, B_1, C_1.

Кубика Томсона

Центром вращения для этой кривой служит центр масс M. Напомним, что центр масс треугольника имеет трилинейные координаты (bc, ca, ab).

В трилинейных координатах кубика Томсона задается уравнением

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

По-другому это уравнение можно записать в виде

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Томсона проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

Из замечания 2 к теореме 1 видно, что кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, касающиеся сторон данного треугольника или их продолжений. Выделим среди них те кривые второго порядка, для которых перпендикуляры к сторонам треугольника в точках касания пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения этих перпендикуляров заметают кубику Дарбу. Можно доказать, что центры выделенных таким образом кривых второго порядка заметают кубику Томсона.

Кубика Мак-Кэя

Центром вращения для этой кривой служит центр описанной окружности O. Напомним, что центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

В трилинейных координатах кубика Мак-Кэя задается уравнением

$$\cos\alpha x(y^2 - z^2) + \cos\beta y(z^2 - x^2) + \cos\gamma z(x^2 - y^2) = 0.$$

Кубика Мак-Кэя проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Теорема 2. *Пусть вершины треугольника расположены в точках a, b, c единичной окружности на комплексной плоскости. Точка, соответствующая комплексному числу z, лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(z - a)(z - b)(z - c) = abc(a\bar{z} - 1)(b\bar{z} - 1)(c\bar{z} - 1).$$

Доказательство. Пусть точки z и w изогонально сопряжены относительно данного треугольника. Тогда согласно теореме Морли (теорема 5 из предыдущего рассказа) точки z и w связаны соотношением

$$z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\bar{z} + \bar{w} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}zw = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \tag{3}$$

Умножим обе части соотношения (3) на $abc\bar{z}$ и вычтем из полученного выражение соотношение (2). В результате получим

$$w = \frac{a + b + c - z - (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})abc\bar{z}}{1 - |abcz|^2}. \tag{4}$$

По определению кубики Мак-Кэя прямая zw проходит через центр описанной окружности, т.е. через начало координат. Это означает, что $w/\bar{w} = z/\bar{z}$. Выразив $w/\bar{w}$ с помощью соотношения (4), после несложных преобразований получим требуемое уравнение.

Следствие. *Кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника.* (Мы учитываем только точки пересечения, отличные от вершин исходного треугольника.)

Доказательство. Будем считать, что вершины треугольника расположены в точках единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда для точки z, лежащей на описанной окружности треугольника, выполняется равенство $\bar{z} = z^{-1}$. Поэтому точки пересечения кубики Мак-Кэя с описанной окружностью удовлетворяют уравнению

$$(z-a)(z-b)(z-c) = -z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c).$$

Если исключить вершины треугольника, то останутся точки, удовлетворяющие соотношению $z^3 = -abc$. Эти точки образуют правильный треугольник.

Будем считать, что $\angle PQR$ — величина угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\overrightarrow{QP}$ так, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\overrightarrow{QR}$.

Теорема 4. *Точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда*

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Доказательство. Снова будем считать, что вершины треугольника расположены на единичной окружности на комплексной плоскости. Положим $\alpha = \angle MAB$, $\beta = \angle MBC$, $\gamma = \angle MCA$. Пусть z — комплексное число, соответствующее точке M. Тогда

$$\frac{b-a}{z-a}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = e^{2i\alpha}, \quad \text{т.е.} \quad e^{2i\alpha} = -b\frac{a\bar{z}-1}{z-a}.$$

Поэтому

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -abc\frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Таким образом, точка z лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Легко проверить, что

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA + \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA =$$

$$= (2n+1)\pi.$$

Поэтому точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA + 2l\pi.$$

Кубика Нейберга

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удаленная точка прямой OH. Иными словами, кубика Нейберга состоит из таких пар изогонально сопряженных точек P и Q, что прямая PQ параллельна прямой OH.

В трилинейных координатах кубика Нейберга задается уравнением

$$(\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Нейберга является бесспорным лидером по количеству замечательных точек треугольника, через которые она проходит. Действительно, эта кривая проходит через следующие точки: центр описанной окружности; ортоцентр; вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (как внешним, так и внутренним образом); точки, симметричные вершинам треугольника ABC относительно его сторон; две точки, из которых стороны треугольника ABC видны под углом 60° или 120° (изогональные центры треугольника); две точки, для которых выполняется соотношение $AX \cdot BC = BX \cdot CA = CX \cdot AB$ (изодинамические центры треугольника).

Издательство “Фазис” активно выпускает математическую литературу для школьников, учителей, студентов и преподавателей ВУЗов. Адрес для корреспонденции: 123557 Москва, Пресненский вал, 42-44.

E-mail: phasis@aha.ru

Образовательные инициативы

В журнале предполагается регулярно рассказывать о различных интересных начинаниях в области математического и, более широко, естественнонаучного образования. В предыдущих выпусках к материалам этого рода можно отнести: Турнир Ломоносова 96 года — в номере 1, рассказ о летних Конференциях Турнира Городов — в номере 2 и рассказ о самом Турнире — в номере 3. Все эти инициативы имеют московское происхождение (более того, все они связаны с именем выдающегося организатора математического образования — Н. Н. Константинова). Но мы будем уделять особое внимание местным начинаниям. В настоящем выпуске приводится рассказ о летнем учебно-оздоровительном лагере Волгоградской области "Интеграл", включающий программы занятий по отдельным предметам и учебные материалы.

Волгоградский областной лагерь "Интеграл"

В Волгоградской области на протяжении последних 26 лет в течение одного летнего месяца проходит смена Областного учебно-оздоровительного лагеря для одарённых старшеклассников "Интеграл". Отчёт о его проведении, подготовленный сотрудниками лагеря Караваевым А.П. и к.м.н. Новочадовым В.В. по материалам смены 1997 года, мы предлагаем Вашему вниманию.

Эмблема лагеря "Интеграл"

Около 30 лет назад по всей территории нашей страны была создана сеть профильных научных лагерей для учащихся последних классов общеобразовательных школ. Волгоградский лагерь "Интеграл", созданный и непрерывно работающий с

1972 года, является одним из них. Ежегодно его подготовкой и проведением занимаются Комитет по образованию и Комитет по делам молодёжи администрации Волгоградской области. Значительную помощь в проведении оказывают Областной Совет Профсоюзов, МГУ (Московский Государственный Университет) и ВолГУ (Волгоградский Государственный Университет). Основная цель деятельности лагеря — воспитание и обучение талантливой молодёжи для сохранения и увеличения научного потенциала области.

Проводится лагерь в виде интенсивной профильной смены в течение 21-25 летних дней для специально отобранных детей — победителей и призёров областных предметных олимпиад, представителей спецклассов и специализированных гимназий города и области, активистов прошлых смен — на базе одного из благоустроенных детских оздоровительных центров Волгоградской области. Ежегодно в работе лагеря "Интеграл" принимают участие около 150 школьников, в основном перешедших в 10 и 11 классы.

С утра в лагере проходят учебные занятия, проводимые опытными преподавателями МГУ, МФТИ и ведущих ВУЗов Волгограда по специальностям: физика, математика, информатика, химия, биология. Объем занятий — 4 часа в день при шестидневной учебной неделе. Учебные группы формируются по предметам (10 и 11 классы отдельно) исходя из желания участников. Наполняемость одной группы составляет 10-15 человек.

Для каждой из учебных групп читается несколько курсов с дифференцированным зачётом в конце каждого курса. Кроме выбранной дисциплины ребятам в небольшом объеме читаются курсы по смежным предметам (математикам и физикам – информатика, математикам – физика, физикам – математика и т.п.). Дополнительно во внеучебное время преподавателями организуются факультативы.

В последний день смены проходят заключительные олимпиады по изучавшимся дисциплинам. Предлагаемые для решения задачи являются частично авторскими, а частично берутся из соответствующих сборников. По итогам учёбы и заключительной олимпиады участникам выдаются зачётные книжки (в которых так же отражены результаты участия в олимпиаде), а наиболее отличившимся ученикам — приглашения на следующий год и удостоверения о прохождении лагеря–школы “Интеграл”.

Но, естественно, лето — это каникулы, и каждый день во второй половине дня силами воспитателей (как правило, бывших выпускников лагеря, прошедших специальную подготовку) осуществляется интенсивная культурная программа. Благодаря долгой истории в лагере были созданы и закрепились самобытные традиции, переходящие из смены в смену. И сейчас трудно представить “Интеграл” без ставших уже привычными свечек, вечерних костров, песен, посвящения, тематических дней “Казино”, “Ретро”, “Театр”, "Именинник" и других. Недавно появившаяся традиция проведения внеучебных факультативов позволяет заняться интересными делами: танцами, изучением психологии, конструированием, спортивными играми, изучением основ массажа. Расположение в зелёной зоне, хорошее 4-х разовое питание, молодёжный коллектив воспитателей, интенсивная культурная программа и возможность творческого проявления способствуют здоровому и полноценному отдыху детей перед началом нового учебного года.

С окончанием смены лагерь не заканчивается. Остаётся дружба, дружба с ребятами из учебной группы, из своего и соседнего отрядов, с преподавателями и воспитателями. В ноябре и мае проводятся традиционные встречи участников лагеря. Многие ребята по поступлении в институт становятся воспитателями, а после окончания — преподавателями лагеря.

Благодаря работе лагеря "Интеграл" в Волгоградской области создана и существует система летнего отдыха и обучения одарённых детей в среде их сверстников и старших единомышленников. Наглядность роста (школьник – студент – аспирант – учёный-преподаватель) создает устойчивую мотивацию для достижения путем образования и самообразования высшего профессионального мастерства. Ежегодно не менее 90% выпускников лагеря поступают на самые престижные специальности ведущих ВУЗов Москвы и Волгограда. Лагерь, преодолев 25-летний рубеж своего существования, показал себя перспективным сложившимся коллективом, твёрдо заняв соответствующую нишу в системе внешкольного образования Волгоградской области.

Ниже приводятся обзоры предметов лагеря, подготовленные преподавателями, проводившими соответствующие занятия: математика – Родин В.И., физика – к.т.н. Новиков Д.А., химия – д.х.н. Недоспасов А.А. и к.х.н. Родина Е.В., биология – к.м.н. Новочадов В.В. и к.м.н. Фролов В.И., информатика – Караваев А.П. В них вы найдёте краткую информацию о программе предметов, содержание некоторых курсов и задачи, предлагавшиеся на заключительных олимпиадах.

Математика

Количество приглашенных в лагерь в 1997 году по итогам смены 1996 года позволило организовать две группы — уже прошедших обучение в прошлом году (наличие такой группы обеспечивает преемственность традиций школы и позволяет ввести двухгодичный цикл обучения в "Интеграле") и приехавших впервые (перешедших в 10 класс). Для потока "продолжающих" были проведены занятия по темам "Рациональные числа", "Действительные числа", "Комплексные числа", "Теория множеств", "Уравнения и неравенства", "Алгебра многочленов". Для потока "начинающих" были прочитаны лекции "Основные понятия математики", "Теория чисел", "Геометрические преобразования" и проведены семинары по темам "Метод математической индукции", "Задачи на делимость чисел", "Функции и графики" и "Решение задач по геометрии". Основной задачей занятий было дать ребятам достаточный импульс для последующего самостоятельного изучения предмета дома и убедить в необходимости и реальности поступления в лучшие ВУЗы страны.

Для потока "начинающих" на первых занятиях читается лекция "Основные понятия математики". Приведем ее оглавление с перечислением вводимых в каждом разделе понятий.

1) Структура математической теории. Аксиоматическое построение математики.

   а) Цепочка предложений
   Истинные и ложные высказывания, доказательства, теоремы, аксиомы, требования к набору аксиом, примеры.

   б) Цепочка понятий
   Понятия, определения, основные (первичные) понятия, примеры.

2) Множества и операции над ними

   Множество, элементы множества, универсальное множество, характеристическая функция множества, равенство множеств, подмножество, пересечение, объединение, разность множеств, дополнение, примеры.

Задачи олимпиады по математике

1) В лесу, имеющем площадь S, заблудился грибник. Доказать, что он может выйти из леса, пройдя расстояние не более $\sqrt{2\pi S}$, если лес имеет выпуклую форму.

2) В остроугольном треугольнике из разных вершин провели медиану, биссектрису и высоту. Могут ли точки их пересечения лежать в вершинах равностороннего треугольника?

3) Тетрадный листок в клетку (размер клеток 1×1) забрызган чернилами. Суммарная площадь чернильных пятен строго меньше 1. Можно ли заново разграфить листок аналогичной сеткой таким образом, чтобы ни один узел сетки не был запачкан чернилами? Если да, то как?

4) В треугольнике ABC отрезки AE, BH, CD - медианы, $A_1 \in AE$, $AA_1 = A_1E$, $B_1 \in BH$, $BB_1 = 2B_1H$, $C_1 \in CD$, $CC_1 = \frac{1}{2}C_1D$. Найти отношение площадей $S_{\triangle A_1B_1C_1}/S_{\triangle ABC}$.

5) На каждой из n карточек с обеих сторон написано по числу. Известно, что каждое число от 1 до n было написано ровно 2 раза. Докажите, что карточки можно положить таким образом, чтобы сверху оказались все числа от 1 до n.

6) Зная, что $1000009 = 972^2 + 235^2$, разложить 1000009 на множители.

Информатика

Информатика — самый молодой предмет в лагере, появившийся около десяти лет назад. Первоначально его целью было дать начальное представление о компьютере и о программировании ребятам, выбравшим в качестве специализации математику. В настоящее время, после появлении группы информатиков, программа предмета значительно расширилась и для проведения практических занятий на период смены в одном из Волгоградских ВУЗов арендуется компьютерный класс.

Стоит отметить сложность формирования учебных групп по информатике, связанную с тем, что уровень знаний учеников сильно различается как по знанию языка программирования, так и по умению написать программу (так как данный предмет изучается в школе лишь в старших классах и обеспечение школ компьютерами весьма неравномерно). Первая учебная неделя в группах информатиков была посвящена изучению языка программирования Паскаль (Turbo Pascal 6.0) как теоретически, так и на компьютерах. Предварительных знаний какого-либо языка программирования от учеников не требовалось, но предполагалось.

В оставшиеся две недели были прочитаны курсы по сложности алгоритмов (на примере алгоритмов сортировки) и структурам данных.

Для закрепления пройденного материала каждому ученику предлагалось запрограммировать одну-две задачи из следующего списка:

1) Написать программу, реализующую модель стека (очереди, дека).

2) Написать программу сортировки массива простейшим методом ("пузырьком", слиянием).

3) Найти все простые числа в диапазоне от 1 до 1000 и вывести их на экран в порядке возрастания.

4) Найти разложение числа на простые множители.

5) Используя лишь стандартные арифметические операции, возвести число в натуральную степень.

6) Найти наименьшее общее кратное двух чисел.

7) Найти значение многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ при заданном x.

Необходимо было (там, где возможно) оптимизировать программу по времени и по размеру используемой памяти. Каждый ученик за 10 учебных часов успешно справился с этим заданием.

В качестве примера приведем краткое изложение курса "Сложность алгоритмов".

Сложность алгоритмов

Одной из главнейших характеристик программы является время её работы. От чего оно зависит, и почему две программы, делающие одно и тоже, работают разное время? Разумеется, время работы зависит от типа используемого компьютера от качества программирования и от алгоритма. Можно найти зависимость от первых двух факторов. Но как оценить качество алгоритма? Для этого подсчитывают количество элементарных операций в реализации данного алгоритма. Ясно, что в зависимости от входных данных количество операций может меняться.

В качестве примера рассмотрим вычисление выражения $ac + bc + ad + bd$. Для его вычисления необходимо 7 операций — 4 умножения и 3 сложения. Если же вычислять это выражение с помощью формулы $(a + b) * (c + d)$, то необходимо 3 операции — 2 сложения и 1 умножения. В итоге при вычислении с помощью второй формулы необходимо почти в два раза меньше арифметических операций, чем с помощью первой.

Интуитивно понятно, что время выполнения программы, реализующей алгоритм, пропорционально количеству операций.

В действительности вместо количества операций для оценки качества алгоритма используется *сложность* алгоритма. Эти два понятия достаточно близки друг к другу, и отличаются тем, что сложность зависит лишь от алгоритма и подсчитывается как максимально возможное количество операций при возможных входных данных.

Зачастую бывает очень трудно (да и не нужно) с абсолютной точностью вычислять сложность алгоритма. На практике в рассмотрение берутся лишь те операции, на которые за время выполнения программы (реализующей наш алгоритм) тратится большая часть времени, или наиболее характерные операции. Для алгоритмов сортировки это операция сравнения, для сложных вычислительных алгоритмов — умножение и деление.

Рассмотрим примеры вычисления сложности алгоритма на примере алгоритмов сортировки массива данных.

Задача: Имеется некоторый массив действительных чисел. Необходимо его упорядочить, то есть таким образом переставить его элементы, чтобы они располагались в порядке возрастания.

Один из простейших алгоритмов сортировки действует так: среди элементов с номерами от 1 до N находится наименьший, и меняется местами с элементом номер 1 (таким образом на первом месте оказывается минимальный элемент), после этого среди элементов с номерами от 2 до N находится минимальный элемент, и меняется местами с элементом номер 2. После этого шага мы можем гарантировать, что на первых двух местах находятся два минимальных элемента массива, расположенные в порядке возрастания. На i-м шаге среди элементов с номерами от i до N находится минимальный элемент, и меняется местами с элементом номер i. Если перед этим шагом на $i-1$ первых местах упорядоченно располагались самые младшие элементы массива, то после этого шага уже на i первых местах будут располагаться i самых младших элемента в порядке возрастания. В итоге мы получим полностью отсортированный массив.

Поскольку в алгоритме используются только операции сравнения и перестановки двух элементов, то в получившемся массиве каждое из чисел будет встречаться столько же раз, сколько и в первоначальном.

Подсчитаем число операций. На первом шаге для нахождения минимального элемента во всем массиве мы выполним ровно $N-1$ сравнение и 3 присваивания для перестановки элементов. На втором шаге для нахождения минимального элемента среди элементов с номерами от 2 до N мы выполним $N-2$ сравнения и 3 операции присваивания, и т.д. Всего же при работе алгоритма выполнится $(N-1)+(N-2)+$

$(N-2)+\ldots+1=\frac{N^2}{2}-\frac{N}{2}$ операции сравнения и $3(N-1)$ операции присваивания.

При увеличении N значение выражений $\frac{N}{2}$ и $3(N-1)$ будут возрастать не столь быстро, как $\frac{1}{2}N^2$, и поэтому ими можно пренебречь. Кроме того, коэффициент $\frac{1}{2}$ тоже можно не учитывать (нас будет интересовать лишь характер поведения оцениваемой величины), и получаем оценку сложности — N^2. При таком подсчете мы, к сожалению, не сможем провести различия в скорости алгоритмов, оценки сложности которых близки (с точностью до коэффициентов).

Рассмотрим еще один алгоритм сортировки — "пузырёк". Он похож на предыдущий. В нем мы тоже будем искать минимальный элемент среди элементов с номерами от i до N и переставлять его на i место, но только другим способом. Идея его проста. На первом шаге сравним последний и предпоследний элементы. Больший элемент поставим на последнее место, а меньший — на предпоследнее. Далее сравним элементы с номерами $N-2$ и $N-1$. Больший поставим на место $N-1$, а меньший — на $N-2$, и так далее, пока не дойдем до первого элемента. Сравнив первый и второй элементы, на первое место поставим меньший, а на второе — больший элемент. Согласно алгоритму, встретив самый меньший элемент в первый раз, мы оставим его на месте (поскольку он будет сравниваться со следующим), после поменяем местами с предыдущим элементом, потом с тем, который окажется перед ним, и т.д. Действие алгоритма напоминает движение пузырька в воде: начиная с последнего элемента, мы доходим до самого первого, причем, встретив минимальный элемент, мы "подхватим" его и перенесем на самое первое место в массиве.

На i-м шаге сравним последний и предпоследний элементы, и переставим их местами, если они не идут в порядке возрастания. Далее сравним элементы с номерами $N-1$ и $N-2$, и т.д. до тех пор, пока не сравним элементы с номерами i и $i+1$.

На каждом шаге при просмотре элементов от N до i на i-м месте будет оказываться минимальный элемент из этого диапазона, и в результате мы получим полностью упорядоченный массив (см. предыдущий алгоритм).

Задача. Найти сложность алгоритма сортировки "пузырьком" в предположении, что операция присваивания занимает намного меньше времени, чем операция сравнения.

Гораздо меньшую сложность можно получить, применяя алгоритм сортировки слиянием. Рассмотрим этот алгоритм в предположении, что длина массива N есть степень двойки, $N=2^n$.

Задача. Даны два упорядоченных массива A и B каждый длиной p. Придумайте алгоритм со сложностью $2p$, позволяющий заполнить третий массив C длиной $2p$ элементами массивов A и B, сохранив свойство упорядоченности. При вычислении сложности операциями присваивания пренебречь.

Скажем, что массив A длины N является k-упорядоченным (N делится на k), если в нём упорядочены элементы $A[l*k+1]\ldots A[k*(l+1)]$ при любом допустимом l. Очевидно, любой массив является 1-упорядоченным. Если же массив является N-упорядоченным, то он является полностью упорядоченным.

Покажем, что k-упорядоченный массив A длины N можно преобразовать в

$2k$-упорядоченный, выполнив только N операций сравнения. По определению, элементы $A[1]\ldots A[k]$, $A[k+1]\ldots A[2k]$ и т.д. упорядочены внутри каждой группы. Рассмотрим первую и вторую группы. Используя $2k$ операций сравнения можно (согласно последней задаче) заполнить некоторый массив C длины $2k$ элементами $A[1]\ldots A[2k]$ так, чтобы C был упорядочен и каждое число в массиве C встречалось столько же раз, сколько среди элементов $A[1]\ldots A[2k]$. Присвоим теперь значения элементов массива C элементам $A[1]\ldots A[2k]$. Таким образом мы упорядочили в массиве A первые $2k$ элементов, выполнив $2k$ операций сравнения. Далее таким же способом упорядочим группы $A[2k+1]\ldots A[3k]$ и $A[3k+1]\ldots A[4k]$, $A[4k+1]\ldots A[5k]$ и $A[5k+1]\ldots A[6k]$ и так далее. В итоге получим $2k$ упорядоченный массив, выполнив N операций сравнения.

Теперь для того, чтобы упорядочить массив A длины $N = 2^n$, необходимо его преобразовать в 2-упорядоченный (это можно сделать, т.к. он является 1-упорядоченным), затем в 4-упорядоченный,..., затем в 2^{n-1}-упорядоченный, затем в 2^n-упорядоченный. После этих действий массив будет отсортирован.

Найдем количество операций сравнения в описанном алгоритме. Всего для упорядочивания будет необходимо $\log_2 N$ преобразований из k-упорядоченного массива в $2k$-упорядоченный, притом в каждом таком пребразовании будет N операций сравнения. Таким образом, общее количество выполняемых операций сравнения будет $N \log_2 N$. Поскольку сравнение – основная для алгоритмов сортировки операция, то такой же будет и сложность.

Сравнивая сложности различных алгоритмов сортировки, можно заметить, что алгоритм сортировки слиянием предпочтительнее. И действительно, ниже приведены данные о временах работы программ, реализующих различные алгоритмы (вычисления проводились на компьютере Pentium-200):

длина массива	простейший	"пузырек"	сортировка слиянием
8192	23,95 с	49,05 с	0,33 с
4096	6,1 с	11,75 с	0,16 с
1024	0,39 с	0,88 с	-

Задачи олимпиады по информатике

1) Множество A определяется следующим образом:

   1) $1 \in A$.

   2) если $x \in A$ и $3x + 1 \leq 1000$, то $3x + 1 \in A$.

   3) если $x \in A$ и $3x + 2 \leq 1000$, то $3x + 2 \in A$.

   4) Никакие другие числа не принадлежат A.

   Напечатать все элементы множества A в порядке возрастания.

2) Двоечник Вася выходит из дома в школу за N минут до звонка. До школы ему идти ровно M шагов. Каждую минуту Вася решает, в каком направлении сделать шаг: к школе или к дому. Найдите, сколько способов есть у Васи

прийти в школу во-время и сколько способов не дойти до школы (вернувшись домой, второй раз Вася ни за что не пойдет учиться).

3) На прямоугольной доске размера $N \times M$ расставлены числа 0 и 1. Найти прямоугольник максимальной плащади, состоящий только из единиц.

Биология

Особенностью преподавания биологии в летнем лагере является значительный разброс уровня базисных знаний участников смены, краткосрочность курса, отсутствие времени для внеаудиторной работы детей. Сложившаяся программа преподавания дифференцирует группы по годам обучения (1-й год — закончившие 8-9 классов, 2-й год — закончившие 10 классов), а также по профессиональной ориентации (общебиологический и медико-биологический циклы). В каждой учебной группе имеется 4 обязательных и 2 факультативных цикла. Примерная блок-схема занятий приводится ниже:

Общебиологический цикл

	1-й год	2-й год
1.	Общая биология. Вводный базис понятий. Цитология.	Общая генетика (теория и решение задач).
2.	Ботаника. Общая и обзор по типам царства растений.	Вирусология и микробиология (теоретич.).
3.	Многообразие животного мира (теоретич.).	Решение задач по биологии (практикум).
4.	Анатомия и физиология человека (теоретич.).	Химия живого (краткий обзор понятий).
5.	Анатомия и физиология человека (практикум).	Валеология (биология здорового образа жизни).
6.	Элементы доврачебной помощи (практикум).	Психология (практикум самопознания).

Медико-биологический цикл

	1-й год	2-й год
1.	Общая биология. Вводный базис понятий. Цитология.	Физиология человека – II (теория и практикум).
2.	Общая ботаника. Лекарственные растения.	Медицинская микробиология (теоретич.).
3.	Анатомия человека с латинской терминологией.	Химия живого (краткий обзор понятий).
4.	Физиология человека – I (теория и практикум).	Первая медицинская помощь (практикум).
5.	Общая зоология. Паразиты и ядовитые животные.	Общая и медицинская генетика (задачи).
6.	Элементы ощей патологии (обзор понятий).	Психология (практикум самопознания).

Основная задача преподавания биологии при такой структуре занятий заключается в привитии интегрального подхода к живому, формировании активного набора закономерностей, используемых при анализе несистематизированного или плохо изученного биологического материала. В качестве примера приведём структуру одного из семинаров.

Анатомия кровеносной системы

Вводная часть. Излагаются основные законы ангиологии: необходимость кровообращения в многоклеточном организме, фило- и онтогенез сердца и сосудов, характер их хода в соответствии со строением скелета, органов и тканей, соотношение хода артерий, вен и нервов.

Терминологический блок и схема строения сердца. Предлагаются схемы и обосновывается деление сердца на камеры, ход крупных сосудов (артерий и вен), ход коронарных сосудов, проводящей системы сердца, формирование полости перикарда. Вводятся латинские терминоэлементы (7 существительных и 6 прилагательных по теме "Сердце").

На основании изложенного материала предлагается указать (с соответствующим обоснованием) анатомические образования сердца, с повреждением которых будет затрудняться:

1) приток крови в левое предсердие;
2) выброс крови в легочный ствол;
3) кровоснабжение самого сердца.

В 5-минутном заключении на основе анализа решений вводится понятие о пороках сердца и причинах, их вызывающих.

Терминологический блок и схема строения артерий. Предлагаются схемы и обосновывается ход основных артериальных стволов в организме человека, особенности кровоснабжения органов и тканей в зависимости от онтогенеза и функции. Вводятся латинские терминоэлементы (14 существительных и 5 прилагательных по теме "Сосуды").

На основании различия формирования, строения и функций указываются основные закономерности хода вен.

Предлагается на основе предшествующих и полученных знаний изобразить анатомию сосудов:

1) печени;
2) головного мозга;
3) надпочечника (10 мин).

Комментарии и коррекция проводится во всех трех подгруппах в процессе работы над схемами.

Полученные знания и умения закрепляются при изучении других тем анатомии и физиологии человека, при овладении навыками первой медицинской помощи и знаниями по валеологии.

Задачи, основанные на закономерностях, изложенных в данной теме, входят в практикумы и в задания итоговой олимпиады по предмету.

Задачи олимпиады по биологии

1) Приведите три аргумента в пользу того, что вирусы — самые молодые формы жизни. Приведите три аргумента в пользу обратного.

2) Нарисуйте и обоснуйте график зависимости числа стафилококков от времени на бутерброде с маслом и медом, если бутерброд находится на столе при температуре 35 градусов по Цельсию.

3) Обоснуйте применение природой определенного набора натуральных чисел в строении тела и его частей. Какие числа используются?

4) Баба Яга варит зелье для Ивана Царевича и читает заклинание:

   Primus partum contra pharynx,
   Commitato contra larynx,
   Tertium obture bronchi,
   Quadro decremento conchi.
   Costae cum musculature
   Disthrophire et fracture.
   Dustus flux in athmosphera
   Respiratio pathera!

   Какие анатомические образования, упомянутые Бабой Ягой, будут повреждены? Предложите противоядие из трав, которое может исцелить Ивана Царевича.

5) Нарисуйте схему кровеносных сосудов верхней части тела Змея Горыныча.

Химия

Особенностью предмета является то, что единой общероссийской программы по химии для средней школы нет — программы не фиксируют ни количества часов по классам, ни порядка прохождения тем. Например, в одних школах органическую химию изучают в девятых классах, во многих — в десятых, в некоторых — только в одиннадцатых. Имеющиеся в школах учебники в значительной мере определяют как порядок прохождения тем, так и уровень знаний учащихся. Современных хороших учебников (например, Гузея — по общей и неорганической химии, Нифантьева — по органической) в большинстве школ не видели даже учителя. Поэтому уровни знаний по химии у школьников, приехавших в лагерь, могут различаться очень сильно.

К сожалению, из-за существующей практики проведения олимпиад многие достойные ребята не попадают в списки участников лагеря или не имеют возможность приехать в "Интеграл" и заменяются другими. Таким образом, и реальные знания учащихся лагеря, и желание ими овладеть, и способности к этому имеют очень большую дисперсию.

В связи с этим знакомство начинается со вступительной олимпиады и последующего ее подробного разбора, когда выясняется, кто есть кто. Далее были прочитаны два-три разных, тематически не связанных курса, *абсолютно новых для всех участников*. При этом все оказываются в относительно равных условиях — изучаемый материал новый для всех. Но все эти курсы строятся так, что материал школьной программы используется на каждом шагу. Таким образом убивается сразу несколько зайцев - школьники получили возможность для общения с учителем ("учёным из Москвы" на лагерном жаргоне) вне зависимости от их предшествующего химического опыта, они видят, что изучаемое ими в школе реально нужно в жизни на каждом шагу (ведь курсы совсем разные), попутно и ненавязчиво повторяется материал школьной программы, развивается кругозор, и, в идеале, показываются связи с другими предметами школьной программы.

В частности, в лагере были прочитаны курсы "стереохимия" и "биохимия оксида азота". Знания большинства школьников по стереохимии заканчиваются представлением, что атом углерода - тетраэдр. Само понятие о стереоизомерии для большинства оказывается откровением, между тем никакого специального математического аппарата курс не требует — элементы школьной геометрии и комбинаторики. Таким образом всю школьную программу по органической химии можно незаметно повторить и даже изучить "с нуля" в курсе стереохимии, масса практически полезных сведений, не предусмотренных программой (например, разбор причин катастрофы с талидамидом), сообщается попутно и усваивается особенно надежно. (Талидамид — препарат, рекомендованный как успокаивающее средство для беременных, после обычных проверок поступил в продажу в ФРГ. Оказалось, что у женщин, принимавших препарат, в сотни раз возросла вероятность рождения детей с аномалиями развития. Причиной оказалась примесь зеркального изомера в коммерческом продукте.)

В течение смены находится время для знакомства с правилами приема в ведущие химические ВУЗы и разбора заданий вступительных экзаменов. В целом, основная цель — убедить талантливого школьника, что он достаточно способен, чтобы поступить в такой ВУЗ без дополнительных занятий с репетиторами.

Стереохимия

Элементы симметрии. Поворотные оси, зеркальная плоскость, отражение в точке. Хиральные объекты вокруг нас (ножницы, ботинки, шурупы, алфавит). Узлы. Плоские треугольники и тетраэдр. Асимметрический атом углерода. Примеры соединений с одним асимметрическим атомом. Энантиомеры и диастереомеры. Хиральная плоскость. Примеры хиральных молекул без асимметрического атома углерода. Гексагелицен, замещённые ферроцены, циклофаны, бифенилы. Асимметрические фосфор и азот. Хиральные комплексы металлов.

Методы разделения рацематов. Контроль оптической чистоты. Асимметрический синтез и асимметрический катализ. Абсолютный асимметрический синтез. Рацемизация. Вальденовское обращение. Значение оптической чистоты.

Задачи олимпиады по химии

Задача 1. К 4,2 г белого порошка прилили избыток раствора HCl. При этом выделилось 1,12 литра газа (н.у.) с плотностью по гелию, равной 11. Какой состав может иметь исходный порошок?

Задача 2. Соединение трех элементов – X, Y и Z – является основным источником получения Y, в виде которого этот элемент содержится в земной коре. Элементарный состав этого соединения: X - 13,92%, Y - 63,84%. Элемент Y известен склонностью к образованию полисоединений особого состава. Элемент Z очень реакционноспособен и образует бинарные соединения практически со всеми известными элементами (кроме H). Бинарное соединение X и Z может содержать 71,48% X или 55,62% X. Элемент X играет важную роль в биохимии человека, в т.ч. является кофактором свертывания крови. Назовите перечисленные соединения. Где используется Y?

Задача 3. Изомерия возможна и у неорганических соединений. Предложите возможные структурные формулы кислот состава $H_5P_3O_8$. Предположим, все они имеются у Вас в банках без этикеток. Как их различить? (Доступно любое оборудование и реактивы).

Задача 4. Из-за различий в изотопном составе существует множество молекул серной кислоты, которые различаются составом и взаимным положением отдельных изотопов.

1) Определите общее число возможных изотопомеров серной кислоты (изомеров, состоящих из природных изотопов и различающихся их составом или положением).

2) Сколько в среднем содержится наиболее редко встречающихся молекул в 1 кг H_2SO_4 (из природной смеси изотопов)?

3) Сколько D_2O необходимо добавить к 1 кг такой кислоты, чтобы: **a)** концентрация самых редких молекул возросла в 100 раз? **b)** концентрация наиболее часто встречающихся молекул уменьшилась вдвое?

Принять изотопный состав элементов следующим: ^1H 99,98%; ^2H 0,02%; ^{16}O

99,76%; ^{17}O 0,04%; ^{18}O 0,20%; $^{32}S > 99\%$; $0,1\% < {}^{33}S < {}^{34}S$; ^{36}S 0,01%.

Задача 5. Ацетилен вступает в реакцию с избытком амида натрия. Раствор образующегося соединения **Б** выливают на твердый диоксид углерода и затем обрабатывают избытком минеральной кислоты. Получившееся в результате соединение **В** гидрируют на палладиевом катализаторе. Из двух изомерных продуктов **Г** и **Д** только один дает при нагревании летучий ангидрид **Е**. При взаимодействии этого ангидрида **Е** с бутадиеном-1,3 получается соединение **Ж**. Оно способно вступать в катализируемую $AlCl_3$ реакцию с бензолом. В результате образуется **З**, которое при обработке концентрированной H_2SO_4 дает продукт **И**. Определить все перечисленные соединения и написать уравнения реакций.

Задача 6. Известно, что гормон адреналин стимулирует распад гликогена в печени. Вторичным передатчиком сигнала служит соединение **А** состава $C_{10}H_{12}O_6N_5P$. Анализ этого соединения показывает, что в его состав входят рибоза, аденин (пуриновое основание) и фосфат в отношении 1:1:1.

Кроме того, про это соединение **А** известно, что

1) в отличие от рибозы, оно не способно образовывать комплексы с Cu^{2+};

2) в отличие от аденина, атом азота пиррольного типа у **А** не отщепляет H^+;

3) в отличие от фосфата, соединение **А** одноосновно.

Написать возможные структурные формулы соединения **А**.

Задача 7. Для научных исследований используются соли, меченые редким изотопом кислорода. Исходным продуктом для их получения обычно бывает $H_2{}^{18}O$ – весьма дорогой реактив. Предложите рациональные способы получения [^{18}O]-меченых (изотопно чистых, т.е. включающих только один изотоп кислорода!) нитрата, сульфата и карбоната натрия. Считайте, что Вам доступны любые немеченые реактивы.

Задача 8. Углеводород X, содержащий 90,64% C, гидрируют на различных катализаторах (см. таблицу):

исходное соединение	катализатор	промежуточные соединения	конечные продукты
*X	I	*А, Б	В
*X	II	*Г, *Д	Е
*X	III	*Ж, З	И
В	II	много разных	У
И	II	много разных	У
Е	I	К, Л	М

*Звездочкой отмечены оптически активные соединения.

При гидрировании любого из А-Х на катализаторе IV образуется У с содержанием C 84,69%. Предложите структуры А-У.

Физика

У потока физиков первые две учебные недели полностью посвящаются изучению школьных разделов, поскольку у учащихся нет достаточного глубокого понимания основополагающих понятий и законов, и лишь в последнюю неделю рассказывается дополнительный материал (например, специальная теория относительности).

При обучении делается особый упор на практические задачи и на приложение физики в жизни. При этом от учеников требуется практическая смекалка, понимание происходящих в природе процессов и умение оценить нужные физические величины. Следующие практические задачи были рассмотрены в лагере:

- С помощью только линейки определите коэффициент трения скольжения и коэффициент трения покоя между поверхностью стола и спичечным коробком.

- Большой спелый арбуз падает с высоты 4 метра. Оцените, на какое расстояние разлетятся его косточки после приземления.

- Определите, за какое минимальное время можно прогнать детский кораблик (небольшая деревяшка соответствующей формы) от одного края бассейна длиной 25 метров к другому (не прикасаясь к нему, не вынимая из бассейна и не заходя в воду). Можно использовать любой подручный материал. Перед решением разрешается провести эксперимент на дистанции 1 метр.

- Человек держит за верхний конец палку длины l, нижним концом слегка погружённую в воду. На какую максимальную глубину погрузится эта палка в бассейн после отпускания. Считать, что до момента максимального погружения палка перпендикулярна поверхности воды.

По возможности после решения подобных задач предлагалось провести контрольное испытание. Оценивалась как точность полученного теоретическим путем результата, так и его оптимальность.

Задачи олимпиады по физике

1) Обезьяна массой m, висящая на невысоком канате, равномерно движущемся вверх со скоростью v, поднимается на высоту l. Как изменится работа, совершаемая при подъеме обезьяны на ту же высоту, если обезьяна будет двигаться вверх по канату с ускорением a?

2) На тележке стоят две бочки: одна — цилиндр радиуса R, другая — цилиндр радиуса $2R$. Расстояние между центрами бочек равно $4R$. Бочки соединены тонким шлангом с краном. Первая заполнена водой, вторая — пустая. Описать движение системы после открывания крана (трением пренебречь).

3) Пуля массы m, летящая со скоростью V вниз под углом α к горизонту, попадает в брусок массы M и застревает в нем. На сколько переместится брусок по горизонтали, если коэффициент трения между бруском и поверхностью равен k, и известно, что брусок не отрывается от поверхности?

4) Космонавт, вышедший из космического корабля в открытый космос, бросил спутник рукой вперед со скоростью $v = 10$м/с. Как соотносятся периоды оборотов спутника и космического корабля, если последний движется по орбите на высоте 200 км?

5) Один моль идеального газа совершает цикл, описываемый следующим уравнением: $V^4 + aV^3 + bV^2 + cVT + R^2T^2 = 0$. При каких соотношениях a, b, c этот цикл возможен? Найдите работу, совершаемую в этом процессе.

Задача с продолжением

В 1974 году проводилась очередная, тридцать седьмая по счету, Московская математическая олимпиада для школьников.

В ее жюри работал студент мехмата МГУ Аркадий Климов, в свое время победитель международной математической олимпиады.

Как-то раз он поехал с друзьями на дачу к знакомому художнику. Они помогали хозяину в его экзотическом доме приводить в порядок имеющийся там склад антиквариата.

Хозяин попросил Аркадия уложить в коробку специальные плиточки, типа кафельной. Каждая плиточка имела форму параллелепипеда, одна из граней которого была квадратом 2×2 см, толщина же у плиточек была разной (0,5 см, 0,7 см и т.п.).

Аркадий попробовал класть плитки на дно коробки квадратным основанием, но уложить их так, чтобы не осталось пустого места, не удалось — длина ни одной из сторон коробки не была кратна 2 см. Поэтому пришлось ставить плитки на ребро, в результате получались (если смотреть сверху) прямоугольники размерами $2 \times 0,5$ см, $2 \times 0,7$ см, и т.п. Однако и теперь заполнить коробку без пустот Аркадий не смог, сколько ни пытался.

Не каждый, кому на голову падает яблоко, придумывает закон всемирного тяготения. Так же не каждый укладывающий плитки придумывает задачу. Аркадий же заинтересовался, действительно ли упаковать плитки без пустот невозможно? Можно ли это доказать? Так Аркадий придумал следующую задачу, вошедшую в вариант IX класса Московской олимпиады 1974 года.

Прямоугольный лист бумаги размерами $a \times b$ см разрезан на прямоугольники, у каждого из которых одна сторона имеет длину 1 см. Докажите, что хотя-бы одно из чисел a или b целое.

Решить эту задачу на олимпиаде удалось лишь нескольким школьникам. Все полученные решения были разные, но довольно сложные и запутанные. В журнале "Квант", №4 – 1975, было опубликовано одно из решений этой задачи, также довольно громоздкое.

С тех пор прошло более 20 лет, и за это время у задачи обнаружилось несколько очень изящных и коротких решений, абсолютно не похожих друг на друга. В одном из ближайших номеров журнала мы собираемся опубликовать статью, в которой познакомим Вас с этими решениями. Всегда интересно, когда трудная задача может быть решена при помощи совсем разных, и при том очень красивых идей, каждая из которых имеет собственную ценность.

А пока предлагаем Вам самостоятельно подумать над этой задачей. Если Вам удастся придумать красивое решение, пришлите его нам: возможно, оно окажется новым, и мы включим его в готовящуюся статью.

Редакция

Интервью номера

Н. Н. Константинов о математическом образовании

Николай Николаевич Константинов — выдающийся организатор математического образования, один из создателей системы математических классов в Москве. Организовал замечательное международное математическое соревнование — Турнир Городов и является его бессменным руководителем. Лауреат международной математической премии имени Поля Эрдеша. В своем интервью журналу делится взглядами на состояние и перспективы математического образования. Интервью взял Имайкин Валерий.

И. В.: Предмет "математика" — это самостоятельная учебная дисциплина или составная часть естественно-научного образования?

К. Н. Н.: Математику можно рассматривать не как самостоятельную дисциплину, а как часть естественно-научного образования, но все-таки нельзя пренебрегать тем, что математики имеют собственные интересы. Такое пренебрежение приводит к тому, что математика ликвидируется. Математика, само изложение математики порождает математические проблемы. Без этого нельзя. Самые главные проблемы порождает жизнь, но внутри математики возникают проблемы, которые рождены самой математикой. Т.е. математики — это как бы некоторый отдельный профессиональный цех, его нельзя смешивать со всем остальным миром. Но его оправдание все-таки только в том, что он связан с естественной наукой.

Все большие задачи идут от естественных наук. Я думаю, что в процессе обучения школьников или студентов очень важно, чтобы ощущение связи с естественными науками было. По-моему, профессора должны мотивировать в студентах это ощущение, если оно у них у самих есть. Мне кажется, что сейчас есть много и таких профессоров, которые и сами позабыли, зачем они занимаются математикой. По-моему, если взять самых больших математиков, то всегда возникает ощущение, что математику они рассматривают, как орудие познания естественного, реального мира. Скажем, интерес Колмогорова к теории вероятностей определялся, я думаю, тем, что теория вероятностей есть наука о реальном мире, а не только логическая схема.

И. В.: Как связано описанное Вами взаимоотношение между математикой и естествознанием с школьным образованием? В школьных программах разорвано это взаимоотношение?

К. Н. Н.: В школьных программах сейчас разорвано, но я думаю, что есть возможность это объединять.

И. В.: За счет чего?

К. Н. Н.: За счет того, чтобы давать школьникам такие заранее разработанные задания, в которых им нужно будет обязательно влезать в какие-то смежные вещи.

И. В.: Типа своего рода практикума?

К. Н. Н.: Да, типа практикума или межпредметных курсовых работ. Сейчас этого почти нет. Но когда проводится, это часто бывает интересно. Реально можно это осуществить, напрашиваются задачи, где можно использовать компьютеры для обработки физического эксперимента и т.п. Хотя это немножечко тривиально. Интереснее, когда с помощью компьютера можно сделать то, чего иначе вообще сделать нельзя.

Я думаю, что некоторое время тому назад, ну допустим, лет двадцать тому назад, можно было услышать такие оценки, что "наше время — это время специализации. Вот в средние века, в эпоху Возрождения были универсалы типа Леонардо да Винчи, которые могли охватить все. Теперь давно уже это не так. Теперь время специализации, чтобы достичь вершин какой-нибудь одной науки, нужно посвятить этому всю жизнь." И тем не менее основные научные достижения идут на стыках. И как теперь с этим быть? Есть два пути, противоположных. Один путь — это пытаться одного человека научить тем двум или нескольким наукам, которые он должен состыковать. По этому пути идут многочисленные факультеты прикладной математики, например, в нефтехимическом институте, в железнодорожном, и т.п. Они готовят себе "своих" математиков, которые будут стыковать математику со своим предметом. Это один путь. А второй путь — пусть люди обучаются своему, а потом уже в трудовом коллективе, где они будут вместе работать, они взаимно проникнут в интересы и возможности другой профессии и создадут работоспособное сообщество.

Оба пути имеют свои плюсы. Мой опыт работы в прикладных коллективах подтверждает продуктивность второго пути.

Мне пришлось работать в ИТЭФе (Институте Теоретической и Экспериментальной Физики), в математической лаборатории (6-й), под руководством А. С. Кронрода. Физики приносили в эту лабораторию задания. Главная работа математиков состояла не в том, чтобы решать задания (физики часто хорошо справлялись с этим), а в том, чтобы вместе с ними поставить правильную задачу. Т.е. физики зачастую недостаточно хорошо знают математику, чтобы грамотно поставить задачу. Еще чаще математики не знают физики. Тем не менее сотрудничество было плодотворным. Для этого нужно, чтобы математики пытались понять, чего хочет физик, а физики пытались понять что может сделать математик. Важна взаимная потребность понимать друг друга, а вовсе не универсальное образование.

Потом я работал в институте экономики, где была аналогичная ситуация. Были экономисты, которые плохо знали математику, были математики, которые не знали экономику. Но это не страшно, если есть взаимное желание понимать друг друга. И еще я видел, как работает вычислительный центр Госплана, где математики и экономисты отгородились стеной. Математики соглашались решать только те задачи, которые экономисты четко сформулировали в виде технического задания. Это привело к тому, что результаты работы вычислительного центра были нулевые. Потому что математики должны заниматься не решением задач, а постановкой их. В этом их образование. Для решения стандартных экономических задач имеются пакеты программ. Но не бывает пакетов, которые ставят задачи.

И. В.: А современное математическое образование приводит ли к тому, что математики научаются ставить задачи, а не решать задачи из достаточно большого стандартного набора?

К. Н. Н.: Что касается высшего образования и аспирантуры, это во многом зависит от руководителя (научного). К сожалению, руководитель часто стоит в очень жестких условиях, когда его аспирант должен что-то там вовремя сдать, защитить и т.д., и руководитель просто не успевает, не может себе позволить обучить постановке задач или хотя бы разъяснить смысл конкретной задачи аспиранта в большой научной задаче.

Руководитель часто понимает, что это плохо, но у него нет времени вводить в круг идей, которые порождают саму задачу. Так что, конечно спешка ни к чему хорошему не приводит. Я не думаю, что здесь дело именно в системе образования. Мне кажется, что просто если руководители осознáют проблему, то они могут добиваться того, чтобы человек не был узко воспитан.

И. В.: То, про что Вы сейчас говорите, ближе к научной работе, к приложениям науки. А что есть, по-вашему, естественно-математическое творчество для школьников? Ведь у Вас большой опыт работы в кружках.

К. Н. Н.: Я думаю, что здесь возможностей довольно мало. Потому что просто школьники знают мало. Все-таки мне кажется, что можно добиться, чтобы уже в постановках математических задач как-то звучали другие науки. Хотя все же далеко не уйдешь. В этом отношении воспитательное значение имеет Турнир им. Ломоносова[1], где рядом присутствуют конкурсы по разным предметам. Это уже должно в какой-то степени разрушить стереотип избранности одной науки перед другими. Вот за этим нужно следить, а так чтобы человек еще в школе мог совершить комплексные исследования на грани двух наук, это, пожалуй, нереально.

Что-то можно делать в этом направлении, например, исследования на грани между географией и биологией. Мы уже когда-то обсуждали, например, такую идею: школьнику можно дать задачу, типа курсовой работы, требующей наблюдения и расчета – оценить количество ворон в Москве. Для этого нужно посмотреть, какие в Москве имеются парковые территории, какова их площадь, изучить в какой-то степени биологию ворон, знать как они вьют гнезда, знать динамику численности, сколько ворон бывает весной, сколько осенью и т.д.. Довольно много должен узнать человек, чтобы решить эту задачу, тут и математика, и расчет, и наблюдение, и чтение книжек. Ну, математики здесь все же мало. Реальной задачи, чтобы в ней была какая-то глубокая математика, и чтобы она уже соприкоснулась с практикой, я пока не вижу.

Более перспективны попытки интересно рассказывать математикам о биологии, музыкантам о математике, физикам о музыке и т.п. Все это - трудные проблемы, потому что большство специалистов страдают узостью и не могут разгова-

[1]см. “Математическое образование”, №1 за 1997 год.

ривать с людьми не своего понимания. Поэтому так трудно проходит становление Турнира им. Ломоносова, где приходится находить общий язык представителям наук, обычно не соприкасающихся. Все это интересно, но этого почти нет сейчас.

И. В.: Именно с этим связано, что математически одаренные школьники углубляются только в чисто математическое творчество посредством олимпиадных задач, математических классов и прочих подобных вещей, или это уже сложившаяся традиция?

К. Н. Н.: Я думаю, что это скорее традиция. Например, я поступил на физфак, но единственное, что там прилично преподавалось, была математика, и получилось так, что для того чтобы не вылететь, нужно было мне потратить на нее массу времени. Так и вышло, что я к концу физфака по математике кое-что знал, а по физике не знал почти ничего. На самом деле, я думаю, что у нас не был Университет в смысле его первоначального понятия.

Ведь есть первоначальное понятие Университета, где должны быть все науки рядом, а в Московском Университете они настолько разъединены, что даже на химфаке своих математиков готовят. Химики не идут со своими проблемами на мехмат, потому что мехматские математики занимаются совсем не теми вещами, которые интересны для химиков; даже физиков, специалистов по квантовой механике, химфак готовит своих, не рассчитывая на тех, которых готовят на физфаке. Так сама идея Университета здесь утрачена. Я думаю, если бы она была, если бы Университет был более компактным, если бы кафедры сильнее взаимодействовали между собой, если был бы взаимный интерес, то тогда возникла бы естественная пропорция. "Чистые" математики составляли бы такой процент от общего числа математиков, который естественен, который отвечает внутренним потребностям человека, и "прикладники" естественным образом распределились бы между другими смежными науками. Но поскольку этого нет в Университете, получается так, что человеку просто деваться некуда: если он на мехмате, то ему некуда идти, кроме как на кафедру алгебры, или на кафедру функционального анализа, или дифференциальной геометрии и все, никаких приложений здесь не будет.

Еще в 30-ые годы, как мне мои старые преподаватели на физфаке говорили, была одна университетская библиотека, рядом сидели студенты всех факультетов. Физико-математический факультет объединял и физиков, и биологов, и математиков.

Гигантские размеры Университета привели к тому, что сама его идея исчезла, уж лучше было бы несколько университетов, но небольших.

Тем не менее, я думаю, что это традиция, которую можно преодолеть.

И. В.: А Вам известны какие-нибудь попытки ее преодоления, более или менее успешные?

К. Н. Н.: Ну, успешной попытки, пожалуй не знаю... Есть Независимый Московский Университет, в котором нет таких попыток.

Правда, есть Малый Исследовательский Университет при Курчатовском институте, очень маленький. Там вместе обучаются физики, математики и программисты. Основная его идея — сделать исследовательские работы основой процесса обучения, причем эти исследовательские работы бывают, как правило, смежными. Но считать этот опыт уже удачным еще пока рановато. Но, в принципе, я думаю что еще где-то есть такие попытки.

И. В.: А скажем, Турнир Городов[2], в какой-то мере пытается перестать быть чисто математическим?

К. Н. Н.: Нет, пока что он остался чисто математическим, правда, возник Турнир Городов по физике. Турнир Городов по математике помог физикам только в одном — мы им дали наш список адресов. Они разослали по этим адресам задачи по физике и часть людей оказалась заинтересованной, так возник Турнир Городов по физике. Пока что никакой связи с математикой нет, и не ясно, насколько еще Турнир Городов по физике будет развиваться, потому что его центральная организация очень маленькая. Очень толковые люди, но их очень мало, и их пока что слишком слабо поддерживают. А интерес на местах очень большой.

И. В.: Я понял, что Вы смотрите на математику, как на такую составную часть, может быть, даже основную, образования человека, который потом будет в каком-нибудь исследовательском коллективе вести прикладную задачу и т.п. Но это относится к обычной системе математического образования. Известно, что есть много математических олимпиад, начиная от районного уровня, и выше, вплоть до Международной. Какова их роль? Только отбор и выявление математически одаренных детей или нечто более глубокое?

К. Н. Н.: Я думаю, что конечно больше, чем просто отбор. Если мы отбираем в конце концов 100 человек, а в олимпиаде участвует 10 тысяч человек, то не надо считать, что все остальные пришли только для того, чтобы выбрали этих 100. Я думаю, что такие массовые олимпиады способствуют тому, что в обществе в целом улучшается отношение к математике. Тысячи людей сохраняют о математике какие-то положительные эмоции, пусть даже они потом не стали математиками, пусть даже они потом забыли все теоремы. Но то, что у них осталось ощущение, какая математика хорошая, это уже меняет настроение общества. Сейчас я уже вижу, что очень многие дети наших бывших учеников приходят на олимпиаду, и для них это совершенно естественно, в то время, как сами эти ученики были из довольно малокультурных семей, где их никто не мог подтолкнуть к математике. Допустим, отец имеет 4-классное образование, мать тоже близко к этому, он выслужился в полковники, работает завхозом военной академии, а сын его теперь, скажем доктор наук, работает в Америке и так далее. Подобных примеров у нас много.

Сейчас много уже людей, которые приходят на олимпиады со своими детьми — это наши бывшие ученики. Однажды в какой-то комиссии где-то в Моссовете я рассказывал про Турнир им. М.В. Ломоносова, и тут вдруг выяснилось, что все присутствующие про него знают, потому что либо сами когда-то участвовали, либо их дети сейчас туда ходят. Но если это так, значит и агитировать не нужно, уже мероприятие настолько проникло вглубь, что оно уже само за себя агитирует и уже стало фактом нашей реальности. Его уже и отменить практически невозможно. Так что я думаю, что гораздо больше, чем просто отбор.

---

[2]См. “Математическое образование”, №3 за 1997 г.

Сейчас в школах висит изречение М.В.Ломоносова: "Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит". Я думаю что, скажем, безграмотные законы, логически противоречивые, возникают потому, что люди не привыкли с детства шевелить мозгами. У нас сейчас довольно много законов, которые противоречат друг другу. Ну скажем, в Конституции написано, что прописка отменена, а в пенсионном законе сказано, что человек подает документы на получение пенсии по месту прописки. Я считаю, что некоторый уровень логической культуры воспитывается математикой. Это вторая важная вещь.

И. В.: По поводу перспектив математического образования. Есть много разговоров, что в России создана уникальная система математического образования, что она одна из лучших. Как Вы к этому относитесь? Во-первых, может, это миф? Во вторых, видится ли тенденция вливания российского математического образования в какую-то общемировую систему? Или наоборот какие-то противоположные тенденции?

К. Н. Н.: Не хочу хвалить нашу систему образования. Могу вспомнить замечание Бернарда Шоу: "Даже глупый генерал может выиграть сражение, если генерал противной стороны еще глупее". Действительно, посмотришь, как устроено образование в других странах, и очень часто видишь, какие грубые ошибки заложены в самой системе с самого начала.

Так получилось, что действительно у нас математическое образование лучше, чем во многих других местах. Но я не думаю, что оно лучше, чем везде. Мне, например, очень нравится, как поставлена работа со школьниками в Югославии. Не только в Сербии, но и в других бывших республиках. Там есть общество "Архимедес", оно до сих пор не отменено, хотя Югославия распалась. "Архимедес" издает много книг, в основном для начинающих; некоторые из книг очень простенькие, что может быть как раз самое важное и есть. Общей картины по разным странам у меня нет, но знаю, что в некоторых развитых странах просто необычайно слабая программа по математике. Скажем, в гимназиях Италии математику проходят как чисто гуманитарный предмет, как географию — прочитал параграф, рассказал. Задачи не решают. В школах Швеции не учат раскрывать скобки. К математике, в нашем смысле слова, приходят только на последнем году обучения. До этого проходят какие-то совсем примитивные вещи. В Германии программа довольно слабая, а в Китае довольно сильная. Но не имею общей картины.

Для сравнения образования в разных странах можно использовать объективные критерии — успехи учащихся на Международной Математической Олимпиаде и на Турнире Городов. Но в Международной Математической Олимпиаде участвуют всего по шесть человек от каждой страны независимо от ее размеров. Скажем, чтобы Эстония набрала шесть участников, ей нужно скрести по всей стране и любого мало-мальски соображающего можно послать, чтобы было шесть человек. А в Китае могут из тысяч выбирать и целый год их тренируют. Поэтому результат Международной Олимпиады говорит не очень много. Он сильно зависит от специальной тренировки узкого круга людей, а не только от общего уровня постановки образования. Турнир Городов в этом смысле имеет преимущества, но он не всеобъемлющий, хотя дает представление о том, где как работают. Если какой-то город участвует, то мы получаем представление, какие задачи школьники могут решить. Это тоже говорит не об общем уровне образования, а о некоторой верхушке. А есть ли объективные способы узнать общий уровень, не знаю, пока не вижу.

И. В.: А что касается вливания в какой-то мировой процесс образования, происходит это с нашим образованием или нет?

К. Н. Н.: У нас, скорее, происходит что-то отрицательное, т.е. у нас есть очень много энтузиастов, которые стараются перенести на нашу почву самое худшее, что есть в образовании других стран. Например, мы знаем, что на Западе очень сильно развита тестовая система экзаменов, олимпиад, причем сами тамошние математики крайне недовольны этой системой, а у нас находятся энтузиасты, которые стараются ее внедрить в ущерб тем системам, которые у нас хорошо работают.

И. В.: А не стоят ли за этим некоторые объективные процессы? Если посмотреть, какие сейчас профессии выходят на первый план, то получается, что обществу нужно очень много людей, которые способны всякие инструкции выполнять. Например, освоил Windows и работаешь. А людей, умеющих мыслить и рассуждать, ставить под сомнение, выдвигать гипотезы, потом заниматься их обоснованием, вроде бы в относительном размере требуется все меньше и меньше. И может быть этот объективный процесс и двигает наше образование в определенную сторону?

К. Н. Н.: Ключевое слово в Вашем вопросе - "требуется". Кому требуется и для чего? Здесь мы сталкиваемся с принципиальной ситуацией, что ответы на самые практические вопросы зависят от наших представлений о целях. Большой советский математик П.С.Александров сказал в одном интервью, что единственная цель, которую может ставить перед собой человеческое общество, — это обеспечение неограниченно долгого существования человечества в предвидимом будущем. Я не встречал более глубокой формулировки на эту тему. Мысль кажется мне правильной, потому что уже названная цель почти недостижима, и добавление к ней еще каких-либо пожеланий приводит к ситуации погони за двумя зайцами.

Облик западного общества формируется бизнесом, а бизнес, чтобы выжить, формирует спрос. Никакой связи с целями человечества здесь не просматривается. Windows "освоить" невозможно, так как гигантская фирма занимается тем, что непрерывно его модернизирует. Цель этой деятельности в том и состоит, чтобы все время покупали новые версии. Так что тот, кто пытается его освоить, включается в вечную гонку. Этим современное программирование отличается от математики, где основные знания устаревают очень медленно (задача номер 1000 в задачнике "Кванта" взята из рукописей Архимеда).

Бизнес использует образованных людей. Но тот, кто "заказывает музыку", обычно не знает, что могут "музыканты". Люди, которые от имени общества формируют заказ на образование (бизнесмены и чиновники), часто сами слабоваты в этом самом образовании. США вынуждены ввозить сотни тысяч программистов, хотя учат работать по инструкциям - мы видим, что этот стиль образования не соответствует и целям бизнеса.

Но и спрос на программистов - это совсем временное явление. Он насытится довольно скоро.

И. В.: Ну, я имею ввиду скорее не программистов, а общую ситуацию. Возьмем быт. Все наводнено техническими устройствами, раньше же ведь не было такого: зайди сейчас во многие семьи — у них есть видеомагнитофон, у них есть музыкальный центр, микроволновая печь, программируемый телефон. Всюду надо знать, как нажимать на разные кнопки, уметь запускать эти аппараты. Или возьмем работу. Даже не программиста, а просто, скажем, секретаря, которых очень много сейчас развелось; эта работа требует знать какой-нибудь текстовый редактор и в нем выполнять всякие свои дела. Сплошное выполнение инструкций.

К. Н. Н.: А разве для этого нужно большое образование?

И. В.: Вот именно я и говорю, с этим связана та тенденция, что на нас сваливаются тесты и т.п.. Что образование, которое заставляет думать, рассуждать, решать новые для себя задачи, оно естественно умирает засчет невостребованности. Или Вы не видите такого?

К. Н. Н.: Нет. Я, наоборот, вижу обратную вещь. Что, скажем, в таком развитом обществе, как американское, идет нарастание другой проблемы. Что американское общество научилось решать все задачи, но оно совершенно не умеет их ставить, т.е. оно не понимает, чего оно хочет.

И. В.: Т.е. оно как бы разработало способ для решения всевозможных задач?

К. Н. Н.: Да, у них там хорошие квартиры, хорошие автомобили, все это прекрасно. Дальше, они платят большие деньги врачам и адвокатам, выполняют их инструкции. Врачи себе ухмыляются и берут эти деньги, никто не может проверить как они лечат. И вот, это общество зашло, в каком-то смысле, в тупик. Т.е. куда они могут идти? Они могут быть только довольны тем, как живут, вот и все.

И. В.: Ну есть еще такой вариант, что довольны тем, как живут, и пытаются и всему миру эту жизнь навязать, а это требует больших усилий, стратегических разработок, планирования.

К. Н. Н.: - Ну, я думаю что они не специально занимаются тем, чтобы навязывать, а просто сама система заставляет: они должны продавать свои товары, т.е. тем самым как бы и навязывают. Ну, например чтобы все купили телевизор, надо навязать им такой образ жизни, потребность именно в телевизоре. Для этого нужно создавать боевики, которые люди захотят смотреть. В общем, да, конечно, они навязывают, свой стиль потребностей, стиль жизни.

Недавно в “Известиях” была статья, в которой прозвучала интересная мысль о том, есть ли вообще какая-то разумная перспектива для человечества. Так вот один мудрый человек высказал гипотезу (он побывал в разных странах), что Китай не дорос еще до такой проблемы, Америка уже проскочила момент, когда можно было ставить эту задачу, а на Россию пока еще можно надеяться.

И. В.: Теперь более конкретный вопрос, о выпускнике средней школы, не математической. Что, Вы считаете, с точки зрения математического образования он должен иметь, если он уже дальше не будет специализироваться на математике?

К. Н. Н.: Кроме умения считать, я думаю, что самое полезное, если бы он получил некоторую логическую культуру. Пример: объявлено, что в метро допускаются люди с такими вещами, у которых сумма трех измерений не больше 150 см и длина не больше 2-х метров. Казалось бы, из этого объявления следует, что с лыжами ходить нельзя, но на самом деле правило интерпретируется так, что с лыжами проходить все-таки можно, а то что в них сумма 3-х измерений больше 150 см, это уже в данный момент не играет роли. Автор формулировки не смог сказать то, что хотел сказать.

Было бы хорошо, если бы люди обладали логической культурой хотя бы в этом объеме. Но этого пока нет, хотя иногда это очень полезно.

И. В.: Итак, фактически, умение считать и определенная логическая культура?

К. Н. Н.: Мне кажется, да. А скажем, изучение геометрии, ее теорем, скорее, является частью эстетического воспитания человека (А.С.Пушкин уже после окончания Лицея изучал геометрию - понятно, что не для практического применения).

По-моему, математика важнее для эстетического воспитания, чем лекции, скажем, о русских передвижниках. Конечно, лекции тоже нужны, но заниматься одной болтовней о художниках или цитированием искусствоведов — это очень мало. А геометрия — реальное прикосновение к прекрасному. Математика ведь далеко не для всех представляется прекрасной. Но для кого представляется, тот что-то от нее получает.

И. В.: Теперь возьмем следующую ступеньку. Например, студент-выпускник технического вуза, который будет, скажем, инженером, но не математиком-исследователем или прикладником. Какие для него Вы видите цели математического образования?

К. Н. Н.: Если это инженер, допустим, в области теплотехники, то он должен уметь делать термодинамические расчеты, знать уравнения в частных производных, уметь сосчитать всякие вещи типа энтропии или пользоваться уравнением состояния газа. У него должно быть знание математического анализа примерно в том объеме, в котором его и преподают. Во многих вузах есть хорошие математики, и положение здесь не такое уж плохое. К сожалению, его преподают часто слишком оторванно от жизни, даже на физфаке МГУ. Допустим, на 1-м курсе преподают основы математического анализа, факты типа, скажем, теоремы Ролля, ряд Тейлора с остаточными членами в разных формах. Ко 2-му курсу люди успевают это забыть, и когда им читают дифференциальные уравнения, то они уже принимают эти теоремы на веру, а к тому времени, когда им читают теорию колебаний на 3-м курсе, они успевают забыть теорию дифференциальных уравнений. А так как профессор-физик тоже давно ее забыл (с точки зрения понимания математика), то он им все читает заново, т.е. получается как бы своя математика, уже почти оторванная от той, которую студенты изучали когда-то. Вот это все неправильно. Я думаю, что здесь можно найти такие способы изложения, которые приведут, так сказать, к разумному компромиссу.

Но нельзя из будущих, допустим, инженеров делать знатоков логической структуры анализа, хотя сколько-то знать надо. Совсем не понимать ее нельзя.

Инженерам разных профессий нужна разная математика. Инженеру-электронщику совершенно не нужна аэродинамика, а ему нужны совсем другие вещи, те же алгоритмы, наверное. Если инженер создает элементную базу, нужны какие-то прикладные разделы из теоретической физики.

И. В.: Как Вы к такому явлению относитесь: в свое время был (и до сих пор продолжается) массовый поточный выпуск людей с высшим математическим образованием (мехмат, ВМК, много других вузов), а потом все эти люди оседали в КБ, НИИ, в "ящиках" и часто использовались совершенно "не по назначению". Например, как просто секретарь, как наборщик на компьютере, кто-то бухгалтером становился, кто-то чуть ли не курьером и т.п. Это нормально — такой разрыв между возможностями и должностью?

К. Н. Н.: Нет, это, конечно, неправильно. Я думаю, что возможно такое сопоставление. В России средняя школа сравнительно приличная, если например сравнивать со Штатами, высшая школа тоже приличная, а дальше люди, окончившие все это, бросаются на произвол судьбы и никто дальше ими не интересуется, никому они не нужны. В Америке все наоборот, довольно слабая школа среднего уровня, не очень слабый, но и не сильный вуз, но зато потом люди работают в таком режиме, который действительно требует полученных знаний, им приходится работать, приходится читать, приходится узнавать то, что нужно. Очень многие математики в Америке устраиваются в фирмы. Причем они заранее знают, что пойдут в фирмы, поэтому они выбирают себе предметы (там действует система выбора предметов), которые, по их мнению, им будут полезны. Т.е. они как бы заранее нацеливаются на то, чтобы работать в фирме. Не знаю, работает ли там кто-нибудь курьером, мне кажется, вряд ли. Но по крайней мере, то, что люди разбегаются по разным профессиям — это тоже верно. По-моему, там более хозяйски относятся к тем, кто имеет образование. У нас просто безобразие. Масса людей кончала институты не известно вообще зачем, поскольку на работе от них ничего не требовалось.

Я долгое время работал в Институте экономики АН СССР (до 88 г.). Для чего вообще существовал Институт экономики? Для того, чтобы сделать вид, что у нас научная экономика, больше никакой цели не было. У нас очень многое только для вида существовало. Между тем, в этом институте было немало уникальных специалистов, глубоких знатоков экономической реальности нашей страны. Теперь многие из них работают в фирмах. В отличие от математиков, никто не поехал зарабатывать за рубеж. А во время социалистической системы были случаи, когда аналитические доклады сотрудников не доходили даже до дирекции, не говоря уже о ЦК, для которого они были предназначены, - внутренняя цензура зарубала любую мысль, которая могла показаться "рыночной".

Я знаю немало математиков, которые, попав в такие институты, существовавшие "для вида", проводили там время не зря, делая полезную работу по своему разумению. Они писали хорошие книжки и т.п., что не имело к работе института никакого отношения.

Я считаю, у нас полное безобразие с использованием специалистов, потому что на самом деле они просто не нужны. Для такой работы, для халтурной работы они просто не нужны.

И. В.: Нельзя ли так поставить вопрос: может быть, математическое образование так вышколивает мышление человека, что он практически на любой работе сгодится?

К. Н. Н.: В том числе на работе курьера?

И. В.: В том числе, конечно, и на работе курьера. Бывший математик сможет стать курьером, но курьеру без образования почти невозможно стать математиком.

К. Н. Н.: Я думаю, что если он хороший математик, и не в очень узком смысле, тогда он действительно может переходить на другую работу. Эта замечательная способность — именно свойство математики. Имея математику в качестве базы, можно перейти куда угодно, но я не хочу включать в это число тех людей, которые на мехмате долго просидели впустую, ничему не научились. Таких тоже полно, т.е. мехмат и не только мехмат, но и в целом школа, и средняя, и высшая очень хорошо поощряют халтурщиков. Единственное, чему обучают действительно хорошо — это халтуре. Если человек только этому научился, тогда он и везде будет халтурить. Если он от математики что-то получил, то да, это есть некая база, чтобы квалифицироваться в других специальностях.

И. В.: Но вот, кстати, сейчас сложилось очень много жестких сфер жизни, где уже по некоторым причинам халтурой не отделаешься. Скажем, если ты в бизнесе халтурно работаешь, то тебя или разорят, или вообще истребят. Или, допустим, пусть на наемной, но достаточно престижной и высокооплачиваемой работе, если ты там не цепляешься, тебя под сокращение штатов увольняют, и остаешься просто безработным. Как вы считаете, образование, как-то уже отреагировало на такие вещи, или оно еще по инерции катится.

К. Н. Н.: Отреагировало. Приведу пример. Вор украл у меня компьютер, его поймали и компьютер мне вернули. А когда вора выпустили, он устроился на курсы по подготовке в ВУЗ и поступить хочет в финансовый институт. Т.е. он понял, что зарабатывать деньги надо более грамотно, чем он пытался сделать кражей.

Это, конечно, анекдотический случай, но фактически все же произошла перемена именно в этом отношении, что нужно поступить в ВУЗ не только для того, чтобы избежать армии, а еще и для того, чтобы научиться зарабатывать.

Но совсем другую категорию составляют те, кто не думает о заработке, а хочет, чтобы ему просто было интересно. Жаль что таких людей мало. Это совсем маленький процент.

И. В.: А можно привести какие-нибудь примеры, или показать на Вашем собственном опыте, как может прийти к человеку решение стать математиком. Это благодаря влиянию, или существует какая-то врожденная компонента, что важно?

К. Н. Н.: Нет конечно, человек не мгновенно может принять такое решения. Вот М. Концевич — это выдающийся молодой математик. Он окончил московскую 91-ю школу в 1980 году. Семья его родителей — чисто гуманитарная. Отец — специалист по древнему корейскому языку, никаких математиков там нет поблизости. Но Максим попал на районную математическую олимпиаду, потом на городскую, а затем его пригласили в математический класс. И он стал математиком, сейчас известным во всем мире. Что здесь повлияло? Математика, в форме олимпиад, послужила связующим звеном между школой и профессией, он попал как раз в тот небольшой процент, который олимпиада отобрала для математики в чистом виде.

Это по-моему хороший случай, когда родители толкают — это хуже. Но бывают и такие родители-математики, которые вовсе не толкают, дети имеют возможность самостоятельно открыть свой интерес, это лучше.

Есть и такие примеры, когда простой дворовый мальчишка, который проводил время в подворотне со шпаной, по совету учительницы пошел на математический кружок на мехмат. Дальше — математический класс 57-й школы, мехмат, аспирантура, Математический институт им. А.В.Стеклова, и т.д. Не хочу конкретизировать, подобных примеров немало.

Важно, что была учительница, был толчок. Большую роль играет наличие какой-то государственной системы.

Должна быть разветвленная сеть, которая связывает науку с населением. В нее входят учителя, массовые олимпиады, кружки при МГУ и других вузах. В идеале любой школьник, проявляющий к чему-либо интерес, должен в эту сеть попасть. Во многих странах ее просто нет или она очень слабая. Я думаю, что слабые результаты многих стран в олимпиадах (международных), именно этим определяются.

В некоторых странах почти нет своих олимпиад, почему? Есть формальные, но очень слабые. Я думаю — потому что организаторы ленивые. В прошлом году провели в латиноамериканских странах и в Испании так называемую майскую олимпиаду, она оказалось очень массовой. Потому что ее проводила молодежь, хотя я про это мало знаю. Я думаю, что если есть молодые люди, достаточно активные, то глядишь что-то и получится. Могут возникнуть новые традиции.

Отношения между учителями и учениками подобны отношениям между родителями и детьми. Отношения между студентами и школьниками подобны отношениям между старшими и младшими братьями. А это — разные вещи. В результате студенты — руководители кружков, организаторы олимпиад и преподаватели математических классов имеют возможности такого взаимопонимания с их учениками, которые не доступны учителям более солидного возраста.

И. В.: А что касается издания математических книг, учебников, популярных брошюрок?

К. Н. Н.: Более-менее представляю себе, как это делается в Югославии, я уже об этом говорил. В англо-язычных странах, хорошие книги издаются, но имеют всегда очень маленький спрос, очень маленький, ничтожный. Там если книжку издали и раскупили всего, скажем, 100 экземпляров, то это даже не считается очень уж плохим результатом.

В России раньше много издавали. Приведу интересный пример. Один из энтузиастов Турнира городов, профессор University of Alberta, замечательный канадский математик Энди Лю родился в 40-е годы. В детстве он читал хорошие математические книжки. Это было начало 50-х годов, когда победила Китайская революция. Коммунисты, придя к власти, начали с ходу печатать многие книжки, переведенные с русского языка. Тогда Энди Лю прочитал книжку Перельмана "Занимательная математика" и это его подтолкнуло стать математиком.

И. В.: Хорошая книга тоже может подтолкнуть?

К. Н. Н.: Еще как, конечно. В особенности важны книги самого массового уровня, которые может читать человек абсолютно не подготовленный. А у Перельмана были вещи доступные абсолютно любому человеку. Ну например, то что если на одно поле шахматной доски положить одно зернышко, на следующее два зернышка, на следующее — четыре, и так далее по геометрической прогрессии, то не хватит зерна всей Земли. Вот что такое геометрическая прогрессия, ясно, что это совершенно замечательный факт, который, с одной стороны, доступен любому человеку, с другой — очень удивительный.

Таких фактов можно набрать много, по-моему это не сложно. Вот таких книг и не хватает. Кстати, не только по математике, но и по другим предметам.

Более специальную и малотиражную литературу тоже надо выпускать. Но это имеет смысл тогда, когда есть первый уровень.

Я думаю, что самое сложное в нашем журнале, чтобы там была часть, доступная для людей, не имеющих подготовки.

И. В.: Вам не кажется, что вся эта масса видеопродукции, развлекательного чтения и прочих подобных вещей очень начинает теснить познавательную литературу? Например, популярных изданий для школьников очень мало, тираж "Кванта" сильно упал и т.п.

К. Н. Н.: Он упал не только поэтому. Я думаю, что нам, математикам, нужно тоже лезть в эту сферу видеопродукции. Есть видеофильмы, в которых, скажем, показываются разные вещи по физике. Например, как выглядит электронное облако, нарисована плотность вероятности нахождения электрона в данной точке ...

Это все очень интересно, и многое интересно посмотреть физикам, не только школьникам. Я думаю, что когда-нибудь появится желание сделать видеоприложение к журналу "Математическое образование". Если такой материал появится, это будет как раз то, что нужно.

Зачем нам ограничиваться такими формами общения, которые пришли из средневековья. Раз жизнь меняется, то мы тоже должны меняться.

И. В.: А к Интернету Вы можете выразить отношение?

К. Н. Н.: Я думаю, что WWW пока находится в стадии становления: информация доступна, но не достоверна. Пока что мне не разу не удалось из него извлечь что-то полезное для себя. Либо там не находилось нужных мне сведений, либо они от меня же исходили. В какой-то степени это информационная помойка, там никто не отвечает ни за что.

Вот, скажем, Британская Энциклопедия — это вещь, за которую своей честью отвечают очень квалифицированные люди, за этим вековая традиция и т.д. Не может быть никакой ерунды. Она уже тоже есть в видеофильмах, но ясно, что это дело серьезное. А, например, на Турнир Городов уже 200 ссылок есть в Интернете. Все кому не лень кладут туда задачи Турнира Городов, причем с ошибками, и никто за это не отвечает. Вот это, по-моему, порочность Интернета пока. Потом общество что-нибудь придумает.

И. В.: А что касается роли математики для людей, ориентированных гуманитарно?

К. Н. Н.: Это очень интересная проблема, по-моему, никто ей не занимался. Однажды я пришел в Консерваторию без билетов, потому что билетов не было. Но чтобы проникнуть, я пришел заранее и спрятался там почти на чердаке. И каково было мое удивление, когда я оказался там не один. Там была целая группа школьников — учеников Хорового училища при Консерватории, которые проникли туда затем, чтобы послушать выступление своих товарищей по училищу. Это были старшеклассники. Пока мы ждали концерта, я беседовал с ними. Я их спросил, изучали ли они математику. Да, изучали математику. А зачем, и какую математику? Решаем, говорят, логарифмические уравнения с параметрами. Вы же будущие музыканты, говорю, зачем же вам эта бредятина? Как, говорят, зачем? Чтобы сдать, экзамен, нам же нужен аттестат, как же поступать в Консерваторию без аттестата? Нам нужен аттестат, поэтому мы должны это все учить. Ой, думаю. Надо же. Кто же все это придумал, чтобы они это учили.

Я подумал, что вообще было бы интересно понять, а какая математика нужна будущим музыкантам? Ведь им нужна такая математика, которая имела бы эстетическую ценность, и больше ничего. Зачем решать уравнения?

И. В.: Вот такие общественные барьеры доходят просто до абсурда.

К. Н. Н.: Да, абсолютный абсурд. Чтобы известный музыкант мог стать заведующим кафедрой консерватории, он должен защитить диссертацию. Для этого надо сдать минимум, в который входила, в частности, марксистская философия (думаю, что и сейчас так). Так мне рассказывали, что у них есть подпольная книжечка — тоненькая-тоненькая, в которой примитивно изложены все необходимые сведения: из философии, из истории партии и т.п., для того, чтобы сдать минимум. Это я считаю абсурдом — что музыканты вынуждены этим заниматься.

И. В.: Кстати, Постников в своей статье[3] написал так. Что, вообще говоря, не надо думать, что между математикой и гуманитарными науками вообще нет ничего общего, но у математиков еще как бы рука не поднялась на построение математических моделей для гуманитарных областей. А сейчас как раз мы видим, что уже очень поднялась, и даже, пожалуй, слишком.

К. Н. Н.: Иногда и слишком даже, но как раз со стороны гуманитариев никакого движения нет. Со стороны ученого гуманитария может услышать: "Ну, эта математика, эта ..., ничего не понимаю, вы уж извините". Т.е. для них это вполне прилично — вот так расписаться в полном непонимании математики, никто их за это не будет осуждать. Это считается приличным.

И. В.: Постников примерно так же и писал, что в среде культурных людей, например, не знать Баха нельзя, а не знать теорему Пифагора очень даже можно.

К. Н. Н.: Совершенно верно. Примерно так и случается. На самом деле, то, что они боятся, это понятно. Но они боятся потому, что действительно не знают. Для математики не совсем подходят традиционные университетские обороты "прослушал лекции", "прочитал курс лекций". Нужна большая муштровка, как для скрипача или пианиста. Помните в "Золотом теленке" рассказ о Паниковском, который до революции работал слепым? Он надевал зеленые очки, просил прохожего перевести его через улицу и при этом обирал его карманы. Городовому он платил 5 р. в месяц. Помните, что мимоходом сказазно про городового?

И. В.: "Теперь он музыкальный критик".

К. Н. Н.: Дело в том, что музыкальным критиком может быть всякий. Плохим,

[3] См. "Математическое образование", №2 за 1997 год.

конечно. Но болтать можно, что угодно. Вот Ильф и Петров поддели эту профессию таким образом. А начнешь болтать про математику — сразу же попадешь в просак. Кстати, Чернышевский этим и занимался.

И. В.: Т.е. можно ли так сказать, что некоторая неприязнь гуманитариев к математике просто вызвана опасением, что математики — люди с железной логикой — если в гуманитарных науках разберутся, то могут много болтовни обличить? Или тут что-то все-таки другое? А вдруг тут некоторый принцип дополнительности? Что например, человек имеет чуткость к музыке, а она в принципе не совместима с возможностью успешно заниматься математикой?

К. Н. Н.: Почему же, как раз музыка и математика совместимы. Есть математики одаренные в разных областях. И в области живописи, например Ландис[4] очень хорошо рисовал. Но гуманитарии боятся математики понятно почему, потому что не знают ничего. Потому что здесь не обойдешься без некоторой школы. Школу же надо пройти.

Гуманитарные науки представляются для математиков непознаваемыми в силу своего невероятного объема. Но математики часто очень самонадеянны, и, что-нибудь узнав, нисколько не стасняются показаться невеждами.

И. В.: Смотрите, какой получается интересный момент. Ведь математика, она, в принципе, открыта. Скажем, история в некотором смысле гораздо труднее, потому что прямой проверке не поддается. Математика же открыта для любого человека, будь то технарь или гуманитарий. Тем не менее математики свою активность постоянно проявляют, то историю хотят переписать, то в политику ударяются, то еще что-нибудь. А действительно, движения гуманитариев в сторону математизации нету.

К. Н. Н.: Есть письма Чернышевского сыновьям, в которых он рассуждает про естественные науки, в том числе и про математику, про четырехмерное пространство, про геометрию Лобачевского. Это выглядит очень не серьезно.

И. В.: Еще, видимо, вот что влияет. Математика — это то место, где ни одного шага без знания не делается. Каждый шажок требует конкретного знания и учения.

К. Н. Н.: Наверное, да, а потом можно, конечно, пускаться в философские рассуждения, когда у тебя очень крепкий фундамент есть за душой. Есть число, а рассуждать что такое число — так Кириллов[5] может рассуждать, потому что он все знает.

И. В.: Да, и видно, на каком уровне. А когда ребенок 5-го класса рассуждает про число — ничего и не видно.

К. Н. Н.: Да, ничего серьезного и не видно. Для школьника не специальной школы нужна, по-моему, логически незавершенная концепция числа, как расширяющегося понятия: числа бывают натуральные, целые, дробные, затем радикалы; есть число пи, про которое сказано без доказательства, что оно иррациональное, но не выражается через радикалы, а что все это значит, неизвестно. Для непрофессионала этого достаточно.

И. В.: А многие гуманитарии, видимо, имеют представление о числе на уровне

---

[4] Е. М. Ландис — профессор кафедры дифференциальных уравнений МГУ.

[5] А. А. Кириллов "Что такое число?", Москва, "Наука", 1992 г.

5-го класса примерно.

К. Н. Н.: У меня был друг в школе, так он на дух не принимал отрицательньные числа, ничего не мог понять совершенно. А что касается комплексных, так это вообще было ужасно.

И. В.: А может, можно сказать, что отношение к математике разделяет людей на некоторые психологические типы?

К. Н. Н.: Трудно сказать. Я думаю, что и внутри математики много различных психологических типов. Тут трудно вот что. Трудно отличить две разные вещи. Действительно, есть разные психологические типы, а есть люди, у которых очень разное прошлое. Если ребенка с детства запугали математикой, то он будет всю жизнь считать, что у него другой психологический тип. Это примерно тоже самое явление, что запугивание отсутствием музыкального слуха.

Очень многих людей убедили, что у них нет музыкального слуха. Один мой знакомый всю жизнь был уверен, что у него нет никакого слуха, его в этом убедили. А в прошлом году он вдруг увлекся гитарой, сейчас уже достиг приличного уровня, и у него оказался абсолютный слух. А он этого даже не знал. У него произошел прорыв, а многие так и остаются всю жизнь в неведении о себе. Можно услышать: “Нет, нет у меня слуха, нет, я в этом ничего не понимаю”. А сам отличает хорошую музыку. Наверно есть действительно люди, у которых нет слуха, но их гораздо меньше, чем можно предположить.

Я думаю, что с математикой так же. Однажды была статья в газете о том, что в школах нужно разрешить не изучать математику.

И. В.: Строго говоря, разрешали иметь до трех двоек в аттестате.

К. Н. Н.: Я говорю своим ученикам: “ Зачем мучить математикой человека, который все равно ее никогда не поймет. Есть люди, которые совсем не понимают математики.”

А мне мои ученики говорят: “Нет таких людей и быть не может, тут дело совсем в другом. Есть школьники, которых с детства запугали. Им говорили что-то непонятное, а они так и поняли, что они никогда ничего не поймут. Вот они запуганные так и ходят всю жизнь.”

Вот поэтому, когда вы говорите, что есть два типа, то тут надо еще разобраться. Может быть и есть два типа, но они могут быть замаскированы совсем другими проблемами. Которые и должны решаться математическим образованием.

Как живет-умирает наша страна

Опыт решения прикладной проблемы в рамках учебного курса “Концепции современного естествознания”

Часть I.

Модель открытой неравновесной системы

В. А. Дементьев, профессор Института Экономики и Предпринимательства

В первой части статьи языком, доступным для старших школьников, разъясняется полезная универсальная модель открытой неравновесной системы. Показано, как можно использовать ее для анализа процессов, происходящих в живых организмах. Во второй части статьи, в следующем выпуске журнала, предполагается провести анализ потоков, проходящих через некоторые открытые неравновесные системы, в том числе через нашу страну. Эта часть потребует более серьезной физико-математической подготовки читателя (примерно в объеме вузовского курса термодинамики). Наконец, в третьей части автор сформулирует некоторые практические выводы и рекомендации, вытекающие из проведенного анализа.

Задача

Различные умники пытаются понять, что происходит сейчас в нашей стране. Многие из них склоняются к мысли, что этого понять вовсе нельзя. Однако не оставляют усилий, и кое-что даже вырисовывается. Метания эти не новы. Очень ярко их выразил Ф.И. Тютчев. Сначала он сказал общеизвестное, повторяемое нами даже с некоторой гордостью:

Умом Россию не понять,
Аршином общим не измерить.
У ней — особенная стать,
В Россию можно только верить.

Но через десять лет итогом нелёгких размышлений явилось мало известное и нецитируемое:

Куда сомнителен мне твой,
Святая Русь, прогресс житейский.
Была крестьянской ты избой,
Теперь ты сделалась — лакейской.

Здесь отражена точка зрения философа, примыкавшего к русскому космизму, государственника, поэта. Однако страна, особенно наша, столь крупная и сложная система, что с одной, даже очень выгодной точки зрения, она видится лишь очень однобоко. Что-то цельное можно разглядеть, только собирая вместе увиденное с разных точек.

Попробуем и мы поразмышлять, используя доступную нам точку зрения естествоиспытателя. Постараемся удалиться на такое расстояние, чтобы увидеть и понять самые общие процессы и тенденции развития страны, а затем воспользуемся достигнутым пониманием для анализа интересующих нас частностей.

Метод решения задачи

Договоримся, что значит — понять нечто сложное и непонятное. Это значит сказать — на что более знакомое и понятное оно похоже в своих проявлениях. Это более понятное и знакомое называется моделью. Если мы знаем, почему модель ведёт себя так-то, то нам может показаться, что поведение другой системы определяется похожими причинами. А это уже дает возможность не только понимать, но и предсказывать поведение ранее непонятной системы на основе опыта общения с уже понятным.

Естествознание выработало ряд столь удачных моделей, что на них оказываются похожи самые несхожие по своей природе реальные объекты. Со школьной скамьи всем известна такая модель, как материальная точка. В рамках этой модели можно описать, понять и предсказать орбиту планеты, спутника, кометы; траекторию пули, мячика; падение и торможение в воздухе человека с парашютом или без. Говорят, что такая модель обладает большой широтой области применения. Можно сказать, что она в некотором смысле универсальна.

Поставленную выше задачу мы постараемся решить, рассмотрев одну замечательную своей универсальностью модель. Она носит название **открытая неравновесная система**. Эта модель была первоначально разработана в технической термодинамике для описания работы химических реакторов, таких, как доменная печь, мартен, вагранка, нефтеперерабатывающее производство, завод по производству удобрений. Затем оказалось, что открытая неравновесная система очень похожа на любой живой организм. Дальше — больше. Сложная экологическая система живет по биологическим законам, но если не присматриваться к конкретным событиям в лесу или в море, то окажется, что любая экосистема живет и по законам открытой неравновесной системы. По этим же законам живет вся биосфера нашей планеты. Отдельно взятая страна — тоже открытая неравновесная система. И не только потому, что она неотъемлемая часть биосферы. Просто многие процессы в стране происходят по тем же законам, как в домне, как в любом живом организме. Это дает нам право, рассматривая столь несхожие системы, говорить про них кратко - живой организм, а не повторять каждый раз длинное и строгое название модели.

Так, мы постепенно введем в рассмотрение все неотъемлемые черты, свойства и законы, по которым живет любая открытая неравновесная система, любой живой организм. При этом мы будем проверять, проявляются ли эти черты, свойства и законы в жизни любой страны. Это и даст нам право перенести на страну в целом законы, действующие в хорошо уже изученной модели открытой неравновесной системы. Тогда мы и увидим, что согласуется с такими законами и, следовательно, идет на пользу стране, а что и кто пытается делать вопреки таким законам и, следовательно, вредит развитию страны. А может быть, помогает умиранию страны.

Чисто внешние признаки живого организма

Любой живой организм представляет собой *сложную систему.* Под *системой* мы понимаем нечто такое, чьи отдельные части тесно связаны и сильно влияют друг на друга. В сложной системе таких частей или элементов системы очень много. Настолько много, что даже перечислить их все трудно. В то же время по отношению к остальному миру система ведет себя, как единое целое. Мы замечаем, что любая система чётко отделена от внешнего мира границей. Наличие границы — это первый обязательный внешний признак системы. Любой живой организм отделен от внешнего мира чётко выраженной оболочкой. У зверя это шкура, у растения — кора, у отдельной клетки — мембрана. В древности бытовал способ казни — содрать с живого человека кожу.

Любая страна очерчена своей границей. Граница может быть устроена поразному. Это может быть непроницаемый Железный занавес, Великая Китайская стена, а может быть и никак не обозначена, как между Швейцарией и Германией. В последнем случае граница чётко очерчена в сознании этносов. Швейцарцы знают, что вот там живут уже не они, а немцы. И немцы знают, что вот там живут уже не они, а швейцарцы, то есть такие неприятные люди, чьи мужчины постоянно видят себя мобилизованными на охрану своих границ и держат дома каждый своё оружие и обмундирование до старости.

Наличие границы и большого числа элементов внутри еще не делает систему сложной. О сложности системы мы судим по сложности ее поведения во внешнем мире. Мы считаем систему *сложной*, если с трудом можем предсказать ее реакцию на внешнее воздействие.

Жестяная банка, содержащая газ, ведет себя просто, если ее нагревать или мять. И это при огромном числе молекул газа. Настолько просто, что ее поведение можно описать уравнением Менделеева-Клапейрона

$$pV = (m/\mu)RT. \quad (1)$$

А вот живой организм со своим огромным числом клеток и органов на внешние воздействия может реагировать весьма странно. Попробуйте измерить температуру кошке на морозе и в тёплой комнате. Получится одно и то же. И это настолько надёжно, что биологи ввели умный термин — гомеостазис. Это значит, что теплокровное животное пользуется механизмами, позволяющими им защищать все находящееся под шкурой от влияния внешней среды, сохраняя параметры системы неизменными. Но до поры до времени. “Кошка на раскалённой крыше” ведет себя столь непредсказуемым образом, что за описание ее поведения берётся уже не биолог, а драматург.

Любая страна содержит очень большое число жителей и проявляет черты очень сложного поведения. Иногда даже без видимого внешнего воздействия какая-то страна сходит с ума и начинает метаться хуже кошки на раскалённой крыше. Такое принято в банановых республиках, где революции и перевороты вошли в норму. А иная страна бывает невозмутима, когда весь окружающий мир раскалён. Как Швейцария во время Мировой войны.

Итак, ни кошка, ни страна не могут походить на запаянную банку, но они могут и должны иметь нечто общее друг с другом. Запаянная банка непроницаема в своих границах, она не обменивается с внешним миром своим содержимым. А любой живой организм обязательно обменивается. Для этого граница живого организма содержит в своем устройстве особые элементы, называемые *портами*. Это входы и выходы, через которые организм что-то получает из внешнего мира и что-то выделяет во внешний мир. Говорят, что через живой организм проходит *поток* вещества или энергии. А чаще всего поток вещества проносит с собой и поток энергии.

В случае животного или растения это внешнее свойство просто бросается в глаза. Животные потребляют пищу и выбрасывают экскременты. Многие верят, что животное для того и питаются, чтобы черпать из пищи необходимую для жизни энергию. Это, конечно так, но этим роль пищи вовсе не исчерпывается. Далее мы выясним истинную роль питания. А пока заметим для примера, что растения всасывают из почвы влагу и выбрасывают ее через листья в атмосферу.

В случае реакторов картина потоков проявляется очень наглядно. Домна сверху получает массы руды, кокса и флюса. С коксом приходит энергия. В нижней своей части домна выдает раскаленный чугун и шлак. Поток вещества и энергии через домну непрерывен.

В случае страны эта картина может быть наглядной, а может быть и завуалированной. Страны, живущие нормальной жизнью, имеют морские и воздушные порты, а также сухопутные пропускные пункты в границе для обмена товарами с другими странами. Через порты идут потоки вещества в виде товаров. Иногда это энергоносители, тогда явно виден поток энергии из страны или в страну. Ненормальные страны окружают себя непроходимыми границами. Но даже такая страна никак не похожа на железную банку, хотя и отгорожена от других Железным занавесом. Любая страна снабжена широченным портом — над страной есть небо. Через этот порт страна получает поток солнечной энергии. Через этот же порт страна отдает в атмосферу или прямо в космос свое тепло. Далее мы выясним, что этот поток важнее всех других. Но об этом потом.

Таким образом, чисто внешний признак любого живого организма — это наличие связи с внешним миром с помощью потока вещества и/или энергии через открытые порты. Отсюда и происходит термин **открытая система**.

Кое-что из внутренних признаков живого организма

Вооружимся самым грубым прибором (термометром, манометром) и заглянем внутрь открытой системы, когда через неё проходят какие-то потоки. Мы обязательно обнаружим, что показания прибора окажутся разными в разных областях этой системы. Мы также обнаружим, что показания прибора внутри окажутся не такими, как снаружи. И это при том, что система открыта. Но ничего удивительного в этом нет. Поток через систему потому и проходит, что есть различия в температуре или в давлении между разными областями системы и внешнего мира. Это могут быть и какие-то другие параметры системы, значения которых в разных частях системы различны.

Например, поставим аккумулятор на зарядку. Конструктивно это может быть наглухо закрытая коробка или банка. Но и у аккумулятора есть порты. Это клеммы, с помощью которых мы его присоединяем проводами к электрогенератору. Аккумулятор превращается в открытую систему, через которую проходит поток электрических зарядов (электрический ток). Причина возникновения потока — разность потенциалов на клеммах аккумулятора.

Еще пример. Возьмем трубу и проткнем ею плотину пруда ниже уровня воды. Естественно, через трубу пойдет поток воды. С помощью манометра можно убедиться, что на одном конце трубы давление воды выше, чем на другом конце. Разница давлений и есть причина возникшего потока. В самой трубе давление также неодинаково, оно падает от одного конца к другому.

Система, в разных частях которой параметры одинаковы, называется *равновесной*. В такой системе ничего, в сущности, не происходит. Такова запаянная банка с газом. Система, в разных частях которой параметры неодинаковы, называется *неравновесной*. В такой системе возникают потоки. Движение потоков через неравновесную систему и составляет внутренний признак жизни в этой системе. А может быть, и сущность, и смысл жизни именно этой системы.

Итак, любой живой организм представляет собой *открытую неравновесную систему*. Нас будут интересовать только **сложные открытые неравновесные системы**. Их мы и будем условно называть живыми организмами. Но иногда мы будем прибегать к простым открытым неравновесным системам, подобным водопроводной трубе, с которой нам всё ясно, чтобы прояснить какие-то процессы в сложных системах.

Убедимся на некоторых примерах, что любой живой организм или страна представляет собой открытую неравновесную систему.

Возьмем любое теплокровное животное. Пусть это будет северный олень, бегущий по снежной равнине. Подушечки на ступнях оленя имеют температуру ниже нуля. Внешняя меховая поверхность шкуры холодная. В брюхе у оленя температура 40 градусов. Разность температур приводит к возникновению постоянного теплового потока из организма оленя наружу. Налицо неравновесное состояние организма.

Хладнокровное животное на первый взгляд находится в тепловом равновесии с окружающей средой. Но оно неравновесно по другим параметрам. Более тонкие приборы, чем термометр, покажут, что в различных точках такой системы концентрации веществ сильно отличаются, а уж с окружающей средой различия в концентрациях каких-то веществ разительны. Хорошо, когда яд находится в челюсти змеи, а во мне этого яда нет ни микрограмма. Тогда змея — живое существо само по себе, а я — сам по себе.

В любой стране происходят какие-то процессы, существуют какие-то потоки, как внутри между ее отдельными регионами, так и через порты. Состояние любой страны крайне неравновесно, потому-то в ней и бурлят разные процессы. В разных областях страны различаются: плотность народонаселения, концентрация средств производства и природных ресурсов, климатические условия, этносы. И уж обязательно на страну в целом падает поток солнечной энергии, а в космос уходит поток тепловой энергии.

Шаг назад — к закрытой изолированной системе. В ней смерть запрограммирована

Раньше мы сказали: Система, в разных частях которой параметры одинаковы, называется *равновесной*. В такой системе ничего, в сущности, не происходит. Такова запаянная банка с газом.

Всё это верно, но запаянная банка с газом не всегда такова. Можно закупорить банку в тот момент, когда по какой-то причине ее содержимое не находится в равновесии. И тогда в закрытой банке будет обязательно что-то происходить.

Положим на дно банки кристаллик иода, а потом банку закупорим. В банке всюду будет одинаковая температура и одинаковое давление. Но концентрации веществ распределены резко неравномерно. Весь иод содержится в кристаллике, а в остальном объеме банки заперт воздух. Состояние системы является неравновесным. Со временем это состояние будет меняться. Иод испарится и равномерно распределится по объему банки, смешавшись с воздухом. Пройдет процесс, называемый *диффузией*. Все концентрации выровняются, система придет в равновесное состояние, после чего и можно будет сказать, что в данной равновесной системе ничего не происходит. Обратим внимание на то, что процесс диффузии проходит сам по себе. Нам не нужно проникать через стенки банки и понуждать молекулы иода отрываться от кристаллика и равномерно смешиваться с молекулами воздуха. Всё произойдет само по себе. Дайте только срок, который в данном случае называется временем релаксации изолированной системы.

Процесс диффузии для нас в дальнейшем изложении будет очень важен, поэтому постараемся научиться отслеживать этот процесс и другие ему подобные процессы, приводящие неравновесную изолированную систему к равновесию. При этом хотелось бы следить за состоянием всей системы, а не за течением конкретного процесса. Для этого надо ввести подходящую функцию состояния системы.

Одна из функций состояния системы всем известна со школьных времен. Это энергия системы. Но в нашем случае окажется, что в процессе диффузии энергия всей банки никак не будет меняться в полном соответствии с законом сохранения энергии для изолированной системы. Нужна другая, более чувствительная функция.

Такая функция существует и пригодна не только для описания процессов в глупой закупоренной банке. Нам эту функцию придется все время использовать для анализа процессов в живых организмах. Так что и процессы в закупоренной банке нам нужны только ради прояснения более сложных процессов в живых организмах. Для этого и понадобилось сделать шаг назад — к закрытой изолированной системе.

Нужная нам функция называется энтропией. Энтропию S можно вычислить по определенной формуле, которая будет приведена во второй части статьи, требующей более углубленного владения курсом физики (вторую часть планируется опубликовать в следующем выпуске журнала).

Энтропию системы S имеет смысл подсчитывать только тогда, когда частицы в системе обладают способностью самопроизвольно двигаться, обмениваясь местоположениями и скоростями. В закупоренной банке молекулы газа как раз обладают таким свойством. Имеется огромное число таких перестановок частиц местами и обменов их скоростями, что внешний наблюдатель не заметит этих обменов. Ему будет казаться, что состояние системы не меняется из-за таких обменов. В таком случае говорят, что макроскопическое состояние системы может реализоваться множеством различных микроскопических состояний. Чем больше таких различных микроскопических состояний реализует данное макроскопическое состояние системы, тем бо́льшую энтропию имеет это макроскопическое состояние.

Полезно понимать, что нам не будет нужно точно вычислять энтропию системы при анализе ее поведения. Достаточно будет оценить, увеличится или уменьшится энтропия при каких-то событиях в системе.

Сравним два наблюдаемых нами макроскопических состояния закупоренной банки с воздухом и иодом:

Состояние 1. В воздухе иода нет. Он весь находится в пределах кристаллика. Молекулы иода в своем тепловом движении могут обмениваться местами, но только в пределах кристаллика. При этом мы ничего не замечаем. Кристаллик и кристаллик. Лежит себе на дне банки. А то, что различные молекулы иода могут поменяться местами и скоростями, нас совершенно не волнует. Молекула иода не может обменяться местами с молекулой газа. Если такое произойдет, то мы это сможем заметить с помощью какого-нибудь чувствительного прибора. И это будет уже не состояние 1, а какое-то другое состояние.

Состояние 2. В воздухе иод распределен равномерно, а кристаллик исчез, испарился. Теперь в своём тепловом движении молекулы иода могут поменяться местами и скоростями как друг с другом, так и с молекулами воздуха. При этом мы ничего не замечаем. Газ и газ. Заполняет всю банку. Но ясно, что число обменов местами и скоростями у молекул стало заметно большим, чем в состоянии 1.

Таким образом, энтропия банки в состоянии 2 больше, чем в состоянии 1. На данном частном примере мы убеждаемся, что изолированная система самопроизвольно переходит из неравновесного состояния в равновесное состояние, причем энтропия системы возрастает.

Но не следует думать, что такой факт является следствием конкретных условий данного эксперимента. Здесь проявился совершенно общий закон природы, касающийся любых замкнутых изолированных систем. Этот закон называется *вторым началом термодинамики*. Он утверждает, что любая замкнутая изолированная система самопроизвольно переходит из неравновесного состояния в равновесное состояние, причем энтропия системы возрастает. Убедимся ещё на одном примере, что этот закон выполняется железно, в чём бы ни выражалось отклонение системы от равновесия.

Заметим только предварительно, что интересующее нас **изменение** энтропии ΔS можно вычислить по достаточно простой формуле (примите пока ее на веру). Если в систему подается небольшое количество тепла ΔQ при абсолютной температуре T, то

$$\Delta S = \Delta Q/T. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим пример. Поместим в банку две одинаковых гирьки, одну горячую с температурой T_1, а другую холодную с температурой T_2 . Закупорим банку. Ясно, что её состояние не равновесно, ибо в разных местах температура различна. Но через некоторое время (время релаксации) банка придет в равновесное состояние. Энергия всей системы не изменится, так как система замкнута и изолирована. Горячая гирька, остывая до равновесной температуры, потеряет тепловую энергию $-\Delta Q$, а холодная гирька, нагреваясь до равновесной температуры, получит тепловую энергию $+\Delta Q$. Энтропия горячей гирьки уменьшится на величину $-\Delta S_1 = -\Delta Q/T_1$, а энтропия холодной гирьки увеличится на величину $+\Delta S_2 = +\Delta Q/T_2$. Энтропия всей системы изменится на величину $\Delta S = +\Delta S_2 - \Delta S_1 = \Delta Q(1/T_2 - 1/T_1) > 0$. То есть энтропия увеличится.

Рассмотренный во втором примере механизм перехода системы к равновесию называется *теплопередачей*. Это самопроизвольный процесс, как и диффузия. Нам не надо проникать через стенки банки и понуждать тепло переходить от горячей гирьки к холодной. Всё произойдет само по себе.

Теперь внимание! Нам в дальнейшем понадобится не только следить за подобными процессами в живых организмах, но и как-то интерпретировать наблюдаемые факты в терминах целей и ценностей, ибо у всех организмов есть какие-то цели. Вот мы и хотим предложить некую интерпретацию факта возрастания энтропии при переходе системы к равновесию. Мы считаем, что **ценность системы при возрастании её энтропии падает**. Иными словами, система, переходя к равновесию и увеличивая свою энтропию, портится.

Когда мы положили в банку кристаллик иода, мы в течение некоторого времени имеем возможность вынуть этот кристаллик, растворить его в спирте и получить небольшое количество вещества для смазывания ранок. В этом плане банка с иодом представляет собой некую ценность. Если же мы пропустим срок, иод испарится и равномерно смешается с воздухом. Система перейдет в равновесное состояние, а энтропия системы возрастет. Теперь банка с воздухом и примесью иода совершенно бесполезна. Иод из воздуха выделить почти невозможно.

Во втором примере ценность банки с горячей и холодной гирьками определяется тем, что мы можем присоединить к горячей гирьке один спай термопары, а к холодной гирьке — другой спай. По термопаре пойдет электрический ток, преобразуя тепловую энергию горячей гирьки в электрическую. А уж электрической энергией можно воспользоваться как угодно. Если же мы пропустим срок, система придет в тепловое равновесие, а то та же самая заключенная в системе энергия станет недоступной для такого использования, ибо термопара работает только при различных температурах спаев.

Рассмотренные простые примеры позволяют кое что понять в таком сложном явлении, как смерть. Поместим в закупоренную банку что-то живое. Получится неравновесное состояние замкнутой системы. По прошествии некоторого времени система придет к равновесному состоянию, энтропия системы возрастет, и ничего живого в банке мы уже не обнаружим. Процессы диффузии и теплопередачи сделают своё черное дело. Переход от жизни к смерти есть не что иное, как переход организма от крайне неравновесного к значительно более равновесному состоянию. Процесс этот самопроизвольный. Достаточно только изолировать организм от внешнего мира, а там уж все произойдет само по себе в полном соответствии со вторым началом термодинамики.

Снова шаг вперед — к открытой неравновесной системе. Почему она не умирает?

Теперь мы можем пристальнее всмотреться в процессы, происходящие в любом живом организме. Как только мы замечаем, что организм неравновесен, мы понимаем, что в нем непрерывно происходят самопроизвольные процессы, стремящиеся привести его к равновесию, к смерти. Это можно строго доказать.

Представим себе, что дельфин проголодался и решил погнаться за рыбкой. Ему придется на некоторое небольшое время закрыть все порты и нырнуть. На время погони дельфин превращается в замкнутую неравновесную систему, а значит, в нем сами по себе происходят процессы, стремящиеся привести его к равновесию. Эти процессы сопровождаются ростом энтропии дельфина, то есть он портится. В полном соответствии со вторым началом термодинамики. Естественно, дельфин принимает меры, чтобы не испортиться совсем. Он проглатывает рыбку, затем выскакивает на поверхность, открывает дыхало, выбрасывает отработанный газ и забирает свежий воздух, иногда выбрасывает в воду экскременты. То есть, снова превращает себя в открытую систему. Теперь обратим внимание на то, что за короткое время, пока дельфин пребывал в состоянии замкнутой системы, процессы в толще его массивного корпуса не могли мгновенно отреагировать на закупоривание и как-то существенно измениться. Значит, деструктивные процессы, приводящие к росту энтропии, происходят в толще корпуса дельфина постоянно. Второе начало термодинамики помогло нам только убедиться, что такие процессы с неизбежностью идут, как в любой замкнутой неравновесной системе. Но они идут и тогда, когда организм открывается.

Итак, в живом организме с некоторой скоростью проходят деструктивные самопроизвольные процессы. За малый промежуток времени Δt энтропия организма из-за протекания этих процессов возрастает на величину ΔS, то есть растет со скоростью $\sigma = \Delta S/\Delta t$. Величина s является важным показателем жизнедеятельности организма. Её называют *скоростью продукции энтропии* в системе. Или, короче, — *продукцией энтропии*. Чем больше σ, тем стремительнее организм портится, движется к смерти.

Однако, мы прекрасно знаем, что цель каждого отдельного организма — жизнь, а не смерть. В норме взрослый организм живет так, что с ним не происходит никаких существенных изменений. Такое состояние, когда никакие параметры организма не изменяются со временем, называется *стационарным*. Это очень важное состояние в жизни организма, о чем прекрасно знают современные дамы, которые пристально заботятся о постоянстве своего веса и линейных размеров.

Заметим, что в стационарном состоянии организма не меняются не только его макроскопические параметры, но и зависящие от этих параметров функции состояния. Не меняется энергия, не меняется энтропия.

Как же удается организму, в котором непрерывно продуцируется энтропия со скоростью σ, сохранять свою полную энтропию постоянной? Для этого есть единственный способ — выбрасывать наружу некоторое количество вещества или энергии с высокой энтропией, а из окружающего мира поглощать такое же количество вещества или энергии с низкой энтропией. Будем различать скорость внутренней продукции энтропии σ_i и скорость внешней продукции энтропии σ_e (*internal* — внутренняя, *external* — внешняя). Живя в стационарном состоянии, организм генерирует внутри себя энтропию со скоростью σ_i, а во внешний мир он выбрасывает и тем самым продуцирует вовне такую же энтропию со скоростью σ_e. Для организма все в порядке — сколько наросло внутри энтропии, столько он и выбросил вовне. Полная скорость изменения его энтропии

$$\sigma = \Delta S/\Delta t = \sigma_i - \sigma_e = 0. \tag{3}$$

Но для внешнего мира не все в порядке — сколько нагенерировал организм энтропии, столько ее и наросло во внешнем мире. Та часть внешнего мира, которая непосредственно контактирует с организмом, испытывает энтропийную нагрузку, прибывающую со скоростью σ_i. В соответствии с нашей интерпретацией, организм просто своей жизнедеятельностью портит внешний мир.

Теперь мы можем лучше понять роль пищи. Мы уже говорили, что снабжение организма энергией — не главная задача процесса питания. Главная задача — поставлять организму поток высококачественных продуктов и выводить из него поток испорченных продуктов. А задача организма в этом процессе — портить продукты питания. Только тогда для организма будет выполняться условие существования в стационарном состоянии (3).

Эту роль питания можно подтвердить ярким примером из биологии. На дне моря сидит на камешке простейший организм — губка. Ясно, что температура губки равна температуре окружающей воды. Поэтому ей не надо, как теплокровным организмам, отдавать наружу поток тепла и не надо для этого черпать энергию из пищи. Работы губка не совершает в общем никакой, ибо не перемещается и не пульсирует. Значит, и на это не надо тратить энергию. Но губка — живой организм с неравномерным распределением концентраций разных сложных веществ. Вот на поддержание этого неравновесного состояния и требуется поглощать из воды что-то ценное, а выбрасывать в воду что-то менее ценное. Для того губка и питается.

Ещё шаг вперед — к развитию открытой неравновесной системы

Мы вывели условие существования организма в стационарном состоянии (3). Сколь ни важно это состояние в жизни организма, но у него есть и другая цель — развитие. Во всяком случае, такая цель есть у любого рождающегося организма, ибо он должен дорасти до взрослого состояния и уже тогда перейти в стационарное. Есть и другая если не цель, то необходимость — деградировать и умереть. Выведем теперь условия развития и деградации живого организма.

С деградацией всё просто. Она произойдет сама по себе, как только организм станет выбрасывать наружу энтропию с меньшей скоростью, чем она продуцируется внутри. Когда $\sigma_i > \sigma_e$, тогда энтропия будет накапливаться с некоторой скоростью

$$\sigma = \Delta S/\Delta t = \sigma_i - \sigma_e > 0. \tag{4}$$

Вот с этой скоростью организм и будет деградировать. Условие (4) является необходимым и достаточным для деградации. А если условие будет сохраняться долго, то этого достаточно и для смерти. Организм сам себя окончательно испортит, ибо в нем самопроизвольно идут именно деструктивные процессы. В пределе, когда $\sigma_e = 0$, мы получаем замкнутую изолированную систему, а для неё второе начало термодинамики пророчит неминуемую смерть.

Недавно российский морской офицер подвергал матросов дисциплинарному наказанию в виде заключения провинившегося матроса в плотно закрывающийся железный ящик. Один из матросов в ящике умер. Интересно, учтет ли трибунал, что не умершие матросы, пройдя через ящик, тоже испортились, или офицер будет отвечать только за окончательную порчу одного матроса?

С развитием всё гораздо сложней. Конечно, нам теперь несложно догадаться, что в процессе развития организма должно быть $\sigma_e > \sigma_i$. Тогда в пересчете на единицу массы организма его энтропия будет уменьшаться с некоторой скоростью

$$\sigma = \Delta S/\Delta t = \sigma_i - \sigma_e < 0. \tag{5}$$

Сложность состоит в том, что это условие является необходимым, но не достаточным. Условие развития (5) может выполняться, а никакого развития не будет. Требуется дополнительный анализ, чтобы найти условия, которые обязательно приведут к развитию системы. И эти условия могут оказаться очень специфическими для каждой конкретной системы. Для того, чтобы найти эти особые условия, недостаточно проследить за поведением одной только величины σ. Необходимо проанализировать анатомию этой величины, а она, оказывается, определяется структурой потоков в системе и через систему. Кроме того, потенциальные возможности развития зависят от свойств элементов, входящих в систему. Следовательно, предсказать эволюцию сложной системы можно лишь на основе анализа всех потоков в данной системе при достаточно хорошем понимании свойств ее структурных элементов. Поэтому нельзя надеяться, что судьбы страны можно угадать как-то просто, с кондачка. Нужно очень углубляться и запасаться терпением.

В дальнейшем изложении сначала проанализируем анатомию потоков в различных простых и сложных системах, но не будем затрагивать роль элементов систем. На этом материале мы проясним сформулированные выше *необходимые условия* развития нашей страны. Затем на примерах некоторых сложных систем обсудим роль свойств элементов и получим возможность сформулировать некоторые *достаточные условия* развития. Будем двигаться постепенно и начнем с анализа сравнительно простой системы, где имеется всего лишь один поток. Но эта система для нас важнее многих других.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Подписаться на журнал можно в редакции по адресу: 117419, Москва, ул. Донская, д. 37, комн. 333.

Стоимость подписки в 1998 году – 40 рублей в каждом полугодии (включая стоимость пересылки).

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается **для журнала "Математическое образование", январь – июнь 1998 г., или(и) июль-декабрь 1998 г.**

Реквизиты для перечисления (с 1 января 1998 г.):

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Лефортовском ОСБ 6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044525342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 20 руб. (новых).

Контактные телефоны: (095) 237-36-09, (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.

Факс: (095) 362-82-56

Адрес для корреспонденции Фонда: 111250 Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, кв. 69.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно с распечаткой. Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I.Shafarevich. Selected Themes of Algebra, Chapter IV 2

V. Palamodov. Lectures on Integral Geometry and Computer Thomography 22

V. Prasolov. Four Notes on Geometry 34

The Summer Camp "Integral" of the Volgograd Region 52

A Problem (to be continued) 68

Our Interview: N. Konstantinov on Mathematical Education 69

V. Dement'ev. How Does this Country Live and Die 85