ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№40

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

Москва, 2007 г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

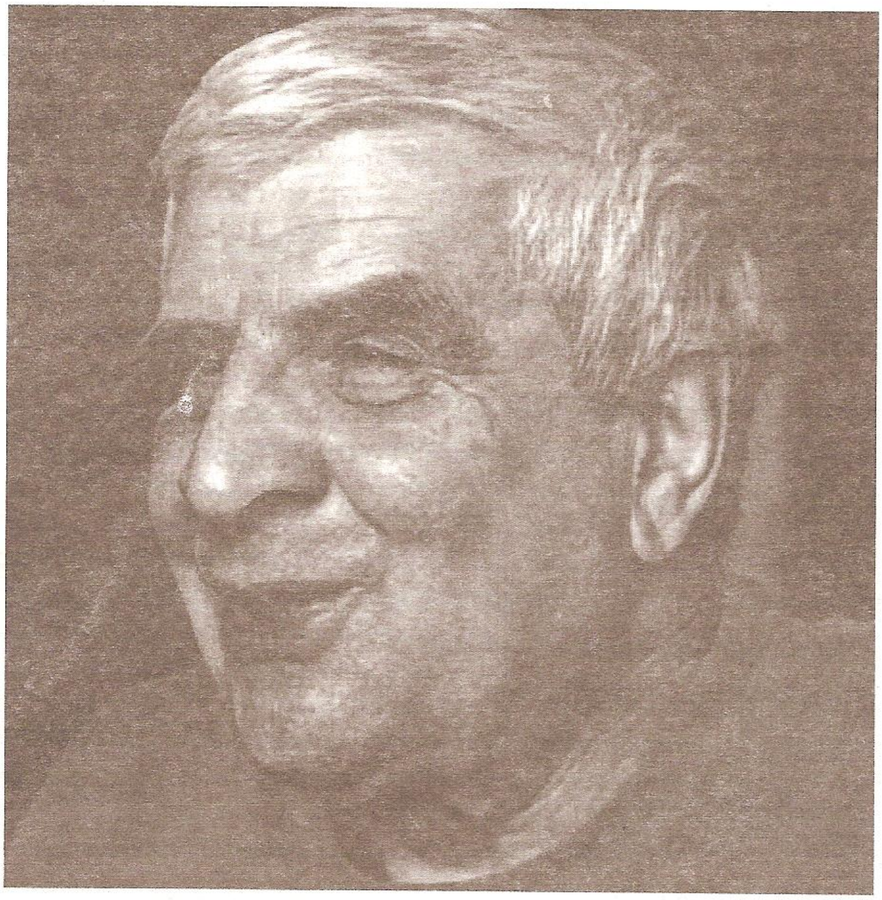
Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 40, 2007 г., специальный выпуск

Москва

От редакции



2 января 2007 года исполнилось 75 лет Николаю Николаевичу Константинову, выдающемуся деятелю российского математического образования, члену редколлегии нашего журнала. Редакция поздравляет Николая Николаевича с юбилеем и желает ему крепкого здоровья и новых творческих успехов!

Предлагаемый вниманию читателей специальный выпуск журнала посвящен этому юбилею (материалы к 70-летию Н. Н. Константинова см. "Математическое образование", №1(20), 2002 г.).

Рубрики настоящего номера отражают определенные этапы жизни и деятельности Н. Н. Константинова.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 40, специальный выпуск, 2007 г.

Номер посвящен 75-летию Н. Н. Константинова

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2007 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 20.02.2007 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Биография Николая Николаевича Константинова

Краткую биографию записал С. А. Дориченко со слов Н. Н. Константинова.

Константинов Николай Николаевич родился 2 января 1932 года в Москве. Его отец — потомственный почетный гражданин России, мать — грузинская дворянка.

С 1941 по 1943 год жил и учился в городе Елабуге Татарской республики в эвакуации. В 1943 году вернулся в Москву в родную школу и окончил ее в 1949 году с золотой медалью. В том же году, ещё школьником, провел свою первую математическую олимпиаду для учеников своей школы. Будучи комсомольцем, работал пионервожатым в своей школе, сохранив с некоторыми из своих пионеров дружбу на долгие годы.

В 1949 году поступил в МГУ им. М. В. Ломоносова на физический факультет. Студентом начал работу по ведению физических и математических кружков, что стало его основной деятельностью на многие годы. В 1950 году был заместителем председателя Московской физической олимпиады. В 1953/54 учебном году, сам являясь студентом, провел свой первый семинар для студентов мехмата МГУ.

В 1954 году окончил МГУ (с отличием). С 1954 по 1959 год работал ассистентом на кафедре математики физического факультета МГУ. С 1959 по 1963 год был аспирантом, сначала на кафедре логики мехмата МГУ у А. А. Ляпунова, а затем в Институте Теоретической и Экспериментальной Физики (ИТЭФ) у А. С. Кронрода, после чего защитил кандидатскую диссертацию.

С 1963 года работал в одной из лабораторий ИТЭФ старшим научным сотрудником до разгрома лаборатории в 1968 году, после чего короткое время работал в институте патентной информации начальником электронно-вычислительной машины “Раздан” (тогда это была машина с самой большой памятью среди советских машин).

В 1968 году в соавторстве с В. В. Минахиным и В. Ю. Пономаренко создал компьютерную программу, моделирующую движение кошки, и мультипликационный фильм, полученный в результате работы программы. Для задания динамики программой решались дифференциальные уравнения. Это был, по-видимому, первый случай использования таких уравнений движения при создании компьютерной анимации, и авторы обогнали свое время. (Работа “Программа, моделирующая механизм и рисующая мультфильм о нем” была опубликована только в 1974 году в журнале “Проблемы кибернетики”, вып. 28).

С 1969 по 1988 год работал в Институте экономики АН СССР старшим научным сотрудником. В 1988 году перешел в координационный научно-методический совет “Зодиак”, где работал несколько лет ученым секретарем.

Основал Независимый Московский Университет (НМУ), и в настоящее время является членом попечительского совета НМУ, членом попечительского совета Московского Центра Непрерывного Математического Образования, работает в Московском Институте Открытого Образования и в 179-й московской школе.

С 1962 года по настоящее время работал, с небольшими перерывами, в ряде школ Москвы: №7, №57, №91, №179. С 1967 года в течении ряда лет участвовал в работе летнего стройотряда на Беломорской биологической станции (ББС) МГУ, в результате чего возникла традиция: группы учеников из математических школ Москвы приезжали на ББС для участия в работе стройотряда.

Организовал для школьников эстонские летние трудовые лагеря, которые существовали до объявления независимости Эстонии.

В начале 70-х годов Н. Н. Константинов был организатором заочного кружка для участников Всесоюзной математической олимпиады, работавшего под эгидой журнала “Квант”.

В 1979 году организовал многопредметный Турнир имени М. В. Ломоносова для старших школьников (начиная с 7-го класса), председателем которого является по настоящее время.

Начиная с 1967 года, участвовал в работе жюри Всесоюзной математической олимпиады (до 1980 года), обычно был старшим по какому-нибудь классу.

В 1980 году организовал Международный математический Турнир городов, президентом которого является по настоящее время. В первом Турнире, проходившем по инициативе Н. Н. Константинова (Москва), А. К. Толпыго (Киев) и А. В. Анджанса (Рига), участвовали школьники Москвы и Киева, а А. В. Анджанс участвовал в составлении задач. Сейчас в Турнире Городов участвуют школьники более чем 100 городов из более чем 20 стран мира. Общее население этих городов около 100 млн. человек, общее количество участников турнира — около 10 тыс. ежегодно, общее число учащихся, награждаемых наградами Центрального жюри – около 1000 ежегодно. Примерно две трети всех городов и всех участников приходится на Россию. Турнир городов является ассоциированным членом World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC) — Международной федерации национальных математических соревнований. Н. Н. Константинов является членом правления этой организации — ее представителем в Европе.

Российская математика в последние десятилетия прославилась на весь мир, а Турнир Городов прославил российскую математику среди школьников.

В 1989 году Н. Н. Константинов организовал международную Летнюю конференцию Турнира Городов для наиболее успешно выступивших победителей Турнира городов в 9 и 10 классах, председателем жюри которой является по настоящее время.

В 1988 г. Н. Н. Константинов был председателем жюри Балканской олимпиады, проходившей в Болгарии, а в следующем году — членом жюри этой же олимпиады, проходившей в Алма-Ате.

В 1992 и 1998 годах был членом жюри Международной математической олимпиады соответственно в Москве и Мар-дель-Плате (Аргентина).

Награжден медалью Поля Эрдеша “For his significant contribution in developing the “Tournament of the Towns” Contest in Russia” (1992 г.)

Является заслуженным Соросовским учителем. Награжден почетной грамотой Московской городской думы “За заслуги перед городским сообществом” (2002 г.)

Лауреат конкурса “Грант Москвы” в области наук и технологий в сфере образования (2004 г.).

Является членом Редакционного совета журнала “Квант”, членом редколлегии непериодического выпуска “Математическое Просвещение”, членом редколлегии журнала “Математическое образование”, членом Editorial Committee изданий Mathematics Competitions, Enrichment series (Australian International Centre for Mathematics Enrichment).

Член Московского математического общества, член (по секции применения математики к биологии) Московского общества испытателей природы (основано в 1805 году).

Среди трудов Н. Н. Константинова — две работы по теоретико-множественной геометрии, одна работа по информатике, более десятка работ по математической экономике и несколько статей, посвященных преподаванию математики (включая конкретные курсы математического анализа для учащихся математических школ).

Кошечка

Почти 40 лет назад, в 1968 году группа под руководством Николая Николаевича Константинова создает математическую модель движения животного (кошки). Машина БЭСМ-4, выполняя написанную программу решения обыкновенных дифференциальных уравнений, рисует мультфильм “Кошечка”, содержащий даже по современным меркам удивительную анимацию движений кошки, созданную компьютером. Мы публикуем введение из статьи “Програма, моделирующая механизм и рисующая мультфильм о нем”, Н. Н. Константинов, В. В. Минахин, В. Ю. Пономаренко, *Проблемы кибернетики*, 1974, выпуск 28, с. 193-209 (по материалам web-сайта www.etudes.ru), а также фрагменты обсуждения этой работы из журнала “Компьютерра”: см. Л. Левкович-Маслюк, Прибытие “Кошечки”, а также его интервью с Н. Н. Константиновым “Знает ли кошка, что она не настоящая?”, №07 (627), 21 февраля 2006 г.

1. Введение к статье “Программа, моделирующая механизм и рисующая мультфильм о нем”

При моделировании механизма полезно иметь возможность получать изображения различных состояний механизма. При этом удобно использовать такой способ задания формы механизма, при котором информация о его положении в данном состоянии и информация о его устройстве были бы разделены. Это требование вполне естественно. В человеческом языке такое разделение имеет место. Скажем, слова “моя кошка” обозначают определенный предмет. При этом ничего не сказано о позе кошки. Можно сказать, что мы стремились к такому способу задания информации о форме предмета, чтобы все, что относится к понятию “кошка вообще”, было отделено от информации о положении и позе кошки в данный момент.

Практическим признаком того, что информация обладает указанным свойством, является то, что становится просто и удобно задавать машине законы движения механизма. В случае кошки информация о ее походке и траектории, т.е. сценарий ее движения, задается совершенно независимо от информации о форме. Нужно только, чтобы в описании формы присутствовали переменные, о которых говорится в описании движения. Требования, которые мы предъявляем к информационной системе, можно сформулировать так: это должна быть такая система задания информации о предмете, пользуясь которой легко писать программы, которые выдают мультфильм о предмете по самым разнообразным сценариям.

Наша работа задумана как пробный шаг в направлении создания программ, моделирующих механизмы, и не преследовала никаких целей, кроме опробования некоторой системы задания формы предмета с точки зрения вышеуказанных требований. Мы задаем программе строение тела кошки и законы ее движения и получаем мультфильм (некоторые кадры приводятся на рис. 1), на котором кошка делает несколько шагов, постепенно замедляясь, поворачивает голову и останавливается. Подбирая уравнения, определяющие походку, мы заботились только о внешнем благополучии, а не о том, чтобы описывать истинные физиологические механизмы управления. Но наша программа может быть полезна и для физиологов. Если мы имеем гипотезу о механизме походки, которую мы можем записать в виде дифференциальных уравнений (как правило, второго порядка) относительно переменных, участвующих в описании позы кошки, то мы можем с помощью нашей программы посмотреть, как эта гипотеза работает (о гипотезах см. [5,6,7])[1]. Принятая система задания информации удобна для механизмов, являющихся

[1] Здесь и далее имеется в виду библиография к указанной статье. — *Прим. ред.*

шарнирными системами, состоящими из твердых частей. С известным приближением такой системой является молекула. Программу, подобную нашей, можно применять для визуализации гипотез о строении и работе молекул при химических реакциях (см. [2,3]).

Интересно провести опыт использования программ, рисующих мультфильм, в качестве вспомогательной техники при создании художественных мультфильмов. Работу над одним монтажным куском длительностью от 10 до 30 сек можно представить себе так. Художник-математик должен записать действующих лиц этого куска в виде нашей или подобной информационной системы, а их движения в пределах этого куска — в виде дифференциальных уравнений. Затем машина печатает бумажную ленту — “папирфильм”. После этого художники рисуют по папирфильму мультфильм. Таким образом, по-прежнему зритель увидит руку художника. Смысл же всего этого в том, что моделирование движения сделано машиной - это как раз та часть работы, с которой человек справляется плохо (сошлемся на одного из мультипликаторов — [1]; для того чтобы нарисовать танец лягушки, он заснял танец настоящей балерины и, используя этот фильм как модель движения, рисовал по нему фильм о лягушке).

В качестве рисующего устройства использовалась широкая печать — АЦПУ-128. Градация яркости не применялась, и качество изображения сравнительно невысокое. Но большее и не требуется при нашей системе задания формы предметов — рисунки производят неприятное впечатление, если качество передачи формы на бумаге выше, чем качество информации о форме. Когда передача на бумаге приблизительная, воображение зрителя восполняет недостающие детали именно так, как нужно, и впечатление от рисунков получается приличное. Еще лучше выглядит фильм в движении, так как моделирование движения имеет более высокое качество, чем моделирование формы. Зритель получает много "хорошей" информации, и восполнение недостающего облегчается. Интересно, что многие зрители после просмотра фильма не помнили, что изображение было просто теневой проекцией. Изображения, приведенные на рис. 1, прежде чем попасть на страницы этой книги, прошли следующие стадии:

1. на папирфильме, выходящем из АЦПУ-128, проекция кошки остается белой, а весь остальной фон выбит некоторой буквой (бралась буква Ш как самая черная);

2. кадр фотографируется; на негативе — черная кошка и серый фон;

3. серый фон убирается вручную с целью придания этим рисункам более высокого качества как полиграфической продукции.

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского университета. Отладка программы и ее эксплуатация проводились в Вычислительном центре Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина.

Дальнейшее содержание:

1. Что такое брусок
2. Кошка как дерево или формула
3. Немного о некоторых технических деталях
4. Чтение дерева
5. Моделирование движения кошки
6. Координация движения различных лап

2. Из статьи "Прибытие кошечки"

...вполне возможно, что две базовые для анимационных технологий идеи были впервые реализованы именно в этом фильме, причем задолго до их появления в мэйнстриме.

- *Представление трехмерной пространственной формы в виде иерархической структуры данных. Структура напоминала октодерево (octree), задающее любую пространственную форму так: в нулевом приближении это куб, содержащий наш объект, в первом приближении — совокупность кубиков половинного размера, содержащая объект, и так далее. "Кошечка" задавалась более экономичной, адаптивной иерархией "брусков" (усеченных пирамид), аппроксимирующих ее торс, ноги, усы и т.д.*

- *Задание траекторий движения тела при помощи дифференциальных уравнений.*

Певая из идей, при всей ее важности (Мэттью Уорд даже выделяет октодерево как отдельный этап в истории компьютерной графики, относя его к 1982 году — четырнадцать лет спустя после "Кошечки"), все-таки кажется мне принципиально более простой в придумывании и реализации, чем вторая. Легко представить, что в "фольклоре" подобные методы к тому времени уже существовали (другое дело, что авторы не были связаны с этим только возникавшим тогда сообществом и сами изобретали все с нуля). А вот вторая идея значительно глубже концептуально и сложнее технически. Современные обзоры по моделированию движения человека для целей анимации (обзоров, посвященных специально кошкам или другим животным, я не нашел) относят первые работы такого типа — анимацию ходьбы на основе решения уравнений прямой или обратной кинематики и динамики — к началу или середине 80-х. В биомеханике, без всякой связи с компьютерной анимацией, первые попытки (двумерного!) моделирования движения человека на основе задач оптимизации, приводящих к дифференциальным уравнениям, делались в начале 1970-х[2]. Вполне возможно, что подобные исследования велись в момент создания "Кошечки" и в робототехнике. Рекорды и приоритеты дело тонкое, и я бы не хотел сейчас всерьез углубляться в эту тему. Но из литературы совершенно очевидно, что вплоть до начала 80-х основной технологией компьютерной анимации оставались те или иные формы интерполяции между кадрами, различные варианты морфинга и т.п. — вещи, принципиально более простые, чем реалистичное матмоделирование живого движения, примененное в "Кошечке".

3. Из интервью "Знает ли кошка, что она не настоящая"

Как проходила работа?

- Мы работали втроем, я и два моих соавтора, Володя Пономаренко и Виктор Минахин (кажется, они тогда еще были студентами мехмата МГУ). Идейную сторону в основном разработал я: как записать информацию о форме и как моделировать движение. Главная идея моделирования была очень проста и очень естественна для человека, который знает физику. Она состоит в том, что следует использовать дифференциальные уравнения второго порядка, — ведь животное управляет мышцами, то есть его система управления оперирует ускорениями.

Уравнения вы заимствовали из работ по биомеханике?

- Нет, мы сами вывели нужные уравнения — это сделал Виктор Минахин. Сначала он пытался написать уравнения, наблюдая за движением кошки. Но кошка же непослушная, она не станет по команде медленно ходить перед вами снова и снова. Поэтому Минахин решил записывать свои собственные движения.

То есть как?

- Очень просто — он ходил по комнате на четвереньках и замечал, какие мышцы когда включаются. Делал шаг, застывал — и думал, тщательно анализировал свою динамику. К

[2]Computer Animation of Human Walking: a Survey (1999), Franck Multon, Laure France, Marie-Paule Cani-Gascuel, Gilles Debunne, citeseer.ifi.unizh.ch/539332.html.

счастью, за миллионы лет, что люди ходят на двух ногах, они не забыли, как ходить на четвереньках. Уже потом, после окончания работы над фильмом, я некоторое время посещал семинар на мехмате МГУ, где глубоко исследовалась механика ходьбы. Над этим работали крупные ученые — семинаром руководил Дмитрий Охоцимский, очень активно изучал эти вопросы Сергей Фомин. Но нам для фильма было достаточно лишь внешнего правдоподобия. Мы его добились именно за счет использования дифференциальных уравнений при моделировании, хотя уравнения были, конечно, слишком грубыми для более сложных задач, например медицинских. Сейчас Минахин работает в Москве в Научном совете по проблемам кибернетики. Пономаренко увлекся буддизмом и постепенно ушел из “контактной области”, никто из моих знакомых не знает, где он и что с ним.

Какова была техническая сторона создания фильма?

- Разработка программы, включая математическую часть, заняла несколько месяцев. Каждый отладочный расчет проходил относительно быстро, за вечер. Между прочим, эта программа послужила своего рода тестом на корректность работы БЭСМ-4. Мы считали на разных экземплярах этой машины, в разных институтах, и оказалось, что некоторые машинные коды на них интерпретируются по-разному. В таких случаях мы просто переписывали куски программы и работали дальше.

Присутствуя при рождении (с точки зрения учителя). Часть I

С. Г. Смирнов

Н. Н. Константинов стоял у истоков организации математических классов в Москве. Эта сторона его деятельности, а также атмосфера и стиль преподавания, царившие в математических классах, хорошо отражены в первой части статьи Сергея Георгиевича Смирнова, известного ученого и просветителя, активного участника многих образовательных мероприятий для школьников. Печатается с разрешения автора по тексту, вывешенному на web-сайте "Второшкольная газета", www.sch2.ru/gazeta/n1/smirnov.php

Часть первая

Для меня все началось осенью 1960 года, — когда я за компанию с одноклассниками пришел в старое здание МГУ на Моховой улице и попал на первое сборище математического кружка, руководимого Н. Н. Константиновым. Нам тогда было по 14-15 лет — и мы, конечно, не замечали, что в стране началась революция, которую потом назвали "Хрущевской оттепелью". Хотя догадаться было можно — например, по небывалому разнообразию новых математических кружков и по массовому наплыву школьников к этим родникам самодеятельного просвещения. На первое сборище к Константинову явились человек полтораста, — и даже к концу учебного года в кружке оставалось около 30 активистов. Это был знак Судьбы: народ готов в дорогу и ждет вождей! Важно не упустить этот момент!

Разные просветители сделали разные выводы из этого наблюдения. Кто-то в Кремле задумал глобальную реформу школьного образования: продлить срок обучения с 10 до 11 лет, дав каждому выпускнику рабочую специальность! Николай Николаевич Константинов не входил в число кремлевских мечтателей — он входил в дружину учеников А. Н. Колмогорова и потому задумал свой проект реформы "снизу". Ведь можно объявить профессиональной ориентацией старшеклассников не только столярное или чертежное дело, но и новое ремесло "оператора ЭВМ"! Под таким флагом можно резко расширить школьную программу изучения математики. А она и так неплоха: например, комплексные числа и пределы монотонных последовательностей изучались тогда во всех школах СССР, с большим или меньшим успехом. Если еще удастся завлечь в школу настоящих ученых, под именем "мастеров профессионального обучения" — тогда получится Революция в Образовании! Угадав эту перспективу, Н. Н. Константинов (ННК) начал выращивать в своем кружке будущих революционеров; мы оказались в роли первых подопытных кроликов.

Будучи не вундеркиндом, а овощем позднего созревания и учась в хорошей московской школе №103, я попал во "вторую волну" Константиновской реформы. Теперь его кружок стал массовым — и для поддержания высокого качества обучения ННК запряг в работу "аксакалов" из первой волны, успевших освоить азы Математического Анализа за первый год обучения. Ося Бернштейн, Волик Фишман, Леня Макар-Лиманов, Лида Гончарова — все эти ребята принимали решения задач по Анализу из уст своих ровесников (вроде меня) или школяров на год-два моложе себя. Так математическая семья Константинова разделилась на старших и младших братьев, синхронно обучающих друг друга. При этом одни постигают Математику, а другие уясняют себе, КАК ее нужно преподавать. Эта система оказалась на редкость эффективной: через два года, к осени 1962-го, я дозрел до поступления на мехмат МГУ. Но права такого я еще не имел — как и большинство моих ровесников. Ибо годом раньше нам объявили: в школе вы будете учиться 11 лет! Кто не хочет такого счастья — пусть переходит в вечернюю "школу рабочей молодежи"; там срок обучения остается прежним.

Мне моя школа нравилась, превращаться в студента я не торопился. Но последний школьный год получился недогруженным — и кто-то надоумил нас, что после двух лет учебы у Константинова мы можем посещать любой СТУДЕНЧЕСКИЙ семинар! Я выбрал себе Топологию — как оказалось, на всю жизнь. Пришлось, скрипя зубами, прогрызаться не только через "Восемь лекций по Анализу" А. Я. Хинчина (как советовал Константинов), но и сквозь "Очерк основных идей Топологии" Болтянского и Ефремовича, опубликованный в журнале-ежегоднике "Математическое Просвещение". Зато в итоге я многое понимал на обоих семинарах по топологии — у П. С. Александрова и у Д. Б. Фукса. Первый из них был академик, второй — еще только аспирант, но научный уровень обоих был одинаков. Самым именитым и активным участником семинара у Александрова был старый А. С. Кронрод (прямой учитель Константинова), а у Фукса — молодой В. И. Арнольд, аспирант Колмогорова и (вместе с ним) лауреат Ленинской премии за решение одной из проблем Гильберта. Я, конечно, об этом еще не знал — но уже чувствовал, каково сидеть за одним столом с Арнольдом (в роли слушателя) и каково рассказывать решение какой-нибудь задачи о Канторовом множестве Александрову. Вот в такой среде совершилось за три года мое посвящение в математики. А как насчет посвящения в учителя?

Тут судьба столь же уверенно вела меня, куда надо, — но я брыкался, желая сохранить и подчеркнуть свою независимость. В первый студенческий год (1963-64) я работал ассистентом сразу в двух кружках — у Эммы Шкундиной и у Лени Вассерштейна (позднее ставшего в США известным алгебраическим геометром). Почему не у Константинова и не в одной из новорожденных физматшкол? ННК меня к себе не звал — вероятно, считая, что мне еще нужно перебеситься. Зато во Вторую Школу меня привел весной 64-го года Александр Александрович Кириллов — отличный математик и очень приятный человек. Но в школе мне тогда НЕ понравилось. Почему так?

Впервые попав на урок Анализа, который вели студенты, я сразу заметил там учебную РУТИНУ, — но не ощутил той учебной ПОЭЗИИ, которая была очевидна на кружке Константинова. Сидят себе тихие и серые школяры, о чем-то думают и временами пытаются рассказывать решения предложенных им задач, — как правило, косноязычные, незавершенные, логически дырявые и пестрящие ошибками. А мой долг — не только заметить эти ошибки, но указать на них ГРАМОТНО — так, чтобы школяр не впал от этого в депрессию, а наоборот — загорелся творческой злостью, еще и еще раз полез штурмовать непокорную задачу или стал прилежно шлифовать свой черновик удачного решения. Склонности к такому учительскому труду я на первом курсе не ощутил, — и мое переселение во Вторую Школу отложилось до осени 1966 года.

Что изменилось за это время? Во-первых, летом 1966 года отгремел Московский Международный Математический Конгресс, где я подвизался в роли нештатного переводчика (благо, я мог болтать на трех языках) и свел знакомство с некоторыми знаменитыми иностранцами, вроде Андре Хефлигера, Джона Адамса и Джона Милнора. При этом я впервые ощутил себя чем-то вроде аспиранта, — хотя серьезных самостоятельных открытий у меня не было до 1969 года. Вдобавок, я за три студенческих года сдал более 20 зачетов и экзаменов по математике. А ведь зачет или экзамен во многом похож на ДИАЛОГ школьника с семинаристом, обычный на уроке Анализа!

Притом, Судьба свела меня на 1-2 курсах с великим преподавателем Анализа — Владимиром Михайловичем Алексеевым, ровесником и другом Константинова, представлявшим "экстраординарную педагогику" в обязательной программе мехмата. За полтора года Алексеев убедил меня личным примером, что зачет или экзамен — это не редкий и грозный ПЕРЕРЫВ в рутинной чреде учебных семинаров. Наоборот: весь процесс изучения Анализа есть растянутый на годы Непрерывный Зачет, интенсивность которого возрастает раз в полгода — во время сессий. И это верно для всей математики — включая регулярные встречи студента с его научным руководителем! Для меня такой персоной стал Дмитрий Борисович Фукс — младший друг Алексеева и Константинова, старше меня всего на шесть лет. Проучившись у него Топологии три года, я стал морально готов к преподаванию Анализа или другой любезной мне математики очередному поколению школяров. Пусть они будут настолько же моложе меня, насколько я моложе Фукса, а Фукс моложе Константинова!

Так и вышло осенью 1966 года: я стал семинаристом Анализа в новонабранном математическом классе 9Г Второй Школы, где лектором стал Александр Львович Брудно. По основной профессии он был матерый программист — один из авторов языка АЛГОЛ, который тогда считался в СССР новинкой. При том, Брудно прекрасно знал и любил весь Анализ — включая Теорию Функций Действительного Переменного и Теорию Вероятностей. Лектор он был увлекательный и понятный, человек добрый и обаятельный — но для участия в семинарских занятиях времени у Брудно не было, да и сын его учился не в нашем классе. Оттого мы — шестеро студентов-семинаристов — оказались весьма свободны в научно-учебном диалоге с вверенными нам школьниками (числом около 30 человек). Класс этот оказался не шибко сильный, да и мы были не шибко опытны в новом деле; однако все наши питомцы стали потом достойными студентами разных вузов, а один из них — Михаил Буняев — дорос до профессора в МГПИ, пройдя там аспирантуру у Д. Б. Райкова.

Как стало возможным такое Образовательное Возрождение в СССР? Денежная цена его была невелика: начиная с 1965 года, преемники Хрущева свернули реформу массовой российской школы, и небольшая часть сэкономленных средств пошла на улучшение работы немногих "углубленных" школ. Большинство их сумело "углубить" (то есть, довести до приличного уровня) только изучение иностранных языков. Но некоторые умные директора школ успели завязать симбиоз с ведущими учеными близлежащих вузов или НИИ. Именно так поступил директор Второй Школы — В. Ф. Овчинников, историк по профессии и реформатор по натуре, отказавшийся от высокой партийной карьеры ради сохранения чистой совести в кругу единомышленников. Его главными партнерами на мехмате МГУ стали профессора И. М. Гельфанд и Е. Б. Дынкин.

Персона Гельфанда особенно важна: этот первый и самый яркий (наряду с В. И. Арнольдом) ученик Колмогорова еще в середине 1930-х годов оказался в числе руководителей ПЕРВОГО математического кружка для школьников при МГУ. Тридцать лет спустя Гельфанд был уже шефом самого авторитетного математического семинара в МГУ — и вот, он решил тряхнуть стариной, основав свою колонию в близлежащей толковой школе. Колмогоров тогда стал шефом физико-математического интерната №18 при МГУ — приюта для будущих Ломоносовых из российской глубинки. Кронрод и его ученики произвели сходный переворот в школе №7 (тоже на окраине Москвы), а Константинов с учениками захватил школу №57 в самом центре Москвы — в полукилометре от Кремля, на месте Опричного двора Ивана Грозного. Далеко от Москвы — в Новосибирском Академгородке возник свой математический интернат во главе с московским профессором А. А. Ляпуновым — отцом российской кибернетики. Ленинград, Киев и Харьков тоже не отстали от самодеятельной школьной реформы...

Но вот парадокс: новорожденные физматшколы быстро пожрали породившие их математические кружки! Самым простым путем — переманив к себе активнейшую часть школьников и самых талантливых учителей всех предметов. Когда эта стихийная сила завлекла во Вторую Школу и меня, более всего удивил меня тот факт, что среди четырех завучей школы есть только ОДИН математик: Нина Юрьевна Вайсман (и та пришла в один год со мною). Трое остальных: Герман Наумович Фейн, Наталья Васильевна Тугова и Зоя Александровна Блюмина — были яркие литераторы, причем Фейн перебрался во Вторую Школу из моей родной школы №103. Правда, я там у него не учился — на свое счастье. Ибо я с детства холоден к изящной словесности — и с удивлением заметил во Второй Школе, что многие математики питают к этой стихии иные чувства.

Тут пролег нечаянный эмоциональный барьер между мною и большинством прогрессивных учителей Второй Школы. Для них Литература — кумир, а для меня она — вполне терпимое излишество, как для них — Математика. Оттого я уважал многих своих коллег, некоторым из них симпатизировал, но своим человеком среди них так и не стал. В 1971 году эта сухость ума помогла мне пережить административный разгон команды Овчинникова без лишних эмоций — и успешно проработать в рамках Второй Школы еще 10 лет, до самого глубокого советского застоя имени Суслова и Брежнева. Но мне было легче, чем многим прочим: ведь с момента окончания аспирантуры МГУ в 1971 году ни школа, ни вуз не были для меня местом основной службы! Еще студентом я решил для себя основной вопрос педагогики: преподавание тех или иных вещей всегда будет моей ВТОРОЙ профессией, но никогда не станет ПЕРВОЙ. Любая Наука выше, чем педагогика этой науки — а Математика выше всех прочих наук! С тех пор прошло более 30 лет; я не изменил своих воззрений.

Итак, видно, что дикарем я тогда был порядочным — как и многие мои коллеги с мехмата МГУ. Другое племя "дикарей" составили учителя литературы и прочие гуманитарии Школы №2. А третье племя из совсем уж диких варваров сталинской выучки являли собою партийные администраторы народного образования в районном и городском масштабе. Как могли эти дикие племена ужиться в одной стране или в одной школе? Очень просто: в рамках жесткой феодальной иерархии!

Во главе стоял Король милостью Божьей — сиречь, директор Школы, В. Ф. Овчинников. Его окружали четыре министра-завуча; но даже все они вместе не смогли бы заменить монарха. Каждый из видных учителей предметников имел ранг Епископа — от Математики, Физики, Географии, Истории или Литературы. Понятно, что разные епископы считали друг друга еретиками и потому никакого Синода или Сената составить не могли. Кроме них, в Школе властвовали "внешние" герцоги и графы — то бишь лекторы Высокой Математики или Высокой Физики (как И. М. Гельфанд из МГУ, А. Л. Брудно из ИНЭУМ и В. П. Смилга с Физтеха). Каждый такой сеньор подбирал себе вассалов: баронов и рыцарей, которые вели семинары в отдельных классах, будучи аспирантами или студентами разных вузов — в основном, мехмата МГУ.

Кем ощущали себя на этом фоне школьники? Оруженосцами рыцаря? Или подмастерьями хитрого ремесленника? Пажами при сеньоре? Или крепостными при лихом барине? Всякое бывало! Тут очень многое зависит от межличностных отношений в феодальном клане. Я как-то сразу вышел в полные рыцари: мне и двум моим однокурсникам было поручено пестовать полкласса из 18 душ, разделив их на три равные группы, согласно нашим личным интересам и взаимным симпатиям. Втроем мы представляли все главные направления современной математики. Я как ученик Д. Б. Фукса воплощал Алгебраическую Топологию. Мой двойник — еще один Сергей Смирнов ("тонкий" — в отличие от меня — "толстого") — был учеником А. А. Кириллова и представлял Функциональный Анализ. Ира Сурина была ученицей И. Р. Шафаревича, — поэтому она отвечала за Теорию Чисел и Алгебраическую Геометрию.

На нас троих приходилось три премии Московской Математической Олимпиады. Это давало надежду, что при нужде мы сумеем решить любую каверзную задачу или ответим нечто разумное на любой вопрос изощренных школьников. Вдобавок, мы еще не забыли стандартную школьную программу — так что могли дать детям дельный совет по физике или химии, не ударить лицом в грязь при обсуждении очередной политической новинки. Впрочем, политики мы сознательно избегали. Такой дух укоренился на мехмате издавна: Наука, Политика и Жизнь суть отдельные сферы, смешивать их вредно. В 1950-е годы это мнение было абсолютной истиной, в 1970-е опять стало ею. Напротив, 60-е годы казались неким просветом во мраке бытия: многие соблазнились заглянуть в сей просвет, — но немногие пожелали залезть в это оконце и построить там бравый новый мир. Историк Овчинников и окружившие его литераторы сделали это, а математические графы, рыцари и епископы охотно поселились в новом мире, догадываясь о его эфемерности, но не испытывая от этого больших страданий. Этот смелый пессимизм (или скептицизм?) удачно выражен в средневековом киргизском эпосе "Манас":

"Прежде чем я сойду
в огненное море, что льется в аду —
я на тебя, такой-растакой, нападу!"

Почему же мы — математики — столь неожиданно и прочно преуспели в постройке Нового Мира там, где шедшие впереди нас гуманитарии потерпели поражение после первых ярких успехов? Конечно, это не наша личная заслуга: на нас работала научно-техническая революция 20 века. Именно она побудила диковатого тирана Сталина восстановить в 1930-е годы классическую дореволюционную гимназию, заменив в ней Закон Божий — Марксистской Моделью Истории. В ответ университетские математики изобрели систему кружков и семинаров с увлекательными задачами для студентов и школьников — и пленили таким путем несколько поколений возродившейся российской интеллигенции. В 1945 году ядерно-ракетный бум побудил того же Сталина дать свободу рук верхушке российских физиков в перестройке высшего образования россиян. Так возник Физтех в Москве, а физические олимпиады охватили все университетские центры России и даже ее глубинку — через систему физико-математических интернатов.

Высшая математика не могла не процвести в этих условиях. Н. Н. Константинов нашел оптимальный путь к такому процветанию, разложив курс Математического Анализа на 2-3 сотни задач, посильных каждому мотивированному школьнику. Именно так работали эллины во времена Фалеса и Пифагора — задолго до того, как Евклид смастерил из давно решенных задач великолепное здание Геометрии. Ибо красивая задача полезнее красивой лекции или красивой статьи: она пленяет своего ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ (ученика) в той же мере, как своего автора (учителя). Более того: всласть накушавшись лекций и нарешавшись хороших задач из рук учителя, толковый ученик неизбежно ставит СВОИ вопросы, изобретает СВОИ задачи в той же области — или в других областях науки.

Не случайно в 1964 году математик В. А. Успенский и лингвист А. А. Зализняк устроили в МГУ первую олимпиаду по сравнительной и структурной Лингвистике. Еще раньше, с участием математика А. А. Ляпунова и биолога М. Б. Беркинблита, возникли и развились олимпиады по Биологии, в которых полуподпольная у нас Генетика наконец-то нашла достойное место. Только История не смогла прорваться сквозь идеологические барьеры — до тех пор, пока не вымерло поколение динозавров, работавших под Сталиным. Лишь с началом Перестройки, в 1987 году конкурс увлекательных задач по Истории появился в рамках многопредметного Турнира Ломоносова, который был основан неутомимым Константиновым в 1978 году — во мраке и серости, после удушения великолепных физматшкол образца 1961 года. Но это случилось потом...

А мы осенью 1966 года начали многолетнюю игру в Математические Шахматы. Действительно, семинарское занятие по математике более всего напоминает сеанс одновременной игры в шахматы. Учитель или студент, не торопясь, переходит от одного школьника к другому, чтобы выслушать их недоуменные вопросы по задачам или определениям новых понятий — либо выслушать и оценить проект решения очередной задачи. Самый трудный случай — тот, когда школьник не умеет выразить словами или чертежом свои затруднения: либо потому, что он от природы косноязычен, либо оттого, что его математическая интуиция еще слабо развита. В том и другом случае моя задача — "разговорить" школьника, не позволяя ему впасть в блудословие, но, приучая выражать любую математическую истину или гипотезу в 1-2 фразах — пусть корявых, пусть неточных!

Лишь бы они облекли смутные мысленные образы математических объектов в общепонятные слова — подобно тому, как аппарат живой клетки превращает внутренний код ДНК в наблюдаемую химию белков. Но, увы: внутренний код мозга не имеет столь простой структуры, как ДНК и РНК! Оттого не всякого человека можно выучить математике — как и физике, и биологии, и шахматам. Собеседование — на уроке, или за шахматной доской, или за экраном компьютера — постепенно выявляет тех партнеров, у которых субъективный внутренний код мысли достаточно близок к объективному коду алгебры или геометрии, теории множеств или теории групп.

Пусть, например, некоему школьнику удалось построить верное ОТРИЦАНИЕ определения Непрерывной Функции. Что значит, что она РАЗРЫВНА в точке a? Выпишем определение непрерывности на "эпсилон-дельта-языке" — и последовательно заменим каждый квантор на противоположный ему! Такую процедуру нетрудно ОБОСНОВАТЬ логически; но как УГАДАТЬ заранее, что нужна именно ЭТА процедура? Кто способен на такую догадку — тот сделал первый удачный шаг в высшую математику вообще и в математическую логику, в частности. Накопив штук пять или десять таких самостоятельных догадок, молодой человек обретает устойчивый аппетит к решению ХОРОШИХ задач по математике, — то есть, к наращиванию новых слоев науки над тем субстратом, который ему преподали в школе и который он сам почерпнул из книг. Вот и получился новый математик...

Но ведь кто-то другой при этом исчез! Например, я забросил шахматы еще на первом курсе мехмата — когда понял, что соответствующее место в мозгу у меня занято более интересной работой. О каком месте идет речь? О том ли, где хранятся геометрические образы — так что шахматные конфигурации заместились у меня картинками из топологии? Или о том, где хранятся игровые алгоритмы — и это место у меня заполнили шаблоны диалогов со школьниками, сложившиеся на математическом кружке? Может быть, верно и то, и другое — и еще нечто третье, чего я не могу назвать, за неимением адекватных слов.

Чему мы научили нашу паству за многие месяцы учебно-игровых поединков? И чему мы сами научились в ходе долгих сеансов одновременной игры в Математику? Не забудем, что мы были в ту пору студентами и аспирантами, — так что попеременно вели игру с нашими учениками в Школе и с нашими учителями в Университете. Содержание обеих игр было во многом схоже. Так, я учил школяров решать задачи по Анализу и Общей Топологии (пределы последовательностей, непрерывные функции, замкнутые и открытые множества на прямой) — а сам учился у Фукса решать задачи по наглядной и алгебраической топологии гладких многообразий. Аппетит приходит во время еды: став аспирантом и получив свой первый заметный научный результат (классификация сферических узлов в многомерном торе), я возжелал устроить в школе свой семинар по Топологии. Это случилось в 1969 году — на втором цикле моей преподавательской деятельности в Школе №2.

Класс мне тогда достался яркий: в нем были такие разные звезды, как Леня Чарный, Саша Хаинсон, Игорь Кострикин, Наташа Новикова и Алеша Гоманьков. Двое первых, не довольствуясь нашими семинарами, посещали также лекции С. Г. Гиндикина в соседней параллели — и правильно делали, ибо он был уже матерый лектор, а я в этом деле был новичок. Саша запомнился мне еще и тем, как он “уел” меня в задаче о последовательности периметров НЕПРАВИЛЬНЫХ вписанных многоугольников. Всегда ли такая последовательность имеет пределом длину окружности? Оказывается, НЕТ! Даже если многоугольники — выпуклые, число их сторон растет, и длина наибольшей стороны стремится к нулю — все равно, контур многоугольника может прижиматься к ОДНОЙ ТОЧКЕ на окружности! Век живи — век учись; результат известен. Не часто мне доводилось ставить школьникам пятерки за такие красивые победы над Господином Учителем!

Игорь Кострикин — умный и уравновешенный парень — унаследовал от отца (крупного алгебраиста и четкого профессора, будущего декана МГУ) немалую долю педагогического здравого смысла. Помню его нечаянную фразу, обращенную к соседу по парте: “Саша, ну постарайся ты хоть на математике рассуждать строго!” Больших последствий этот призыв не имел: не каждому попавшему в ряды ФМШ-ат удалось по-настоящему заразиться Математической Игрой, и бедный Саша покинул Вторую Школу. Игорь же благополучно закончил мехмат и аспирантуру у А. А. Кириллова; потом я утратил связь с ним — это обычное дело межу учениками и учителями...

Столь же устойчивая научная карьера получилась у Наташи Новиковой, — пожалуй, самой способной (в математике) из всех моих учениц во Второй Школе. Не отличаясь внешней яркостью, она отлично умела поддерживать равновесие среди своих различных увлечений — от математики до литературы, которой ее учила Т. Л. Ошанина (дочь известного поэта). Не диво, что все экзамены Наташа сдавала образцово — и успешно передавала образец такого поведения своим многочисленным подругам. Окончив школу в 1970 году, Наташа предпочла мехмату новорожденный тогда факультет Вычислительной Математики — и, видимо, была права. В аспирантуре она училась у Ю. М. Гермейера, а после его внезапной смерти — у О. Б. Лупанова, который (несмотря на внешнюю неброскость — или благодаря ей?) стал позднее долговременным и популярным деканом мехмата. После такой тройной школы Наташа поступила на работу в ВЦ АН — и там с годами уверенно доросла до доктора наук, вырастив при этом двух дочерей. Они, конечно, тоже поступили во Вторую Школу; старшая сделалась там учительницей. Так воспроизводится сословие ФМШ-ат!

Но самая оригинальная научная биография в том классе получилась у Алексея Гоманькова. Началась она задолго до нашего с ним знакомства — еще в 6 классе, когда юный Алеша познакомился на даче с соседом — палеонтологом С. В. Мейеном. Изначально он, конечно, Мейендорф — из пятого поколения “остзейских баронов”, ставших образцовыми российскими интеллигентами и случайно уцелевших в ходе революции. Огромная эрудиция и большое личное обаяние Мейена вовлекли Алешу в науку: он стал сперва геологом-кружковцем, затем профессиональным палеоботаником и нынче работает в лаборатории палеофлористики ГИН РАН.

К сожалению, Сергею Мейену судьба не подарила долголетия: он умер от рака в 50 лет, будучи самым ярким биологом-эволюционистом в СССР и одним из известнейших в мире палеонтологов. Подружившись с ним в 1971 году, я поныне считаю его своим вторым научным руководителем — или первым, за пределами Чистой Математики. При личном знакомстве выяснилось, что у нас есть общий ученик: Алексей Гоманьков, тогда уже студент геологического факультета МГУ. Он, оказывается, еще в школьные годы приучился пить научное знание сразу из двух родников — Высшей Математики и Эволюционной Биологии. Я освоил это трудное ремесло только после окончания аспирантуры в МГУ...

Со всем этим Алеша сочетал Православное Христианство — о чем я не ведал долгие годы! А если бы раньше догадался? Вряд ли это облегчило бы наше общение в Школе, ибо я — потомственный безбожник, нередко склонный к веселому богохульству. Много позже Алеша признался, что в моем присутствии он порою побаивается: как бы и его, со мною вместе, не поразила Божья молния! Я смог утешить Алексея лишь одним доводом: если Бог существует объективно (а не только субъективно — для тех, кто в него верует), то меня Он создал атеистом НАМЕРЕННО и своею волей направил во Вторую Школу. Значит, именно такой я Ему и нужен!

Оттого у меня с Алексеем никогда не возникало трудностей в сфере математики, — хотя искра божья нисходила на Алешу из уст Мейена, а не из моих. Но уж с Мейеном не мне равняться: он и мудрец, и праведник, и гений в науке! Позднее мне дважды удавалось завлечь С. В. Мейена во Вторую Школу, где он читал лекции для моих гвардейцев-математиков. Пусть они пообщаются с настоящим Энциклопедистом, прежде чем попадут в Университет! Пусть после этого ищут себе научных руководителей по образу и подобию школьному!

Заметим, что визиты Мейена во Вторую Школу происходили в конце 1970-х годов — много позже разгона инициативной команды Овчинникова, когда Гельфанд и прочие математические небожители перестали появляться в коридорах Школы. В такой среде уже и я чувствовал себя старым мамонтом и нередко гадал: неужто и этот класс — не последний в моей школьной карьере? Однако на всю застойную эру Брежнева меня хватило. Я ушел в 1982 году, никем не гонимый: просто не осталось для меня тайн в школьном курсе Высшей Математики, а в учительском коллективе почти не осталось интересных для меня партнеров. Зоя Михайловна Фотиева — последняя героиня Классической Математики — уже собиралась на пенсию; только Рудольф Карлович Бега казался неутомимым властителем дум в своем физическом кабинете. Он ведь работал во Второй Школе и ДО моего прихода туда, и ПОСЛЕ моего ухода — до своей безвременной смерти в начале нового тысячелетия. Как жаль, что ему не хватило оптимизма для написания мемуаров о своей учительской судьбе!

Смирнов Сергей Георгиевич,
ведущий научный сотрудник
Института информатизации образования,
кандидат физ.-мат. наук.

Как люди догадались, что из законов механики следуют законы Кеплера

Н. Н. Константинов

Это расшифровка видеозаписи лекции, прочитанной школьникам 16 марта 2003 г. Надеемся, что текст передает творческую атмосферу лекции. Видеозапись в формате avi распространяется на компакт-дисках, можно обратиться в книжный магазин МЦНМО, Москва, пер. Б. Власьевский, 11.

Наверное, все знают, что тогда возникла механика и математический анализ, и создателем обеих этих наук считается Ньютон. Ну это, наверное, правильно, но не совсем точно, потому что много народу (50 сильнейших ученых) приближались к тому, чтобы все это открыть. Конечно, здесь не только Ньютон работал, математический анализ создал, наверное, в такой же степени Лейбниц. В механике у Ньютона были предшественники.

И вот я хочу рассказать о том, как Роберт Гук раньше Ньютона сообразил, что из законов механики следуют законы Кеплера, причем он сообразил это тогда, когда законы механики ещё не были сформулированы. Он изложил свое открытие в некотором труде, и когда Ньютон всё открыл, то Гук сказал, что "вот, у меня уже всё есть", и Ньютон сильно обиделся. Вот о том, что же, собственно открыл Гук, я и хочу сказать!

Прежде чем начать рассказывать о его открытии, я хочу спросить аудиторию: "Давайте начнем с Коперника. Кто знает, что открыл Коперник и, вообще, в чем его заслуга перед наукой?" Правда, аудитория несколько большая и с ней трудно беседовать, поэтому давайте я сам скажу, что я за вас думаю. Я много раз спрашивал людей: "Что открыл Коперник?" — и, как правило, отвечают, что он открыл вот что. До Коперника думали, что Земля неподвижна, а солнце ходит вокруг Земли. А благодаря Копернику стали знать, что Солнце находится в центре Солнечной системы, а Земля вращается, во-первых, вокруг Солнца, а во-вторых, вокруг своей оси. Вот это Коперник доказал и в этом его заслуга. И так думают очень многие. Давайте я всё-таки проверю, есть ли среди вас люди, которые думают именно так, как я сказал? Ну не так уж много: дело в том, что, к сожалению, во многих книжках — популярных, детских, учебных именно так и написано. А на самом деле это не совсем так.

Во-первых, эту так называемую гелиоцентрическую систему мира, в которой Солнце в центре: в древности считали, что в центре Вселенной, но мы будем говорить по-нашему — в центре Солнечной системы, а планеты вращаются вокруг Солнца — придумали давным-давно. Это еще считалось идеей пифагорейской эры. Правда, пифагорейцы выражали эту идею в крайне туманной форме. Они говорили так: "В центре всего на свете находится огонь, и всё вокруг этого огня вращается". И можно было понимать, как хотите: либо считать, что огонь — это что-то такое мистически-духовное, либо, что это — просто Солнышко, и что вокруг него вращается, тоже догадайся как хочешь.

Но был такой ученый Аристарх, последователь Пифагора, он жил в третьем веке до нашей эры, который очень реально смотрел на вещи. И он, фактически, не только придерживался гелиоцентрической системы, но и правильно измерил размеры Земли и расстояние до Луны. Ну расстояние до Луны не очень постоянное, оно ведь в течение месяца изменяется. Так вот его число было как раз между этими наибольшим и наименьшим значениями расстояния, фактически он нисколько не ошибся. Ну и размеры Земли тоже были измерены достаточно точно. Он как-то пытался измерить расстояние до Солнца, но здесь он сильно ошибся. Вот почему. Он ждал момента, чтобы Луна была освещена ровно наполовину, т. е. находилась в первой четверти. А это означает, что угол между направлением на Луну, и направлением от Луны до Солнца — 90 градусов. Тогда нужно измерить угол между направлением Земли на Луну, и направлением Земли на Солнце. Нужно уловить такой момент, когда Солнце ещё не зашло, и рассчитать этот треугольник. Таким образом узнаем расстояние до Солнца. Это способ очень неточный, так малейшая ошибка в измерении угла (90 градусов) приводит к большим ошибкам в расстоянии. И Аристарх ошибся в 20 раз в меньшую сторону. А что это значит?

Кто знает, во сколько раз диаметр Солнца больше, чем диаметр Земли? (Следует ответ 108.) Ну да, правильно. Диаметр Солнца больше диаметра Земли примерно в 100 раз. А ещё нужно запомнить, чтобы лучше представлять Солнечную систему, что диаметр Юпитера в 10 раз меньше диаметра Солнца, а диаметр Земли ещё в 10 раз меньше. Но это не очень точные цифры. Теперь мы видим, что Солнце имеет какой-то размер на небе, а именно его размер полградуса. Значит, если мы знаем расстояние до Солнца, то можем сосчитать, каков размер самого Солнца. И если мы ошиблись в расстоянии в 20 раз, то мы и в оценке размера Солнца тоже ошибемся в 20 раз. Значит, Солнце больше Земли в 108 раз по диаметру, а Аристарх ошибся в 20 раз, значит, оценивая размеры Солнца, он тоже ошибся в 20 раз, и у него получилось, что Солнце не в 100, а только в 5 раз больше Земли. Он человек простой и сказал: "Я никогда не поверю, что такая громадина будет крутиться вокруг Земли. Она же в 5 раз больше! Чего это она будет крутиться вокруг какой-то там Земли???" И он твёрдо встал на точку зрения, что Солнце находится в центре планетной системы и все планеты вокруг него вращаются.

Казалось бы, эта система гелиоцентрическая, была известна уже в третьем веке до нашей эры, и уже у неё были очень квалифицированные защитники, но это не значит, что весь ученый мир эту систему принял. Поэтому когда Коперник написал свой труд, эта система не была общепринятой, её многие знали, но не было убеждения, что это так. И вот, что написал Коперник в своем труде.

Извините, я ещё одну вещь вспомнил. Вот однажды несколько физиков сидели вместе, академик один там был знаменитый, обсуждали за чашкой чая научные проблемы, и этот академик говорит: "Коперник был дурак. Что он говорил? Он говорил, что не Солнце вращается вокруг Земли, а Земля крутится вокруг себя и вокруг Солнца. Но ведь это зависит от точки зрения, от того, какую систему отсчета мы взяли за основу. Как же можно утверждать, что одна система отсчета истинна, а другая — ложна. Нет предпочтений. С какой стороны хочешь смотреть, так и получится, так же, как нельзя сказать, допустим, стол неподвижен, а я иду, это потому, что мы взяли систему отсчета, связанную со столом. А если взять систему отсчета связанную со мной, то я неподвижен, а стол идёт. Эти точки зрения равноправны, и утверждать что одна система отсчета правильная, а другая неправильная — просто бессмысленно". Вот что сказал этот академик. Ну, он человек такой резкий, сразу сказал, что Коперник был неправ. Этот академик просто не знал, что же именно утверждал Коперник. Он просто-напросто, видимо из школьного учебника, прочитал то, что там было написано. А я взял труд Коперника и прочитал, что там написано. Коперник писал вот что. Он говорил: "Я не утверждаю, что система, в центре которой находится Солнце, является истинной, я только говорю, что это система, в которой можно рассматривать движение". Можно рассматривать движение в системе Птолемея, где Земля находится в центре, которая была почти общепринятой, а можно рассматривать систему, в которой Солнце в центре. Так что Коперник ничего неверного не утверждал. Он лучше разбирался, чем нынешний его популяризатор. Кроме того, Коперник вообще не утверждал, что он что-то новое сообщает, он просто комментировал, обсуждал то, что он прочитал в старинных греческих книгах. Однако его выступление в защиту гелиоцентрической системы имело большое значение, поскольку он очень убедительно объяснял, насколько эта система лучше системы Птолемея.

Интересно, что против системы Коперника возражали некоторые великие астрономы. Был такой великий астроном Тихо Браге, кто интересуется астрономией, конечно, слыхал это имя. Он был против системы Коперника. Почему? Смотрите. Вот солнышко. А вот Земля вращается вокруг него. Мы с Земли наблюдаем в телескоп звёзды на небе. Если Земля вращается, то, глядя на какую-то звезду, мы должны замечать, что она колеблется, то влево, то вправо. Увидеть это очень сложно, потому что Земля ведь ещё и вокруг оси вращается, значит нужно очень точно поймать правильный момент. И это очень сложно, ещё и потому, что часов точных не было в то время. Но Тихо Браге был фанатиком точных измерений. И он действительно установил с той точностью, которая ему была доступна, что никакого вот этого колебания звёзд нет. Но теперь мы знаем, что оно есть, но точность нужна гораздо более высокая, чем та, которая была доступна Тихо Браге. То есть эти колебания тем меньше, чем дальше звезда, все звёзды оказались гораздо дальше, чем он предполагал. Так что против системы Коперника были вполне квалифицированные возражения и в то время.

Ещё в системе Коперника была одна нехорошая деталь. Все астрономы в те времена и раньше считали, что планеты двигаются по окружности, но это не совсем точно, поэтому астрономы придумали такую вещь, что они двигаются по двум окружностям одновременно, и эти окружности как бы накладываются друг на друга. И всё равно получалось неточно, так что в системе Коперника, при всём удобстве, всё равно были неточности. А неточности обнаруживались вот когда. Следует реплика из зала: "У Птолемея было больше проблем с этими циклами. Там всё было намного сложнее, поэтому Коперник хотел упростить вычисления". Да, вот это и был его главный аргумент, что в гелиоцентрической системе всё выглядит гораздо проще. Именно поэтому система Коперника произвела большое впечатление и стала очень активно обсуждаться. Но вот как обнаруживались неточности. Наблюдали движения планет. Вот идет Юпитер, идет-идёт, потом он начинает назад идти, вот какие-то у него сложные движения, вот тот момент, когда он начинает идти в другую сторону, или когда две планеты сходятся, проходят друг мимо друга. Эти все моменты можно рассчитать, и вот если получается, что фактическое движение не соответствует расчетному, то это очень не хорошо, ведь считалось так, что вся эта небесная механика, движение Солнца и планет — это некоторое совершенное создание божественное, оно не может быть приблизительным, должно быть абсолютно точным. И вот следующий шаг — это были законы Кеплера.

Ну, вот сейчас я перейду немножко к Кеплеру, а потом уже к Гуку. Вопрос к аудитории: "Поднимите руки, кто может сформулировать законы Кеплера?" Есть, не так уж мало. Тут было так. Сначала одна маленькая биографическая деталь. Тихо Браге был датчанин, он много лет работал в Дании, его очень любил король и даже подарил ему остров, на котором Тихо Браге построил обсерваторию, туда приезжали ученые, они все смотрели в телескоп. Но потом этот король умер и Тихо Браге вынужден был уехать. Его пригласил император Священной Римской Империи, столица которой была рядом с Прагой. Тихо Браге работал у этого императора, по-моему, всего два-три года и умер, он уже старик был. Император пригласил молодого Кеплера, он знал, что Кеплер — подающий надежды астроном.

И вот Кеплер, начиная с 1609 года, начал публиковать свои знаменитые законы. Возникло три закона Кеплера. Тот закон, который сейчас называется первым законом Кеплера, а тогда он был вторым, этот закон говорит о том, что планеты двигаются не по окружностям, а по эллипсам, причем эллипс может быть очень похож на окружность.

Кстати, кто знает (или не знает) определение эллипса? Эллипс — это такая линия, что для любой точки на линии, сумма расстояний до двух точек (фокусов) будет постоянной. Отсюда способ построения: вбивают два гвоздя, к ним привязывают шнурок, затем карандаш двигают так, чтобы шнурок был натянут. И карандаш рисует эллипс.

Ещё одно определение эллипса можно сформулировать так: если мы нарисовали окружность на плоскости, а потом плоскость равномерно растянули вдоль какого-то направления, то окружность перейдёт в эллипс.

А ещё определение вот какое: возьмем цилиндр и пересечем его какой-нибудь плоскостью, только чтоб она не была параллельна образующей цилиндра. В сечении получиться эллипс. Может получиться окружность, но окружность — это частный случай эллипса. Цилиндр — бесконечный.

И ещё одно определение скажу. Берем бесконечный прямой круговой конус и пересекаем его плоскостью. Но здесь вариантов больше. Если конус пересекается плоскостью по какой-то ограниченной фигуре, то это будет эллипс. Но может быть и не эллипс — если мы пересечем конус плоскостью, параллельной ребру, то получиться парабола. А если пересечем плоскостью, пересекающей обе половинки конуса, то будут две ветви гиперболы.

Это будут почти все определения эллипса, ещё только одно можно добавить, чисто аналитическое. Если у нас есть декартова система координат, и мы напишем такое уравнение $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = c^2$, a, b, c — какие-то числа, то множество точек, которое удовлетворяет этому уравнению, будет эллипсом. В общем, что такое эллипс — понятно.

У эллипса есть два фокуса. Если они очень близки, то эллипс почти не отличается от окружности. Большинство планет солнечной системы двигаются вокруг Солнца по эллипсам, которые очень близки к окружностям, именно поэтому долгое время не могли заметить, что движение происходит по эллипсам. Так вот первый закон Кеплера заключается в том, что планеты двигаются по эллипсам. Ну, там были ещё второй и третий законы, давайте я их сейчас пропущу, мы потом к ним вернемся, если будет время. Итак, благодаря законам Кеплера, появилась очень четкая система, которой раньше не было. Появилась точная картина того, как двигаются планеты. И тогда возникла следующая проблема: а почему они так двигаются? Дело в том, что тогда механики, как науки современной, ещё не было, а были только её самые начала. Архимед разработал статику, вы все знаете закон Архимеда — это закон рычагов. А вот динамики не было.

Первые движения в этой области были у Галилея. Он установил, например, что все тела, независимо от того, тяжелые они или легкие, падают с одинаковым ускорением, если им воздух не мешает. Галилей начал, но дальше, пока что, не было этой науки. И тут произошло очень важное событие. Я к нему и перейду. Это касается Гука. Ах да. Ученые стали думать, а почему планеты двигаются именно так? Кеплер тоже предположил, что, наверное, Солнце как-нибудь притягивает планеты. Но как притягивает, он не знал, и дальше дело не пошло. А Гук решил вот как. Он предположил, что Солнце излучает что-то такое, благодаря чему планеты притягиваются. Что — он не знал. Но он решил, что то, что Солнце излучает, наверное, пропорционально угловой площади. Что такое угловая площадь? Берем всю сферу небесную и проектируем на ту сферу, в центре которой находимся мы. Эта сфера имеет какую-то площадь. Вот какую часть этой площади занимает Солнышко? Это и есть угловая площадь. Угловая площадь обратно пропорциональна квадрату расстояния. Если Солнце приблизится в 2 раза, то угловая площадь увеличится в 4 раза, так как все линейные размеры увеличатся в 2 раза. И Гук решил, что надо предположить, что притяжение Солнца обратно пропорционально квадрату расстояния. Он предположил также, что ускорение планет пропорционально этой силе. И стал прикидывать, а как будут планеты двигаться, если принять эти предположения. И увидел, что получается что-то вроде эллипса. А это совершенно новый факт.

Гук сразу понял как это важно. Действительно, он находился в самый момент рождения основных идей механики. И он это написал. И вот я как раз хочу рассказать, что он, собственно сделал, и как это получилось. Но дело в том, что я точно не знаю, как он это сделал. Он это написал в некотором труде на латинском языке. Я этого труда не читал и латинского языка не знаю. Но ученые, историки, которые изучали труды Гука, прочитали его работу и почти ничего не поняли. Почему я так думаю? Я прочитал статью о Гуке в энциклопедии Брокгауза и Евфрона, и там написано про его работу, что в этой работе весьма туманно изложена идея всемирного тяготения. То есть люди, которые изучали эту работу, наверняка знали латинский язык, ничего более толкового не могли написать, чем то, что изложение туманно. Но Ньютон, который был современником Гука, он всё понял.

Я хочу рассказать о работе Гука не как историк, а как бы попробовать реставрировать ход мыслей, но на современном языке. Заметим, что все сейчас так делают. Кто сейчас цитирует Ньютона? Цитируют же не Ньютона, а тех математиков, которые работали через 200-300 лет после него. Сейчас несколько слов про Гука. Это английский ученый из бедной семьи. Его сначала хотели подготовить на священника, но он было очень ленив учиться, по крайней мере, был ленив учиться на священника. А его всё тянуло на всякие изобретения и на всякие штучки изготовлять руками. Например, он очень любил своими руками делать линзы для телескопов! Я знаю, что и сейчас есть такие любители, которые вытачиваю линзы руками. Причем точнейшие. Ну, он придумал много таких изобретений, не очень больших, но они до сих пор существуют. Например, впервые появились тогда спиральные пружины, которые сейчас используются в часах. Их изобрел Гук. Потом закон Гука, вы, наверное, знаете, что если надавить на какое-то тело, то деформация пропорциональна силе. Это тот же Гук. В это время Гюйгенс активно изобретал часы, и Гук оказывается тоже участвовал в изобретении часов. Так что он довольно много сделал. Мне кажется, что этот шаг от механики к Кеплеру — самое интересное.

Теперь я хочу рассказать, как это можно было бы сейчас объяснить. Идея вот какая. У нас центр тяготения, допустим, Солнце. Будем считать, что это — начало координат. И нарисуем декартову систему координат. Вот здесь находится планета. Планету будем считать точкой. Понятно, что в масштабах солнечной системы и Солнце и планеты можно считать точками. Планета имеет какую-то начальную скорость. Начальные координаты и начальную скорость, рис. 1.

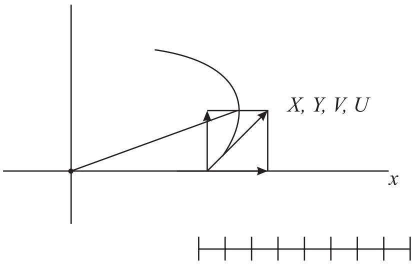


Рис. 1.

Рассчитать движение довольно сложно, поскольку, когда планета движется, то и расстояние меняется. И, тем самым, сила тяготения. Но хитрость состоит вот в чем. Давайте всё время, в течение которого происходит движение, разделим на маленькие равные отрезки. Например, отрезок — сутки, а может быть — час. Неважно. Важно, чтобы они были маленькие и равные. И сделаем некоторое предположение, что в течение промежутка времени, равного длине одного отрезка, сила, которая действует на планету, не изменяется. Конечно, это не верно и приведет к ошибке, но, как мы увидим, ошибка будет маленькой. Начальные координаты планеты: (x, y), т.е. мы знаем, где находится планета, и знаем её скорость. Скорость — это вектор.

Я немного поторопился, ведь планета двигается в трёхмерном пространстве, а я нарисовал плоскость. Имею я право? Тот вектор, который соединяет наше Солнце с планетой, называется радиус-вектор планеты. Вдоль этого вектора идёт сила притяжения. Движение планеты вокруг Солнца — это движение планеты в плоскости. Нет никаких сил, которые выведут планету из плоскости, которая проходит через радиус-вектор и вектор скорости.

Раз известны координаты, значит, известна сила тяготения, и по величине, и по направлению. Я предположил, что в течение этого промежутка времени сила тяготения не успела заметно измениться. Это значит, что в течение этого времени, сила, действующая на планету, всё время одна и та же. А ведь это есть не что иное, как свободное падение. Закон свободного падения мы знаем, можем всё рассчитать. При свободном падении тело двигается по параболе. Смотрите. Разложим вот эту скорость на две составляющие. Одна составляющая идёт вдоль радиуса, а другая — поперёк. Сила тяготения изменяет только ту составляющую, которая направлена вдоль радиуса. А другая составляющая от силы тяготения не зависит. Значит, тело будет двигаться с этой скоростью туда (вертикально), а движение в эту сторону (горизонтально) будет происходить по тем законам, по которым происходит равноускоренное движение. И таким образом, после этого промежутка времени, мы сможем рассчитать, где окажется тело (оно пойдет по параболе), и какая у него будет скорость. По тем же правилам. И вот, значит, мы знали в начале промежутка времени координаты и скорость, теперь знаем в конце этого промежутка координаты и скорость. А это дает нам возможность применить такие же рассуждения к следующему промежутку времени. И вот так шажками будем идти и делать. Гук шёл таким образом и увидел, что получается эллипс. А это уже открытие! Я не хочу выписывать все формулы, потому что тогда вас утомлю. Я сам их написал и раздам вам листок, где все они написаны. Там имеются два чертежа, где с разными начальными условиями проведен этот расчет.

Расчетная часть и рисунки из листка, розданного слушателям. Что такое скалярное произведение двух векторов? Это произведение их длин на косинус угла между ними. Если даны координаты векторов $a = (x, y)$, $b = (u, v)$, то скалярное произведение $ab = xu + yv$. Найдем проекцию V_r вектора скорости точки на радиус-вектор точки (планету мы считаем точкой): $xu + yv = RV \cos\alpha$ (R — радиус-вектор, его координаты x, y, V — вектор скорости с координатами u, v, α — угол между этими векторами). Но $V \cos\alpha$ — это проекция вектора скорости на радиус-вектор точки. Итак, $V_r = V \cos\alpha = (xu+yv)/R$. Вектор, перпендикулярный радиус-вектору и направленный против часовой стрелки, имеет координаты $(-y, x)$. Проекция

V_p вектора скорости на этот вектор равна $(xv - yu)/R$.

Предполагаем, что за время d величина и направление силы тяготения не изменились. Вычисляем радиальную b_r и касательную b_p составляющие скорости по прошествии времени d по законам свободного падения: $b_r = V_r - gd/R^2$, $b_p = V_p$.

При таких скоростях и ускорениях радиальный сдвиг

$$\Delta_r = V_r \cdot d - gd^2/2R^2,$$

сдвиг в перпендикулярном направлении

$$\Delta_p = v_p \cdot d.$$

Новый радиус-вектор в старой системе координат

$$x_1 = x(1 + \Delta_r/R) - y \cdot \Delta_p/R, \;\; y_1 = y(1 + \Delta_r/R) + x \cdot \Delta_p/R.$$

Новый вектор скорости (u_1, v_1) в старой системе координат

$$u_1 = x \cdot b_r/R - y \cdot b_p/R, \;\; v_1 = y \cdot b_r/R + x \cdot b_p/R.$$

Итак, найдены новые значения координат и скоростей, и можно продолжить расчет для нового промежутка времени длины d.

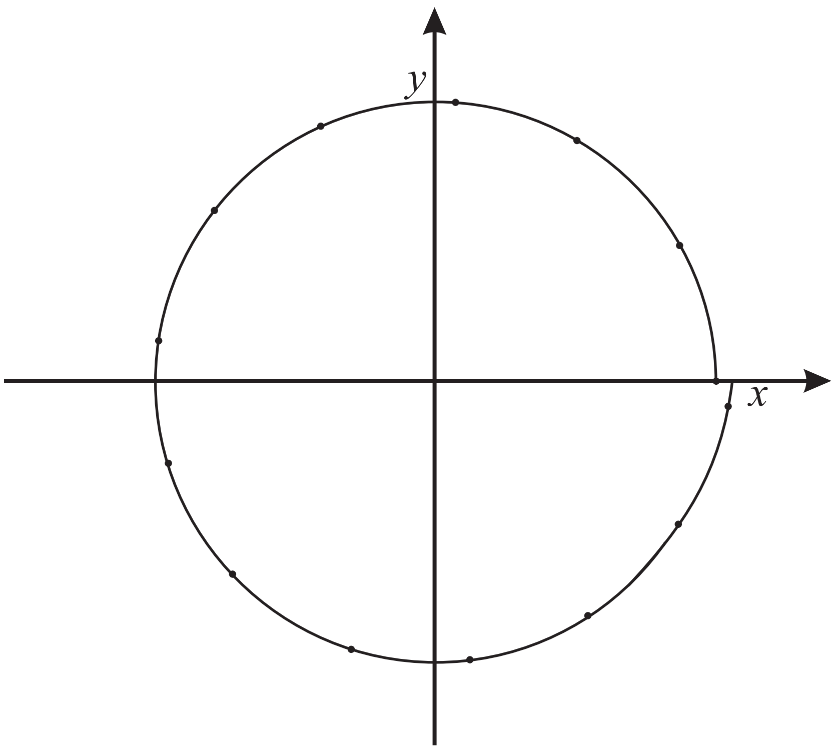


Рис. 2

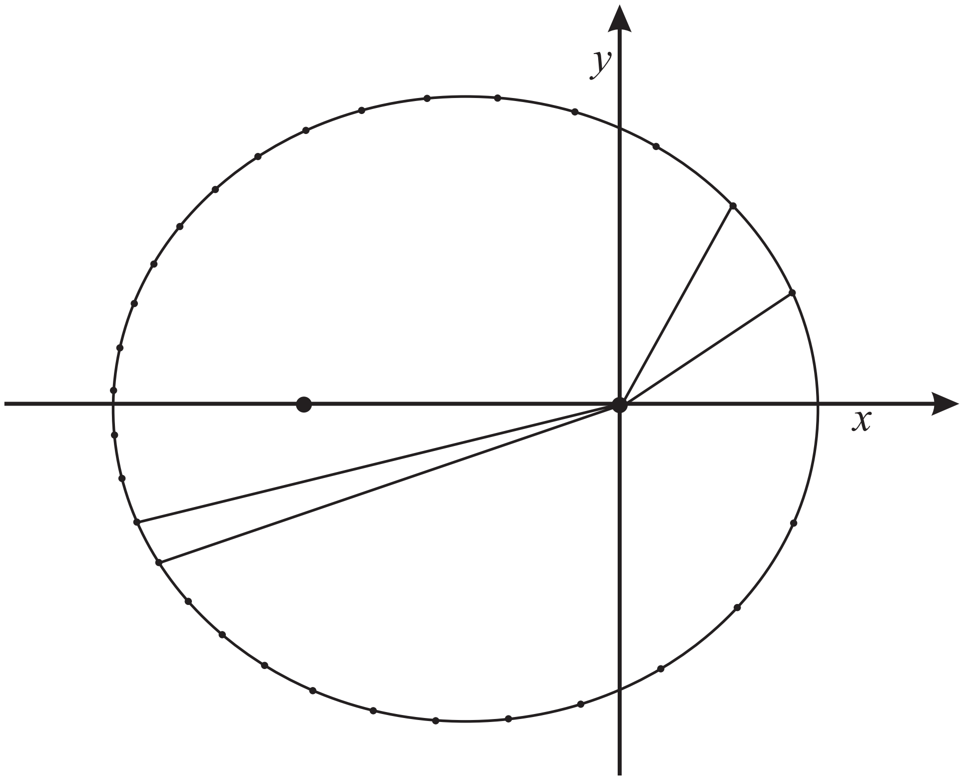


Рис. 3

Я ещё раз повторю принцип. Мы разделили всё время на равные промежутки. И в каждом промежутке считаем упрощенно. Считаем, что сила, с которой Солнце притягивает планету, на протяжении этого промежутка не изменяется. А это значит, что на этом промежутке, например, в течение суток, если сила притяжения планеты к Солнцу постоянна, движение есть свободное падение. Оно происходит по параболе, и мы можем его точно рассчитать. Рассчитаем и получим в конце этого промежутка новые координаты и новую скорость, т.е. ее величину и направление. И мы оказались в том положении, в каком были в начале. Снова считаем расстояние, узнаем силу по величине и по направлению, скорость уже сосчитали раньше. И проделываем ещё раз аналогичные операции. Таким образом, у нас происходит постепенный расчет шаг за шагом. И вот на картинках, которые там приложены, показано, как это получается. То есть, там сделано так. Я, конечно, сделал это на компьютере, а Гук не имел компьютера. Он должен был всё считать на бумажке. Я думаю, что он истратил кучу бумаги, потому что расчет довольно громоздкий, так как очень много точек. Если вот этот промежуток времени, шаг — большой, то будет неточно. А если маленький — то слишком много расчетов.

Что я сделал на компьютере? Я сделал шаг $d = 0.01$. Получается несколько сот точек, но так как это очень тоскливо наносить несколько сот точек, мой компьютер печатал только каждый пятидесятый результат. Эти точки нанесены, и через них проведена кривая. И видно, что кривая не замкнулась — она начинается, и она немножечко не замкнулась, рис. 2. Это как раз та самая ошибка, которая возникла из-за вот этого предположения (что сила постоянна на протяжении маленького промежутка времени). А на самом деле она меняется, поэтому получилась неточность. А дальше я сделал вот что — ещё в 10 раз уменьшил временной шаг, и тогда кривая замкнулась с такой точностью, что ошибка на чертеже не заметна, рис. 3. Так что получается довольно точный способ расчета. В одном случае я взял такие параметры, что должна была получиться точная окружность, и она почти получилась. А в другом случае получился эллипс. И вы можете проверить с помощью линейки, что сумма расстояний от любой точки этого эллипса до двух фокусов постоянна. Сейчас я хочу немножко вернуться. Как можно выбрать начальные значения? Допустим, тут какой-то такой эллипс, то есть такая точка, где расстояние до одного из фокусов минимально. Направим ось x таким образом, чтобы она содержала фокус и эту точку. И тогда мы имеем право в начальный момент считать, что скорость перпендикулярна радиус-вектору. Это очень удобно. Начальная скорость по направлению будет всегда одинакова, она будет всегда перпендикулярна радиус-вектору. А величина будет меняться. Тогда, если у нас величина маленькая, то эллипс будет вот такой. А если большая — то вот такой, рис. 4.

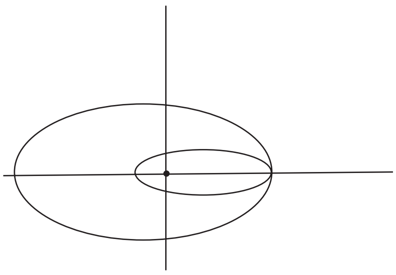


Рис. 4.

Если очень большую скорость зададим, то планета улетит в космос и не вернется. Это гиперболическая траектория. Так вот можно экспериментировать, я вчера на компьютере попробовал многие разные вещи, но в данном случае принципиально только то, что эллипс получается. Поэтому я подобрал такие параметры, чтобы было видно, что эллипс получается. Теперь я вот что спрошу: что такое второй закон Кеплера? Наверняка кто-то знает, я его вам сформулирую. Вот у нас центр тяготения. И вот планета двигается по эллипсу. Я нарочно нарисовал очень вытянутый эллипс. На самом деле, ни одна планета так не идёт, но комета ходит по таким эллипсам. Когда планета приближается к Солнцу, то притяжение Солнца ускоряет планету. А когда она удаляется, то, наоборот, притяжение Солнца замедляет планету. Поэтому получается, что эту часть траектории планета проходит быстро, а эту часть — медленно. И вот в чем состоит второй закон Кеплера. На самом деле, исторически он был первым, но сейчас стал называться вторым. Если мы возьмем какой-нибудь интервал, например, сутки, и посмотрим, как планета продвинулась за сутки. Здесь она была 14-го, здесь — 15-го числа. А потом возьмем другую часть траектории и тоже посмотрим, сколько планета пройдет за сутки. Здесь она пройдет меньше. Нарисуем два радиус-вектора. И оказывается, что площади этих двух секторов одинаковы. Площадь, замыкаемая радиус-вектором за одинаковые промежутки времени в разных частях орбиты будет одна и та же. И вот теперь посмотрите на второй график у вас на листках, там, где получился эллипс, рис. 3. Там жирно выделены точки, по которым строился эллипс. Они лежат через одинаковые промежутки времени. И там очень хорошо видно, что скорость движения планеты убывает, когда планета уходит от Солнца. Нарисованы два сектора, и их площади должны быть равны. Это и есть второй закон Кеплера. Есть ещё третий закон Кеплера, про который тоже можно вспомнить просто для полноты — уж если начали называть, то надо назвать все три. Если первые два закона говорят о том, как одна планета двигается вокруг Солнца, то третий закон говорит о том, как связаны между собой движения двух разных планет. В первых двух законах везде речь шла только об одном Солнце и об одной планете. А теперь пусть у нас есть две планеты, рис. 5.

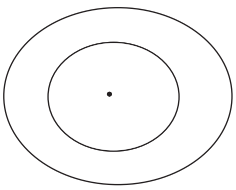


Рис. 5.

Тогда вот что оказывается справедливо. Значит, вот одна планета, вот другая. Чем дальше планета от Солнца, тем больше у неё длительность года. Соотношение такое, что квадраты периодов относятся как кубы больших полуосей. $(T_1^2/T_2^2) = (a_1^3)/(a_2^3)$. Большая полуось — это вот что. Вот у нас два фокуса. Вот это большая ось фокусов, а это — малая ось фокусов, рис. 6.

В геометрии привыкли говорить не оси, а полуоси, поэтому так и сформулировано — кубы больших полуосей. Ясно, что кубы полуосей, относятся так же, как и кубы осей, поэтому, оттого, что мы поделили оси пополам, ничего не изменилось. Просто так уж принято. Так этот закон классически формулируется. Квадраты периодов относятся как кубы больших полуосей. Давайте, чтобы закон запомнился, попробуем его сейчас сразу к чему-нибудь применить. Кто из вас знает, за сколько земных лет Юпитер делает оборот вокруг Солнца? Больше одиннадцати, но меньше двенадцати, я точно не помню. Будем считать, что 11,5. Периоды относятся как 11,5, то есть, один год на Юпитере — 11,5 лет у нас. Значит, квадраты периодов приблизительно относятся как 130. И они относятся как кубы полуосей. Орбита Юпитера почти круговая, и орбита Земли почти круговая. Поэтом большая полуось — это просто радиус орбиты. Сейчас оценим, во сколько раз расстояние от Юпитера до Солнца больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Нужно извлечь кубический корень из 130. Это 5 и чуть-чуть ещё. Вот мы и получили, что радиус орбиты Юпитера в 5 и чуть-чуть раз больше, чем радиус орбиты Земли. Вот какие прекрасные соотношения следуют сразу из законов Кеплера.

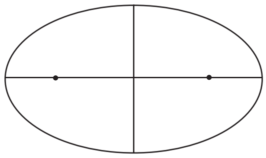


Рис. 6.

Сейчас я хочу сказать вот о чем. Всё-таки, фундаментальную работу по созданию механики и математического анализа проделал Ньютон, несмотря на достижения Гука. Как-то все считают, что Ньютон — это создатель. Наверное, это правда, потому что у Гука была догадка, а Ньютон действительно написал такой фундаментальный труд, который послужил началом для создания сразу многих наук. Что интересно, почему механика была сначала открыта на небесах? Казалось бы, законы механики мы могли бы увидеть здесь, на Земле, мы ведь всё время с ней сталкиваемся. Однако, законы обнаружились благодаря тому, что люди изучали движения планет. А на Земле никак не могли их обнаружить! В чем же дело? Мне кажется, что дело вот в чём. На Земле всё происходящее осложнено трением, а в космосе так пусто, что там всё — в чистом виде, и трения почти нет. В чем состоит закон инерции, первый закон механики? Тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку никакие силы не выводят его из этого состояния. Это можно так сформулировать. Так что получается, для того чтобы тело равномерно двигалось, на него совсем не нужно воздействовать никакими силами. Это — закон механики. Но ведь в это почти невозможно поверить! Спросите, например, любого шофера или извозчика. Что, если никакие силы не действуют, так и будет телега ехать? Да нет же. Это настолько противоречит привычному здравому смыслу, что в это почти невозможно поверить. Но в том-то и дело, что на Земле не бывает таких условий, чтобы трением можно было пренебречь. И поэтому очень трудно было бы видеть этот закон на Земле. А на небе — очень легко. Там планеты миллиарды лет двигаются, крутятся, и хоть бы что. Их и подталкивать не надо. Вот, на мой взгляд, первая причина того, что законы механики открыли сначала на небе. А потом уже обнаружили, что они верны также и на Земле.

Вторая причина вот какая. Оказывается, что очень долго не было никакой точно установленной единицы измерения времени. Были сутки. Сутки, конечно, есть единица измерения времени, и сутки в течение года почти постоянны, они чуть-чуть изменяют свою величину. Раньше-то об этом не знали, так как не было точных часов, но сейчас известно, что сутки в течение года чуть-чуть изменяются на какие-то доли секунды. Кстати, как вы думаете, почему? Чего это вдруг Земля то быстрее крутиться, то медленнее? Если считать так, от момента, когда Солнце в зените, до следующего момента, когда Солнце в зените, это будет меняться в течение года, потому что когда Земля двигается близко от Солнца, то ей нужно докручиваться, чтобы снова на Солнце смотреть. А когда она далеко, это почти не нужно. Если ориентироваться не по Солнцу, а по дальним звёздам, тогда, казалось бы, что вращение Земли должно иметь постоянную угловую скорость. А это тоже не совсем так. Почему это может быть не совсем так? Если в течение года скорость Земли меняется, то это может быть только потому, что её форма меняется. А это так, форма Земли немножечко меняется (но это не эффект от приливов). Я вот что узнал. Когда собирается много снега на севере, то Земля чуть-чуть ускоряется, а когда снег растает и стечет в океан, то Земля чуть-чуть замедляется. Это могут измерить сейчас при точных часах. Это, конечно, уже такие мелочи, о которых никто не догадывается.

А вот когда появилась точная единица времени, установленная и общепринятая, кроме суток? Час не был точной единицей. В древнем Вавилоне разделили день на 12 равных часов и ночь на 12 равных часов. И это тянулось до 17-го века. То есть час ночной и час дневной различались по величине и зависели от времени года.

Я видел в старой книжке рисунок водяных часов. Как они были устроены? Сейчас нарисую. Металлический цилиндр. Вот стрелочка. Тут какой-то механизм, я уж не буду сейчас разбираться. Стрелочка так устроена, что в течение суток она всё время равномерно поднимается. А тут имеются деления. В момент восхода Солнца начинается счет дневных часов — час, два, три и так далее. В 12 часов Солнце заходит, а полдень — это 6 часов. Вот здесь полдень, вот здесь Солнце зашло и начинается счет ночных часов. Причем, когда стрелка доходит доверху, с помощью механизма она падает, и начинается новое движение, но при этом барабан поворачивается на одну 365-ю части. И стрелка идёт уже по соседней лини, а на ней деления немножко смещены. Таким образом, в течение всего года эти часы правильно показывают время. Граница между днем и ночью — это некоторая кривая. Нижняя часть белая, и на ней деления нарисованы черным, а верхняя часть — черная, и на ней белые деления. Поэтому по стрелке сразу видно, день сейчас, или ночь. Вот так были устроены водяные часы.

И когда стали пытаться сделать первые часы, с маятником, или пружинные, то первая проблема была такая — как же сделать, чтобы они могли правильно переходить от ночных часов к дневным, да ещё учитывать время года. И эта проблема в Древнем Египте была решена с помощью солнечных часов. Подумайте сами, как нужно устроить солнечные часы, чтобы днём они показывали правильное время в течение целого года? Нынешние солнечные часы для этого не годятся. В Древнем Египте это было сделано. Там были знаменитые часы в Александрии, и, кажется, Юлий Цезарь уговорил царицу Клеопатру, чтобы она ему эти часы подарила. Он привёз их в Рим, и они стали показывать неверное время. Я был в 5-м классе, меня это удивило. Я тогда был очень скромный, и если чего-то не понимал, то думал, что я — дурак. Но я не понимал, почему они стали показывать неверно, ведь я же ничего не знал об этих штуках с дневными и ночными часами. Спросил учительницу, а она как-то не стала меня особенно слушать, говорит: "Ну, как же, часы же показывают местное время, а там другая долгота, поэтому неправильно показывают". Я понял, что что-то здесь не то, скорее всего, она не вдумалась в мой вопрос. И только недавно я узнал, оказывается, действительно, счет времени был другой.

Так вот Гюйгенс, который жизнь свою положил на то, чтобы сделать хорошие часы, отменил это безобразие, и установил, что часы и днём и ночью в течение всего года одинаковы. Он для этого 12 часов перевёл на полдень и на полночь, то есть на такие моменты, которые не зависят от восхода Солнца. Гюйгенс был голландец, но добился того, чтобы его избрали президентом парижской Академии наук, и, видимо, его влияние было достаточно сильно, он сумел уговорить надлежащие инстанции, чтобы часы перевели. С тех пор мы живем по нашему времени.

Какие воспоминания остались у нас от тех времен, когда 12 часов были моментом восхода Солнца? Остались сказки. У нас есть такие сказки, в которых, например, ведьма собирается на Лысую гору и там у них происходит шабаш. И я всегда удивлялся, а почему ведьмы так боятся 12-го удара часов? Вроде полночь, казалось бы — самое время для веселья ведьм! Полночь, темнота, а они боятся 12-го удара, да ещё почему-то петух кричит! В 12 часов ночи! Эти сказки остались с тех пор, когда был другой счет времени. Они ведь не переделываются! Так что имейте в виду, что в 12 часов ведьмы ещё не расходятся, это самый праздник для них. А петухи кричат на восходе Солнца, а не в 12 часов.

Насчет египетских часов (кстати, сходите посмотрите солнечные часы на старом здании Университета на Моховой улице). Стрелка, которая отбрасывает тень, должна быть параллельна земной оси. И тогда получается, что тень, которую она отбрасывает, её направление всегда будет соответствовать времени. Если проградуировать шкалу, то линии тени будут постоянны в течение всего года, только их длина будет разной из-за разной высоты Солнца. Если мы хотим, чтобы час был разный в разное время года, тогда нужно смотреть не просто направление линии, но и в какую точку падает вершина. И градуировка будет более сложная. Ясно, что такие часы можно наладить на определенной широте, но на другой широте они верно идти не будут.

Набор текста по видеозаписи: Имайкин А.В.

О слонах, орехах, и бесконечных суммах

Н. Н. Константинов

Эта и следующая заметки представляют собой записи тем, которые обсуждаются Н. Н. Константиновым на математическом кружке для школьников.

Введение

Этот рассказ носит философский характер.

Некоторые фразы понятны просто потому, что понятно каждое слово. Пример: “Этот мостик не выдержит слона”.

Мы знаем, что такое мостик, слово “этот” указывает, что речь идёт о конкретном мостике, представляем себе слона и понимаем, что значит “выдержит” — это значит, что предполагается эксперимент — слон идёт по этому мосту. И если у нас нет слона, мы легко можем представить себе такой эксперимент.

А вот фразу “Если бы слон вылуплялся из яйца, можно ли было бы разбить из пушки это яйцо?” нельзя понять только на основе того, что понятны все слова, так как соответствующий эксперимент невозможно себе представить. И если нет дополнительных разъяснений, такую фразу следует считать бессмысленной.

Заметим, что в обоих случаях речь идёт о правильно построенных словосочетаниях, в которых выполнены все правила грамматики. Иных словосочетаний мы не будем рассматривать.

В математике постоянно встречаются фразы обоих типов. Фразы первого типа (понятные без разъяснений) назовем первичноосмысленными, фразы второго типа — первичнобессмысленными. Я сомневаюсь, что можно аккуратно провести деление всех фраз на два этих типа, но я буду пользоваться этими названиями, следя за тем, чтобы во всех случаях было ясно, о чем идёт речь.

В математике постоянно пользуются первичнобессмысленными фразами.

Об орехах

Задача. Имеется три коробки: А, В, и С. В коробке А первоначально находится бесконечное число орехов, коробки В и С — пустые. Ваня и Петя проводят бесконечное число операций, занумерованных натуральными числами: 1, 2, 3, ... Операция номер i состоит в том, что Ваня берет из коробки А 10 орехов и перекладывает их в коробку В, а Петя берет из коробки В один орех и перекладывает его в коробку С.

Вопрос: Сколько орехов окажется в каждой коробке после совершения бесконечного числа операций?

Когда я задавал людям эту задачу, они реагировали на неё по-разному. Некоторые сразу начинали пытаться угадать ответ, и можно было услышать ответы типа: “В коробках В и С будет бесконечное число орехов, но в В в 9 раз больше, чем в С”.

Беда в том, что этот ответ бессмысленный, но и задача бессмысленная. Словосочетание “после совершения бесконечного числа операций” относится к числу первичнобессмысленных словосочетаний. Ведь совершить бесконечное число операций невозможно ни практически, ни в воображении. Правильная реакция на мою задачу состоит в том, чтобы сначала уточнять её смысл, и только после этого пытаться давать ответ.

Сделаем попытку придать смысл загадочной фразе.

Пусть X — некоторый орех в коробке А. Будем говорить, что после бесконечного числа операций он оказался в коробке С, если найдутся такие натуральные числа m и n ($m \leq n$), что в результате выполнения операции номер m орех X был переложен в коробку В, а в результате выполнения операции номер n он был переложен в коробку С.

И вот мы видим, что для одного конкретного ореха словосочетание "после совершения бесконечного числа операций" приобрело точный смысл.

Теперь по аналогии можно дать определение и того, что означает, что орех X после совершения бесконечного числа операций оказался в коробке B: "...если найдется такое натуральное число m, что в результате выполнения операции номер m орех X был переложен в коробку B, но не существует такого $n \geq m$, что в результате выполнения операции n он был переложен в коробку C", а также определение того, что означает, что орех X после совершения бесконечного числа операций остался в коробке A.

Итак, загадочная фраза определена для каждого конкретного ореха, но этого нам и достаточно, ведь нам и нужно узнать про каждый орех, где он окажется.

Теперь можно попытаться отвечать на вопрос задачи. Но тут мы замечаем, что в условиях есть ещё некоторые недоговорённости. Сделаем уточнения. Будем считать, что орехи в коробке A занумерованы натуральными числами: 1, 2, 3, ... (Можно считать, что там лежат сами числа, а орехи не при чем). Ещё остались две неясности: как Ваня и Петя выбирают орехи из коробок A и B соответственно. От этого зависит ответ. Вот варианты ответа для коробки A в зависимости от вариантов уточнений:

1. Ваня выбирает орехи подряд: сначала первый десяток, затем орехи от 11-го до 20-го и так далее. В этом случае после выполнения бесконечного числа операций в коробке A орехов не останется. Действительно, каждый орех имеет номер. Путь этот номер n. Возьмем целую часть от деления n на 10 и прибавим 1. Получим число $k = [n/10] + 1$ ($[x]$ — общепринятое обозначение для целой части числа x). k — это номер того шага, на котором Ваня переместит орех номер n коробку B.

2. Ваня оставил орех номер 1 в коробке A и начал забирать орехи, начиная со второго. В этом случае в коробке A в результате бесконечного числа операций останется один орех.

3. Аналогично, при некотором способе действий Вани в коробке A может остаться любое конечное число орехов, а также и бесконечное (если он, например, забирает только орехи с четными номерами).

Заметим, что в коробке C в результате бесконечного числа операций будет бесконечное число орехов, и это не зависит от того, как мы уточним способ действий Вани и Пети.

И вот, наконец, варианты ответа для коробки B в зависимости от вариантов уточнений:

1. Если Петя всегда забирает орех с наименьшим возможным номером, то в коробке B орехов не останется вовсе.

2. Если Петя один орех оставил (например первый), а дальше берет орехи с наименьшим номером, то в коробке B останется один орех.

3. И, конечно, возможны варианты и с любым конечным числом орехов, и с бесконечным числом.

Задача про орехи полностью разобрана.

О бесконечных суммах

Рассмотрим одну бесконечную сумму:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$$

(прибавляются дроби, в знаменателях которых последовательные степени двойки).

Задается вопрос: чему она равна? Обычно человек, которому задается такой вопрос, пытается дать ответ, не смущаясь тем, что смысл вопроса не ясен. Ведь провести бесконечное суммирование невозможно. Так что вопрос глуп, и отвечать на него глупо.

Между тем, этот вопрос задавался в математике с древних времен, и большие математики поступали точно так же, как и наш современный глупец. Вот как они рассуждали.

Допустим, что $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ Тогда

$$S - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = \frac{S}{2}.$$

Отсюда $2S - 2 = S$, $S = 2$. Всё в порядке, сумма найдена даже и без того, чтобы понять, что она означает.

Но посчитаем тем же методом сумму: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$ (последовательные степени двойки). Мы получим $S - 1 = 2S$, $S = -1$. То, что получился абсурд, и без определений ясно. Так что в головах математиков зароились сомнения. Знаменитый математик 19-го века Бернардо Больцано написал книжку "Парадоксы бесконечного", в которой видны его мучения по этому вопросу. Он так и не догадался, что нужны определения. В результате мук 19-го века появилась современная точка зрения на вопрос, которая состоит в следующем.

Вопрос о сумме $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ относится к числу первичнобессмысленных вопросов. Для такой суммы требуется определение, которое придаст ей смысл. Вот вариант такого определения.

Обозначим через S_n сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

То есть S_n есть сумма первых n членов нашей бесконечной суммы. Вопрос о том, что означает эта конечная сумма, ясен.

Определение: Число S равняется бесконечной сумме $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$, если выполняются два условия:

1. Никакая конечная сумма S_n не превышает S;
2. Для каждого числа S', меньшего S, найдется S_n, которое больше S'.

После такого определения вопрос о сумме $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ становиться осмысленным. Вопрос о сумме $1 + 2 + 4 + ...$ тоже становиться осмысленным, но при этом легко доказать, что эта бесконечная сумма не существует.

Терминологические добавления

1. Формальную запись $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ принято называть рядом.
2. Бесконечную сумму $a_1 + a_2 + a_3 + ...$, как мы её определили, принято называть суммой ряда.
3. Её же принято называть пределом последовательности частичных сумм S_n.
4. Определение суммы ряда, которое приведено выше, годится для рядов, состоящих из неотрицательных членов, или, если говорить о последовательности частичных сумм, для неубывающих последовательностей (последовательность называется неубывающей, если любой её член не превышает следующего за ним).
5. Сформулируйте определение предела неубывающей последовательности, в которой не употребляются слова "сумма ряда", "частичная сумма", и другие слова, относящиеся к рядам.

Эпилог

Ребенок, учась говорить, верит всему, что слышит. Критическое отношение к тому, что говорится, в этом возрасте вредно — оно помешало бы овладению речью. Когда речь освоена, наступает период отрицаний.

Математика пережила длительное детство (от древних до 19-го века), когда подразумевалось, что любой вопрос имеет смысл, и нужно только этот смысл угадать.

Но мы живем после этого периода. Смысл слов требуется объяснять. Однако от старых времен осталась традиция употреблять слова, не заботясь об их смысле. Неожиданная контрольная является тому подтверждением.

Математический анализ — один из главных разделов математики — основан на понятии предела в разных формах. Это понятие первичнобессмысленное и требует определения. Непонимание этого мешает понять анализ. И это непонимание часто оказывается результатом поспешного изучения понятия предела во многих технических вузах.

Но вот интересный вопрос. Выбор определения — дело произвольное. Нет формального способа утверждать или отрицать правильность того или иного определения. Как мы решаем, что определение нас устраивает, то есть дает то, чего мы от него ждём? На этот вопрос я не знаю ответа.

Мешает ли птицам попутный ветер

Н. Н. Константинов

Когда я уже научился читать, мне попалась книжка о путешественниках, — какая именно книжка, я забыл, а запомнил из неё только один эпизод. Путешественники разбили лагерь в лесу рядом с озером, на которое села для отдыха во время перелета стая диких гусей. Наступил вечер, и охотиться было невозможно.

– Завтра будет славная охота, – сказал один.

– А ты не думаешь, что на рассвете птицы улетят? – сказал другой.

– Не улетят, ведь ветер с севера, для гусей попутный. Птицы не летают с попутным ветром, так как они задувает им под маховые перья крыльев.

Этот разговор показался мне странным. Я бы на месте птиц радовался попутному ветру — на нем можно лететь быстро, быстрее ветра. Хоть он и попутный, а всё равно будет дуть мне в лицо. Но я был маленький, всё, что написано в книгах, было для меня истиной. Так что я запомнил только, что я чего-то не понял, а чего именно — наверное, потом пойму, когда буду учиться в школе.

Прошло двадцать пять лет. По совету Алексея Андреевича Ляпунова я посетил семинар по биофизике, проводившийся на биостанции Миассово Николаем Владимировичем Тимофеевым-Ресовским. История, рассказанная Николаем Владимировичем, заставила вспомнить меня прочитанную в детстве книжку. Оказывается, было время (и я как раз его застал), когда из статьи в статью, из книги в книгу повторялась одна и та же мысль — что попутный ветер задувает птицам под крылья. И группа биологов, в их числе Тимофеев-Ресовский, потрудилась в нескольких публикациях разъяснить биологам ошибочность этой мысли и рассказать о принципе относительности Галилея. Многие биологи плохо знают физику. Я это вижу на примере Московского университета (где плохо обучают не только биологов).

Ещё один эпизод напомнил мне, что некоторые старшеклассники в наше время ещё не доросли до понимания картины мира, возникшей после открытий Галилея. Стройотряд из студентов и школьников работал летом на ББС (Беломорской биостанции) МГУ. Я был с ними, будучи уже учителем. Мы возвращались с одной морской экскурсии на теплоходе "Научный". Группа ребят попросила у капитана разрешения сидеть не на теплоходе, а в шлюпке, которая тянулась за теплоходом на буксире. Там было куда приятнее: мотор не гудит, соленые брызги и прочее. А за шлюпкой на расстоянии примерно трёх метров от неё тянулся ещё маленький ялик.

И вот самый молодой из нас, Леша Кувшинов, который тогда перешел в десятый класс, захотел пересесть в ялик. А сделать это на ходу было, по-моему, невозможно, по крайней мере, очень трудно: даже если подтянуть ялик к шлюпке, пересесть на него и не перевернуться — немыслимо. Но Леша придумал другой способ: "Я высоко подпрыгну, и пока буду опускаться, ялик будет уже подо мной". И тут все старшеклассники (а это были всё матшкольники, и с ними шутки плохи) стали наперебой объяснять Леше принцип относительности Галилея.

Землю, говорили они, можно считать инерциальной системой отсчета. Это означает, что тело, на которое не действуют внешние силы, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли. Конечно, бывают такие ситуации, в которых систему отсчета, связанную с Землей нельзя считать инерциальной. Наглядный пример тому — маятник Фуко. В инерциальной системе отсчета плоскость, в которой колеблется маятник, остается постоянной, а в действительности она медленно поворачивается. Другой пример — реки в северном полушарии подмывают правый берег, а если бы система, связанная с Землей, была инерциальной системой, оба берега были бы равноправны. Но это всё довольно тонкие эффекты, наблюдаемые либо при очень точных измерениях, либо за очень большие промежутки времени. А в нашем случае, систему отсчета, связанную с Землей, вполне можно считать инерциальной. А тогда и другую систему отсчета, которая движется относительно Земли равномерно и прямолинейно, также можно считать инерциальной. Наша шлюпка как раз и есть такая система отсчета. И тогда, по принципу относительности Галилея, все законы физики в системе шлюпки выглядят так же, как и в системе, связанной с Землей. И подпрыгнув в шлюпке, ты опустишься в ту же точку шлюпки, из которой стартовал, как это и было бы на берегу.

Тут один из наших ребят возразил, что если на твердой почве, то есть на берегу, выстрелить вертикально вверх, то снаряд не упадёт в ту же точку, из которой стартовал, даже если воздух полностью неподвижен относительно Земли. И это ещё один случай, демонстрирующий неинерциальность системы Земли. Но и это эффект незначительный, так что в нашем опыте его можно не учитывать.

Однако Лешу все эти объяснения не убедили. Приводили ему и рассуждения Галилея, объяснявшего своим современникам, что если дуэль на пистолетах происходит в трюме движущегося корабля, то ни один из дуэлянтов, смотрит ли он от кормы к носу корабля или наоборот, не имеет преимуществ. И напоминали, как он, Леша, едучи в поезде на ББС, играл в мяч в вагоне, и мяч двигался по отношению к вагону так же, как он двигался бы на неподвижной земле при тех же ударах по нему. Но всё бесполезно, и Леша непременно хотел подпрыгнуть. А мы возражали, так как шлюпка в результате удара могла дать течь. Но, в конце концов, уступили, и Леша подпрыгнул. Он, как и должно было быть, опустился в исходную точку (а лодка так качнулась, что набрала немного воды). Леша надолго задумался. И запомнил принцип относительности Галилея навсегда.

Воспользуюсь случаем, чтобы показать на примерах, как поверхностно учат зачастую уроки.

Однажды один студент ехал на ББС. Сначала он приехал на поезде в Пояконду, откуда его должны были доставить к месту на катере. Подошел к берегу в три часа ночи (ночи белые), до прихода катера было ещё далеко. Кругом ни души. Он положил на землю свой тяжелый рюкзак и пошел посмотреть окрестности. А когда вернулся, рюкзака не было. О воровстве не могло быть и речи — поселок крохотный, и жители даже дверей не запирают. Студент сел на камень и предался тяжелым размышлениям о превратностях жизни. “А что это там в море плавает?” — подумал студент. “Нет, не плавает, а, пожалуй, стоит на месте”. Пригляделся — “да это же мой рюкзак!” — догадался студент. Благо были на нём сапоги — дошел до рюкзака по мелководью. Забыл студент, что в море бывают приливы. А ведь учил это в школе, и, небось, получил пятерку за отлично вызубренный урок. Но в том-то и дело, что можно вызубрить и не задуматься. И, думаю, что так называемый плохой ученик, который задумался, как люди живут на берегу моря, и как приливы изменяют их жизнь, но не вызубрил урок и получил, может быть, двойку, больше получил от школы, чем иной отличник.

Другой случай — опять же на белом море. Группа туристов пошла погулять, а один из них, Саша Кодряну, остался у костра, чтобы приготовить чай. Это был очень толковый школьник, только что заработавший первую премию на всесоюзной математической олимпиаде. Он пошел к колодцу, а рядом море — вода в нем такая прозрачная и так красиво играет на солнце. И он набрал ведро морской воды. Забыл он, что вода в море соленая, а ведь наверняка знал об этом. Но это были знания для отметки, а не для жизни. Вода (соленая) закипела как раз к возвращению уставшей группы...

Но вернемся к птицам. Меня всегда учили, что записные книжки Леонардо да Винчи изобилуют гениальными догадками. И вот недавно я, наконец, решил почитать эти книжки, которые, разумеется, давно изданы в солидных академических издательствах. В “Избранных произведениях” Леонардо да Винчи (издательство академии наук СССР, Москва 1955 г.) есть глава “О летании и движении тел в воздухе”. Это подробное исследование, в котором много интересных наблюдений и прекрасных рисунков, см. например, рис. 1 в конце заметки. Но понимать его очень трудно, порой невозможно. Ведь Леонардо писал для себя, не заботясь о том, чтобы разъяснять смысл употребляемых терминов. В этой главе есть абзац “Почему перелетные птицы летают против течения ветра?” Я в этом тексте не смог разобраться, но вывод очевидно не верен. На рисунках показано как птицы взлетают — действительно, всегда против ветра. А когда они уже высоко, то не видно, куда дует ветер. Можно предположить, что это и привело к ошибке.

Надо заметить, что Леонардо постоянно ссылается на законы статики, открытые ещё Архимедом (которого он хорошо знал и изучал по полному собранию сочинений, которое, как известно из его записных книжек, было ему доступно). Но для изучения полета недостаточно статики. А динамики тогда ещё не было, и Леонардо там, где не хватало знаний, постоянно использовал интуитивные догадки. Всю жизнь Леонардо пытался создать летательный аппарат, но это ему не удалось. Потребовалось четыре столетия развития науки и техники, чтобы человек поднялся, наконец, в воздух на крыльях.

Итак, мне кажется, я догадался, откуда у биологов возникла ошибочная мысль о том, что попутный ветер мешает птицам летать. Она возникла из трудов Леонардо да Винчи. А удерживалась эта идея в головах некоторых людей потому, что в знании физики эти люди не перевалили через эпоху Галилея.

Итак, всё, вроде, прояснилось. В заключение выражу только ещё раз восхищение смелостью Леонардо, пытавшегося со слабыми средствами прорваться сквозь тьму незнания, опередив века. И не будем его винить, что он не опередил другого, следовавшего за ним гения — Галилея.

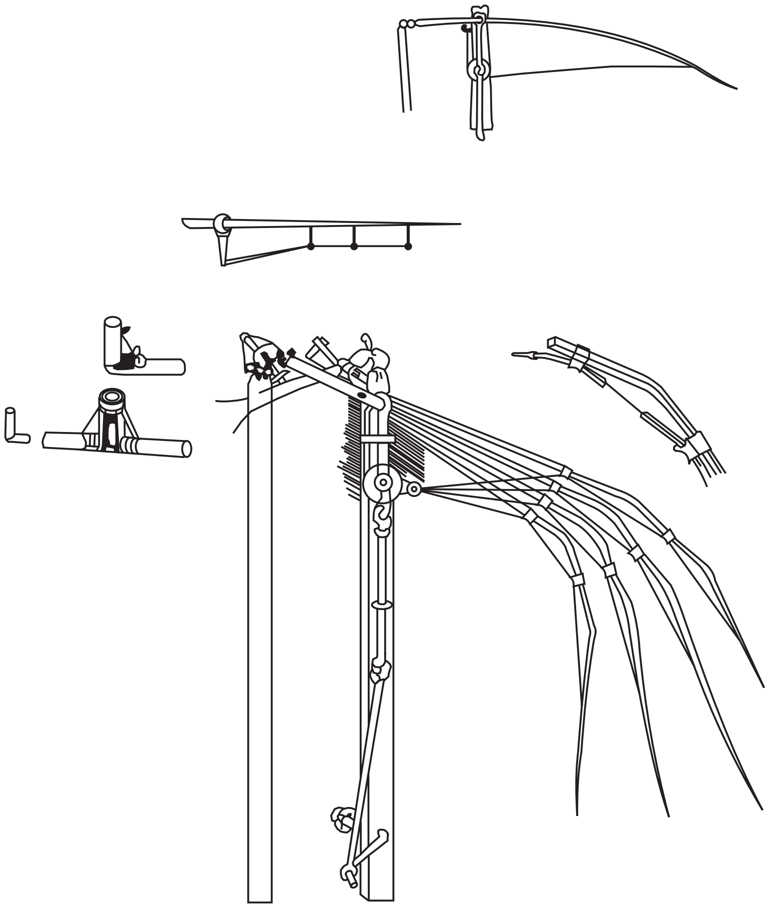


Рис. 1

Крыло летательного прибора (С.А., 308 а).

<u>**Математика в листках**</u>

В свободной Интернет-энциклопедии "Википедия" об одной из сторон деятельности Николая Николаевича Константинова говорится: "С 1960-х годов начинает работать в различных школах Москвы (школы №7, 57, 179), где создает математические классы и разрабатывает методику преподавания основ высшей математики для старшеклассников (так называемая "система листков", или "все — в задачах"). В настоящее время методика Константинова используется во многих математических школах г. Москвы. Имеет как сторонников, так и противников."

Однако сама по себе методика преподавания математики при помощи листков имеет в России старую традицию. В номере 3(38) "Математического образования" рассказывалось о выдающемся русском методисте арифметики Петре Семеновиче Гурьеве, который в 1832 году издал "Арифметические листки", будучи преподавателем Гатчинского сиротского института, готовившего, в частности, будущих учителей математики.

В настоящем выпуске мы приводим перечень тем "Арифметических листков", а также воспроизводим репринтную печать некоторых листков.

Следующий раздел содержит современные листки Н. Н. Константинова.

Арифметические листки

П. С. Гурьев

Перечень тем "Арифметических листков" П. С. Гурьева

Предисловие
Изъяснение нумерации (цифросчисления)
Нумерация. Листки I-VII
Изъяснение сложения
Предварительная таблица сложения
Сложение чисел одинакового наименования. Листки I-XVII
Изъяснение вычитания
Предварительная таблица вычитания
Вычитание чисел одинакового наименования. Листки I-X
Изъяснение умножения
Предварительная таблица умножения
Умножение чисел одинакового наименования. Листки I-X
Изъяснение деления
Предварительная таблица деления
Деление чисел одинакового наименования. Листки I-XI
Четыре первые действия в совокупности чисел одинакового наименования. Листок XII
Изъяснение раздробления
Таблица для облегчения умножения
Раздробление чисел разного наименования. Листки I-VI
Изъяснение превращения
Превращение чисел разного наименования. Листки I-VI
Изъяснение сложения чисел разного наименования
Сложение чисел разного наименования. Листки I-X
Изъяснение вычитания чисел разного наименования
Вычитание чисел разного наименования. Листки I-X
Изъяснение умножения чисел разного наименования

АРИѲМЕТИЧЕСКІЕ ЛИСТКИ,

ИЗДАННЫЕ

ПЕТРОМЪ ГУРЬЕВЫМЪ.

АРИѲМЕТИЧЕСКІЕ ЛИСТКИ,

ПОСТЕПЕННО РАСПОЛОЖЕННЫЕ

ОТЪ ЛЕГЧАЙШАГО КЪ ТРУДНѢЙШЕМУ,

СОДЕРЖАЩІЕ ВЪ СЕБѢ 2523 ЗАДАЧИ,

СЪ РѢШЕНІЯМИ ОНЫХЪ И СЪ КРАТКИМЪ РУКОВОДСТВОМЪ КЪ ИСЧИСЛЕНІЮ;

СОСТАВЛЕННЫЕ

ПЕТРОМЪ ГУРЬЕВЫМЪ,

Учителемъ при Императорскомъ Воспитательномъ Домѣ въ Гатчинѣ.

Изданы И. Заикинымъ. Продаются въ книжныхъ его лавкахъ подъ No 18, 28 *и* 31.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Печатано при ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ.

1832.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлены были въ Цензурный Комитетъ три экземпляра. Санктпетербургъ, 19 Маія 1832 года.

Цензоръ *А. Крыловъ.*

ЕГО ВЫСОКОРОДІЮ

Господину Академику и Конференцъ-Секретарю Академіи Наукъ, Статскому Совѣтнику и Кавалеру

ПАВЛУ НИКОЛАЕВИЧУ

ФУСУ.

МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ!

Священный долгъ благодарности ободрилъ во мнѣ желаніе, посвятить сей, хотя малозначущій, но первый трудъ мой, Наставнику, въ юныхъ лѣтахъ моихъ изливавшему на меня свои неусыпныя попеченія, и утвердившему во мнѣ любовь къ наукамъ и занятіямъ. Вамъ, Милостивый Государь, я обязанъ симъ, и потому осмѣливаюсь посвятить Вамъ трудъ сей, какъ слабый знакъ моей благодарности.

Съ глубокимъ уваженіемъ и совершенною преданностію имѣю честь пребыть

Вашимъ,

Милостивый Государь!

покорнѣйшимъ слугою

Петръ Гурьевъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Многолюдство въ классахъ заведенія, (*) при коемъ нахожусь учителемъ, побудило меня къ составленію сихъ Ариѳметическихъ Листковъ, которыхъ цѣль преимущественно есть: *сверхъ сбереженія времени, дать учителю средство возбудить и поддержать въ ученикахъ своихъ, сколько возможно, самодѣятельность.*

Листки сіи, вмѣщая въ себѣ задачи, расположенныя постепенно отъ легчайшихъ къ труднѣйшимъ, бывъ наклеены на папку, примутъ видъ прописей или картъ. Такимъ образомъ учитель, по предварительномъ объясненіи какого либо правила, можетъ раздавать сіи листки ученикамъ, соображаясь съ силами и способностями каждаго. Очевидно, что ученики, получая каждый свой отдѣльный листокъ, не имѣютъ уже возможности списывать одинъ отъ другаго рѣшенія задачъ; да и при разрѣшеніи самыхъ задачъ, ученику нѣтъ нужды выписывать на свою доску задачи: онъ только къ сдѣланному рѣшенію приписываетъ нумеръ задачи, которую онъ разрѣшилъ, — а чрезъ сіе много сберегается време-

(*) Въ коихъ иногда бываетъ до ста двадцати учениковъ.

II

ни. По прилагаемымъ къ рѣшеніямъ задачъ нумерамъ, учитель, имѣя предъ собою книжку, вмѣщающую въ себѣ Ключъ или рѣшенія всѣхъ задачъ, можетъ легко и весьма скоро повѣрять учениковъ своихъ.

Что же касается до объясненій Ариѳметическихъ правилъ, то я старался изложить оныя такъ, чтобы ученикъ самъ, безъ помощи учителя, могъ итти далѣе впередъ; съ тою же цѣлію помѣщены въ концѣ книги вопросы, которые должны руководствовать ученика при изученіи объясненій. Опытный учитель, безъ сомнѣнія, будетъ при семъ заставлять ученика сравнивать и противополагать пройденное имъ вновь съ выученнымъ прежде, и получаемыя понятія о наукѣ соединять въ одно цѣлое.

Показавъ вкратцѣ употребленіе предлежащей книги, остается мнѣ сказать, что при составленіи оной я руководствовался сочиненіемъ Баумгартена, изданнымъ въ Лейпцигѣ въ 1820 году, подъ названіемъ: Vorlegeblätter für Rechenübungen; также подобнымъ сочиненіемъ Мейера. Впрочемъ и слѣдующія Ариѳметическія книги служили мнѣ съ пользою: 1) Arithmétique d'Emile, par Develey; 2) Traité élémentaire d'Arithmétique à l'usage de l'école centrale des quatre nations, par S. F. Lacroix, и 3) Руководство къ Ариѳметикѣ, изданное Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія 1830 года.

ИЗЪЯСНЕНІЕ НУМЕРАЦІИ (ЦИФРОСЧИСЛЕНІЯ).

1. *Исчислять* значитъ: по даннымъ извѣстнымъ числамъ находить неизвѣстное число, имѣющее къ онымъ требуемое отношеніе.
2. *Единица* есть всякое количество, съ которымъ сравниваютъ другія количества того же рода, для измѣренія ихъ или счисленія.
3. *Число* есть совокупленіе многихъ единицъ одинакаго рода, или есть отношеніе, выражающее, сколько разъ одно количество, взятое за единицу, содержится въ другомъ того же рода.

Числами одинакаго наименованія именуются тѣ, кои означаютъ количество предметовъ одного и того же названія; напр: 5 рублей и 4 руб. и проч.

Числами же разнаго наименованія именуются тѣ, кои означаютъ предметы разнаго названія, напр: 5 рублей 6 копѣекъ 1 деньга.

4. Знаки, которыми изображаются числа, называются *цифрами*.

Таковые знаки суть:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. (*)
одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять.

Къ онымъ присоединяется знакъ 0 (нуль), который самъ по себѣ ничего не значитъ, но тогда только имѣетъ значеніе, когда оный находится въ соединеніи съ какою либо другою цифрою.

(*) Всѣ сіи цифры называются также *значущими*, потому что оне означаютъ собою числа.

1

2

ИЗЪЯСНЕНІЕ НУМЕРАЦІИ (ЦИФРОСЧИСЛЕНІЕ).

5. Посредствомъ сихъ означенныхъ десяти знаковъ или цифръ можно выразить всѣ возможныя, и даже самыя величайшія числа. Это дѣлается слѣдующимъ образомъ: каждая цифра получаетъ опредѣленное достоинство или значеніе по мѣсту, на которомъ она находится; мѣста сіи считаются отъ правой руки къ лѣвой такъ, что вторая цифра отъ правой руки къ лѣвой въ десятеро болѣе значитъ первой, третья въ десятеро болѣе второй, четвертая въ десятеро болѣе третьей и т. д. Напишемъ, напримѣръ, число 66. Первая цифра 6, съ правой стороны, означаетъ тутъ только шесть единицъ; вторая же цифра 6, отъ правой руки къ лѣвой, означаетъ въ десятеро больше, потому что она находится на второмъ мѣстѣ, слѣдственно, десять разъ 6, или шестьдесять. Если же мы напишемъ 666, то третья цифра 6, опять означаетъ въ десятеро больше, нежели вторая цифра шесть, съ правой стороны къ лѣвой, слѣдственно, десять разъ 60, то есть, шесть сотъ. На четвертомъ же мѣстѣ, напр. въ числѣ 6666, цифра сія достоинство свое опять въ десять разъ возвышаетъ, т. е. означаетъ десять разъ 600, или шесть тысячъ.

Посему цифры, находящіяся на первомъ мѣстѣ съ правой руки, означаютъ *единицы*; на второмъ мѣстѣ онѣ означаютъ *десятки*, на третьемъ *сотни*, на 4-мъ *тысячи*, на 5-мъ *десятки тысячъ*, на 6-мъ *сотни тысячъ*, на 7-мъ *милліоны*.

3

ИЗЪЯСНЕНІЕ НУМЕРАЦІИ (ЦИФРОСЧИСЛЕНІЕ).

6. Если вы запомните, надлежащимъ образомъ, значеніе сихъ мѣстъ, то выговариваніе чиселъ будетъ для васъ весьма просто.

Начинайте выговаривать число съ лѣвой стороны, и дайте каждой цифрѣ наименованіе мѣста, на которомъ она находится; слѣдственно, цифру, находящуюся на седьмомъ мѣстѣ, назовете милліонами, на шестомъ сотнями тысячъ, на пятомъ десятками тысячъ, на четвертомъ тысячами, на третьемъ сотнями, на второмъ десятками, и на первомъ единицами.

7. Чтобъ легче выговаривать какое либо число, означенное цифрами, раздѣляютъ оное, посредствомъ точекъ или запятыхъ, на отдѣлы или классы, имѣющіе каждый по три цыфры. Первой отдѣлъ съ правой стороны означаетъ просто сотни, десятки и единицы; второй отдѣлъ (*) означаетъ сотни, десятки и единицы тысячъ; третій отдѣлъ сотни, десятки и единицы милліоновъ; четвертый сотни, десятки и единицы тысячъ милліоновъ; пятый сотни, десятки и единицы билліоновъ; потомъ слѣдуетъ отдѣлъ тысячъ билліоновъ; за онымъ трилліоновъ; тысячъ трилліоновъ; и т. д.

Слѣдственно число: 98″.327′·.628′.932·.714.

выговаривается: девяносто восемь билліоновъ, триста двадцать семь тысячъ, шесть сотъ двадцать восемь милліоновъ, девятьсотъ тридцать двѣ тысячи, семъ сотъ четырнадцать.

(*) Второй отдѣлъ означаютъ точкою, третій косою черточкою, четвертый косою черточкою и точкою, пятый двумя косыми черточками, шестой двумя косыми черточками и точкою, седьмой тремя косыми черточками, и т. д.

4

ИЗЪЯСНЕНІЕ НУМЕРАЦІИ (ЦИФРОСЧИСЛЕНІЕ).

8. Если же въ какомъ либо числѣ не находится единицъ, то вмѣсто оныхъ ставится нуль. Такимъ же образомъ, если нѣтъ десятковъ, или сотенъ, и т. д. вмѣсто оныхъ ставятся нули, которые при выговариваніи числа, написаннаго цифрами, выпускаются, напр:

число 6004502. —

должно выговаривать слѣдующимъ образомъ: шесть милліоновъ, четыре тысячи пять сотъ два.

Примѣчаніе. На 1-мъ листкѣ, числа, означенныя цифрами, слѣдуютъ по порядку, начиная съ самаго перваго числа 2, которое получается чрезъ прибавленіе къ одной единицѣ еще одной. Ученикъ долженъ всѣ сіи числа сперва выговорить, а потомъ написать на доскѣ или на бумагѣ словами.

Въ II и III листкахъ слѣдуетъ продолженіе того же упражненія.

Въ IV листкѣ помѣщены числа, написанныя цифрами въ разбивку.

V, VI и VII листки содержатъ въ себѣ примѣры чиселъ, написанныхъ словами, которыя ученикъ долженъ написать цифрами.

Примѣчаніе. Должно помнить, что Русское цифросчисленіе разнствуетъ отъ Французскаго. Во Французскомъ цифросчисленіи билліонъ занимаетъ десятое мѣсто, триліонъ тринадцатое, и т. д. Слѣдственно, Французскій биліонъ все тоже, что тысяча милліоновъ Русскихъ, а триліонъ все тоже, что биліонъ, и т. д.

12

ИЗЪЯСНЕНIЕ СЛОЖЕНIЯ.

1) *Сложенiемъ* называется то дѣйствiе, посредствомъ коего къ даннымъ числамъ мы прiискиваемъ другое число, равное онымъ, вмѣстѣ взятымъ. Данныя числа именуются *слагаемыми*, а то, которое находимъ, называется *суммою* или *итогомъ*.

2) Знакъ сложенiя есть + (прямо стоящiй крестъ), что означается по Латыни словомъ *plus* (больше), а на Русскомъ языкѣ, для краткости, замѣняется буквою *и*. Напримѣръ: 2 и 3 и 6 составляютъ вмѣстѣ 11, или 2 + 3 + 6 равно 11. Знакъ равенства есть =. Слѣдственно пишутъ: 2 + 3 + 6 = 11.

3) Предметы, которые вмѣстѣ складываются, непремѣнно должны быть одинаковаго названiя; посему нельзя сказать, что пять перьевъ и 2 грифеля составляютъ семь перьевъ, или 7 грифелей; но напротивъ того, можно сказать: 2 ученика и 3 ученика суть пять учениковъ.

4) Такимъ же образомъ, при сложенiи чиселъ могутъ быть слагаемы только тѣ, которыя принадлежатъ къ одному разряду; наприм. единицы съ единицами, десятки съ десятками, сотни съ сотнями и. т. д.

5) Когда всѣ данныя числа будутъ въ семъ порядкѣ написаны на доскѣ или на бумагѣ, тогда подъ послѣднимъ слагаемымъ числомъ проводится черта, и потомъ приступаютъ къ нахожденiю самой суммы.

13

ИЗЪЯСНЕНIЕ СЛОЖЕНIЯ.

6) Посему числа, которыя мы желаемъ сложить, для легкости должны быть написаны въ такомъ порядкѣ другъ подъ другомъ, чтобы всѣ числа одного разряда находились однѣ подъ другими, т. е., единицы подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями, и т. д.; наприм. слагаемыя 132 + 243 + 86 + 102 + 759 + 8 должны быть поставлены другъ подъ другомъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{r} 132 \\ 243 \\ 86 \\ 102 \\ 759 \\ 8 \\ \hline 1330 \end{array}$$

Сперва находимъ сумму того ряда чиселъ, который содержитъ въ себѣ единицы, слѣдственно, стоящаго первымъ съ правой руки, отъ коей и начинается сложенiе. Будемъ считать: 2 единицы и 3 составляютъ 5 единицъ, и 6, 11 един., и 2 един. 13 един., и 9, 22 един., и 8, 30 единицъ. И такъ сумма всѣхъ единицъ составляетъ 30, а какъ 30 единицъ все то же, что три десятка, то, если приведемъ оныя въ десятки, единицъ не останется вовсе, и вмѣсто оныхъ въ ряду единицъ должно поставить 0. Къ полученнымъ отъ единицъ тремъ десяткамъ начнемъ прикладывать десятки; слѣдственно и перейдемъ къ сложенiю втораго ряда. 3 десятка, полученные отъ единицъ, и 3, составляютъ 6 десятковъ, и 4 д. 10 д., и 8 д. 18 д., и 5. д. 23 десятка. Въ 23 десяткахъ содержатся 2 сотни и 3 десятка. Во второй рядъ ставимъ цифру 3, а 2 сотни сложивъ съ сотнями, получимъ всего 13 сотенъ; но какъ 13 сотенъ вмѣщаютъ въ себѣ тысячу, то и очевидно, что въ ряду сотенъ поставится 3, а 1, какъ означающая одну тысячу, напишется съ лѣвой стороны 3, и займетъ четвертое мѣсто справа.

ИЗЪЯСНЕНІЕ СЛОЖЕНІЯ.

8) Чтобы повѣрить сложеніе, надлежащимъ ли образомъ оное сдѣлано, стоитъ только пересложить числа, начиная не съ верху въ низъ, какъ мы поступили теперь, а съ низу въ верхъ; и когда выйдетъ одна и та же сумма, то это будетъ означать, что сложеніе было сдѣлано вѣрно.

Примѣчаніе. Сложеніе повѣряется еще вычитаніемъ; но такъ какъ мы еще не знаемъ сего послѣдняго дѣйствія, то и невозможно упомянуть здѣсь о семъ способѣ повѣрять сложеніе.

Листокъ I вмѣщаетъ въ себѣ примѣры, въ коихъ слагаемыя числа не доходятъ до ста.

Во II листкѣ всѣ числа менѣе тысячи, въ III менѣе десяти тысячъ. Въ слѣдующихъ листахъ помѣщены примѣры въ различныхъ видахъ, которые сложеніе принять можетъ.

15

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА СЛОЖЕНІЯ.

1 и 1 суть 2	3 и 1 суть 4	5 и 1 суть 6	7 и 1 суть 8	9 и 1 суть 10
1 ,, 2 ,, 3	3 ,, 2 ,, 5	5 ,, 2 ,, 7	7 ,, 2 ,, 9	9 ,, 2 ,, 11
1 ,, 3 ,, 4	3 ,, 3 ,, 6	5 ,, 3 ,, 8	7 ,, 3 ,, 10	9 ,, 3 ,, 21
1 ,, 4 ,, 5	3 ,, 4 ,, 7	5 ,, 4 ,, 9	7 ,, 4 ,, 11	9 ,, 4 ,, 13
1 ,, 5 ,, 6	3 ,, 5 ,, 8	5 ,, 5 ,, 10	7 ,, 5 ,, 12	9 ,, 5 ,, 14
1 ,, 6 ,, 7	3 ,, 6 ,, 9	5 ,, 6 ,, 11	7 ,, 6 ,, 13	9 ,, 6 ,, 15
1 ,, 7 ,, 8	3 ,, 7 ,, 10	5 ,, 7 ,, 12	7 ,, 7 ,, 14	9 ,, 7 ,, 16
1 ,, 8 ,, 9	3 ,, 8 ,, 11	5 ,, 8 ,, 13	7 ,, 8 ,, 15	9 ,, 8 ,, 17
1 ,, 9 ,, 10	3 ,, 9 ,, 12	5 ,, 9 ,, 14	7 ,, 9 ,, 16	9 ,, 9 ,, 18
1 ,, 10 ,, 11	3 ,, 10 ,, 13	5 ,, 10 ,, 15	7 ,, 10 ,, 17	9 ,, 10 ;, 19

2 и 1 суть 3	4 и 1 суть 5	6 и 1 суть 7	8 и 1 суть 9	
2 ,, 2 ,, 4	4 ,, 2 ,, 6	6 ,, 2 ,, 8	8 ,, 2 ,, 10	Если сія таблица
2 ,, 3 ,, 5	4 ,, 3 ,, 7	6 ,, 3 ,, 9	8 ,, 3 ,, 11	будетъ твердо
2 ,, 4 ,, 6	4 ,, 4 ,, 8	6 ,, 4 ,, 10	8 ,, 4 ,, 12	выучена учени-
2 ,, 5 ,, 7	4 ,, 5 ,, 9	6 ,, 5 ,, 11	8 ,, 5 ,, 13	комъ, тогда ему
2 ,, 6 ,, 8	4 ,, 6 ,, 10	6 ,, 6 ,, 12	8 ,, 6 ,, 14	легче будетъ при-
2 ,, 7 ,, 9	4 ,, 7 ,, 11	6 ,, 7 ,, 13	8 ,, 7 ,, 15	ступить къ раз-
2 ,, 8 ,, 10	4 ,, 8 ,, 12	6 ,, 8 ,, 14	8 ,, 8 ,, 16	рѣшенію слѣдую-
2 ,, 9 ,, 11	4 ,, 9 ,, 13	6 ,, 9 ,, 15	8 ,, 9 ,, 17	щихъ примѣровъ.
2 ,, 10 ,, 12	4 ,, 10 ,, 14	6 ,, 10 ,, 16	8 ,, 10 ,, 18	

158

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Тройное правило (regula de tribus terminis, т. е. правило о трехъ членахъ) научаетъ, какъ по тремъ даннымъ величинамъ находить четвертую искомую. Оно основывается на ученіи пропорцій или отношеній, которыя бываютъ или *прямыя*, или *обратныя*. Въ прямомъ отношеніи находятся всѣ тѣ предметы, при сравненіи коихъ можно сказать: *чѣмъ больше отъ одного, тѣмъ больше отъ другаго*; или отношеніе бываетъ прямое, если два числа вмѣстѣ увеличиваются или уменьшаются; на примѣръ: чѣмъ болѣе, или чѣмъ менѣе я получаю количество какого либо товара, тѣмъ болѣе или менѣе я долженъ дать за оный денегъ. И такъ, если за три аршина я заплатилъ 9 рублей, то за 7 аршинъ пропорціонально я долженъ заплатить болѣе; или, если за 8 фунтовъ я заплатилъ 6 рублей, то за три фунта сообразно я заплачу менѣе.

Всѣ тѣ задачи относятся къ прямому тройному правилу, въ коихъ предметы находятся въ прямомъ отношеніи. Займемся теперь только разрѣшеніемъ таковыхъ задачъ.

159

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Каждая задача изъ тройнаго правила содержитъ въ себѣ *вопросительный членъ* и *условные члены*; напр. что будутъ стоить 3 фун. кофе, если 2 фун. стоятъ 2 руб. 50 к.? Здѣсь вопросительный членъ будетъ: *что будутъ стоить 3 фун. кофе*, а условные члены: *если два фун. стоятъ два руб. съ полтиною.*

Величина вопросительнаго члена всегда ставится третьимъ членомъ, т. е. на концѣ; та величина условнаго члена, которая того же самаго наименованія, какъ величина вопросительнаго или третьяго члена, ставится первымъ членомъ, или въ началѣ; а остальная величина, составляющая другой условный членъ, ставится вторымъ членомъ. Такимъ образомъ вышеозначенная задача должна быть написана въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\underbrace{\overset{\text{первый членъ}}{\text{2 фунта}}\ (*) - \overset{\text{второй членъ}}{\text{2 руб. 50 к.}} - \overset{\text{третій членъ}}{\text{3}}}_{\text{члены одинакаго рода.}}\ \text{фунта}$$

Если данная на разрѣшеніе задача будетъ такимъ образомъ вѣрно написана, то сперва должно разсмотрѣть, имѣютъ ли первый и третій члены одинакое наименованіе, т. е. имѣютъ ли числа сихъ двухъ членовъ одинакое названіе, какъ напр. въ вышеозначенной задачѣ, первый и третій члены содержатъ въ себѣ фунты.

(*) Черту, которая здѣсь поставлена, не должно принимать за знакъ вычитанія.

160

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Если величины перваго и третьяго членовъ не одинакаго названія, наприм.

3 лота —— 4 коп. —— 6 фунтовъ

или, если въ каждомъ изъ членовъ находится по нѣскольку различныхъ наименованій, напр.

2 фунта 4 лота 2 зол.—10 руб. 45 к.—2 пуда 15 ф. 6 лот. 1 зол., то числа въ обоихъ сихъ членахъ должны быть сперва приведены въ одинакое наименованіе, напр. 2 фунта 4 лота 2 зол.—10 руб. 45 к.—2 пуда 15 ф. 6 лот. 1 зол.

4) 8 | 100) 1045 коп. | 95(

8) 68 | | 760 (8

| | 3.046 (4

3) 206 золотниковъ — 1.045 коп. 9.139 (3 золот.

Если въ задачѣ величины перваго и третьяго членовъ одинакаго наименованія, то задача исчисляется слѣдующимъ образомъ:

Третій членъ умножается на второй и произведеніе дѣлится на первый. И такъ въ вышеприведенной задачѣ второй членъ 10 руб. 45 коп. или 1.045 копеекъ, будучи помноженъ на третій, 2 пуда 15 фунт. 6 лот. 1 зол. или 9.139 золотниковъ, даетъ 9.550.255 коп., которое произведеніе будучи раздѣлено на первый членъ, 2 фунта 4 лота 2 золот. или 206 золот., даетъ $\frac{9550255}{206}$ или 46.360 коп., (*) или 463 руб. 60 копеекъ.

(*) Остатокъ въ семъ случаѣ отбрасывается, ибо обхожденіе съ дробями намъ еще неизвѣстно.

161

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Касательно того, дабы объяснить себѣ, почему, для нахожденія четвертаго искомаго члена, нужно второй членъ умножить на третій и произведеніе оныхъ раздѣлить на первый членъ, должно дать себѣ на разрѣшеніе болѣе легкой вопросъ; наприм. что будутъ стоить 8 фунтовъ хлѣба, когда 5 фунтовъ стоютъ 20 копеекъ? Этотъ самый вопросъ можно разрѣшить слѣдующимъ образомъ: если 5 фунтовъ стоютъ 20 копеекъ, то 1 фунтъ стоитъ въ 5 разъ менѣе 20 коп., слѣдственно, 4 копейки; когда же одинъ фунтъ хлѣба стоитъ 4 коп., то 8 фунт., коихъ требуется опредѣлить цѣну, будутъ стоить въ 8 разъ болѣе 4 копеекъ, посему 8 × 4 или 32 копейки. Очевидно, что умноживъ 8 на 20 коп., мы получимъ 160 копеекъ; если 160 копеекъ означаютъ плату за 8 фунтовъ, то каждый фунтъ обойдется по 20 коп., а какъ въ задачѣ сказано, что не 1 фунтъ, но 5 фунтовъ стоятъ 20 копеекъ, то изъ сего и слѣдуетъ, чтобы получить настоящую цѣну 8 фунтовъ хлѣба, надлежитъ 160 копеекъ или произведеніе втораго члена на третій уменьшить впятеро, или все тоже, что раздѣлить на 5, т. е. на первый членъ, и получимъ $\frac{160}{5}$ или 32 копейки.

По сему легкому способу можно разрѣшать всѣ задачи, принадлежащія къ простому тройному правилу.

21

162

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Рѣшеніе задачъ весьма облегчается посредствомъ, такъ называемаго, сокращенія чиселъ; наприм.

16 аршинъ —— 36 рублей —— 21 аршинъ (*)

Здѣсь число 16 въ первомъ членѣ и число 36 во второмъ членѣ можно сократить посредствомъ числа 4, и чрезъ то въ обоихъ членахъ получатся меньшія числа напр.

16 —— 36 —— 21
4 9

или: 15 фунтовъ — 12 рублей — 25 фунтовъ

Здѣсь первый и третій члены могутъ быть раздѣлены безъ остатка на пять, и мы получаемъ чрезъ сіе въ первомъ членѣ 3 фунта, а въ третьемъ членѣ 5 фунтовъ. Сіи три фунта опять могутъ быть сокращены со вторымъ членомъ такъ, что въ первомъ членѣ будетъ 1, во второмъ 4, а въ третьемъ 5.

15 ф. — 12 р. — 25 ф.
3 4 „ × 5 „
1 ф. 20 рублей

(*) Сперва ученикъ занимается разрѣшеніемъ задачъ тройнаго правила, не употребляя сокращеній; когда же онъ такимъ образомъ легко и свободно будетъ разрѣшать задачи, то можно приступить потомъ и къ сокращенію.

*

163

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТРОЙНАГО ПРАВИЛА.

Повѣрка исчисленной задачи производится такъ: примите теперь вопросительный членъ за условный, а условный за вопросительный, который теперь будетъ первымъ членомъ; отъ сего произойдетъ новый примѣръ тройнаго правила, бывшій первый членъ будетъ теперь третьимъ, а третій первымъ. Вопросъ перемѣнится въ слѣдующій: когда 5 фунтовъ стоютъ 20 рублей, то что будетъ стоить 1 фунтъ?

5 ф. — 20 руб. — 1 ф.
×
20 (5
4 руб.

Если при первой задачѣ искомое число было найдено вѣрно, то при второй непремѣнно должно выйти число, бывшее прежде условнымъ числомъ.

Примѣчаніе. I, II и III листки содержатъ въ себѣ задачи, въ коихъ оба условные члены одинакаго наименованія.

Въ IV листкѣ содержатся задачи, въ коихъ числа перваго члена суть меньшаго наименованія, чѣмъ числа третьяго члена.

Въ V, VI, VII, VIII, IX и X листкахъ числа условныхъ членовъ представлены различно.

164

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ I.

1) 4 аршина ленты стоютъ 8 рублей, что стоютъ 5 аршинъ?

2) За 4 четверика картофелю заплачено 8 рублей, что должно заплатить за 2 четверика?

3) 4 бутылки пива стоютъ 17 грив., что стоютъ 5 бут. того же пива?

4) 7 фунтовъ масла стоютъ 2 руб. 80 коп. или 280 коп., что стоютъ 12 фунтовъ?

5) Сколько должно заплатить за пять четвериковъ ржи, когда за 3 четверика заплачено было 3 руб. 10 коп.?

6) Что стоютъ пять дестей бумаги, ежели на 1 руб. 30 коп. куплено 4 дести той же бумаги?

7) На 5 рублей куплено 6 четвериковъ картофелю, сколько должно заплатить за 11 четвериковъ?

8) Сколько фунтовъ кофе могу я получить за 7 рублей, когда за 3 фунта я заплатилъ 3 руб. 50 коп.?

9) Когда 27 фунтовъ стоютъ 43 руб., то 82 фунта что будутъ стоить?

10) Что должно заплатить за 9 аршинъ сукна, шириною въ 7 четвертей, когда 12 аршинъ, той же ширины, стоютъ 96 рублей?

11) 126 куск. — 276 руб. — 314 куск.?

165

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ II.

12) 22 четверика пшеницы—43 руб.—14 четв. пшеницы?

13) Нѣкто купилъ 28 фунтовъ шерсти. Когда за 13 фун. шерсти онъ заплатилъ 5 руб. 20 коп., то что онъ далъ за остальное число фунт.?

14) 20 четвертей—195 руб.—35 четвертей?

15) 6 пуд.—104 руб.—49 пуд?

16) На 32 рубля куплено 25 четвер. гороху; сколько четвериковъ гороху можно купить на 108 руб.?

17) 6 штукъ яицъ стоютъ 2 грив. 7 коп., что стоютъ 11 штукъ?

18) Что будутъ стоить 12 аршинъ холста, когда 4 аршина стоютъ 5 руб. 7 грив. 2 коп.?

19) 15 фунтовъ клюквы стоютъ 1 руб. 85 коп., что стоютъ 3 фунта?

20) На 1 руб. 28 коп. можно купить 5 фунтовъ говядины. Одна кухарка купила 20 фунтовъ той же говядины; что она заплатила?

21) А. купилъ 3 четверика 3 четверки картофелю и заплатилъ за оный 2 руб. 70 коп.; В. хочетъ купить картофелю на 1 руб. 50 коп.; сколько онъ получитъ?

22) 6 арш.—17 руб. 25 коп. — 4 арш.?

23) 15 пудовъ желѣза стоютъ 77 руб. 40 коп., что стоютъ 9 пудовъ?

24) Одинъ слуга получилъ за 3 мѣсяца платы 25 руб. 80 коп., сколько ему слѣдуетъ получить за 9 мѣсяцевъ?

166

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ III.

25) Нѣкто имѣетъ при себѣ 29 работниковъ, которые поденно получаютъ отъ него всѣ одинакую плату. Если 15 работникамъ онъ платитъ 27 руб. 33 коп., то сколько онъ платитъ остальнымъ 14 работникамъ?

26) За 11 фунтовъ сала заплачено 2 руб. 33 коп.; требуется купить 18 фунтовъ того же сала; что будетъ стоить оное?

27) Одинъ ткачъ продалъ 2 куска полотна, одинакой доброты; въ одномъ содержалось 60 аршинъ, а въ другомъ 82 аршина. За послѣдній кусокъ онъ получилъ 164 руб. 41 коп.; сколько онъ получилъ за первый кусокъ?

28) Сколько въ 18 мѣшкахъ будетъ содержаться муки, когда въ 14 таковыхъ же мѣшкахъ считается 7 четвертей 4 четверика муки?

29) Нѣкто купилъ 10 паръ тетеревей, за каждыя 2 пары онъ платилъ по 3 руб. 80 коп.; сколько онъ заплатилъ за всѣ?

30) Когда въ 3 мѣсяца нѣкто получаетъ дохода 447 руб. 50 коп., сколько онъ получаетъ дохода въ 8 мѣсяцевъ?

31) Нѣкто издерживаетъ въ недѣлю 12 руб. 40 коп., что онъ издерживаетъ въ 13 дней?

167

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ IV.

32) 1 золотникъ стоитъ 2 гроша 1 коп., что стоютъ 2 лота?

33) Нѣкоторый работникъ получаетъ за день 1 руб. 75 коп., сколько онъ получитъ за 18 недѣль?—(Недѣля имѣетъ 6 рабочихъ дней)

34) 1 зол.—3 грив. 7 коп.—6 лот. 1 зол.?

35) 1 четвер.—1 руб. 10 коп.—5 четвертей 5 четвериковъ?

36) 1 золотн. чаю стоитъ 16 коп., что стоютъ 7 фунт. 9 лот. того же чаю?

37) 1 десятокъ яицъ стоитъ 40 коп., что стоютъ 8 десятк. и 7 яицъ?

38) 1 десть бумаги стоитъ 1 руб. 25 коп., что стоютъ 3 стопы 15 дестей?

39) Одинъ листъ синей бумаги стоитъ 1 грошъ съ 1 денежкою, что стоютъ 7 стопъ 10 дестей 9 листовъ той же бумаги?

40) 1 лотъ шелка стоитъ 3 гривны 9 коп., что стоютъ 7 фунтовъ 29 лотовъ шелка?

41) Четвертка картофелю стоитъ 34 коп., что стоютъ 16 четвертей картофелю?

42) 1 лотъ кофе стоитъ 2 гроша, что стоютъ 3 фунта 9 лотовъ?

43) На 4 руб. 75 коп. куплено пряденой бумаги 1 фунтъ, за сколько рублей я получу 9 пуд. 18 фун. бумаги?

44) 1 гранъ—2 грив. 5 коп.—3 унц. 5 драхмъ?

168

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ V.

45) 3 лота стоютъ 1 руб. 17 коп., что стоитъ 1 золотникъ?
46) Что должно заплатить за четвертку картофелю, когда четверть стоитъ 6 руб. 70 коп.?
47) Что стоитъ листъ бумаги, когда 1 руб. 20 коп. заплачено за 3 дести?
48) 8 четвертей 5 четверик. — 70 р. 75 коп. — 1 гарнецъ?
49) 2 фунта 19 лот. 1 зол. — 3 руб. 17 к. — 1 золотникъ?
50) 3 фунта сахару 2 руб. 85 коп., что 1 лотъ?
51) 18 бочекъ 9 ведръ — 109 руб. 40 коп. — 1 ведро?
52) За 30 дней слѣдуетъ получить 20 руб. 50 к., что за одинъ день?
53) 3 берковца — 217 руб. 40 к. — 1 фунтъ?
54) 15 четверт. — 112 руб. 17 к. — 1 гарнецъ?
55) 6 стопъ 9 дестей стоютъ 18 руб. 15 коп., что 1 десть?
56) На 13 руб. 80 коп., можно купить нѣкотораго товара 2 пуда 4° фун. 5 лотовъ; сколько на одну гривну?
57) 5 пуд. 9 фунт. 11 лот.—7.128 руб. 16 коп.—1 золотникъ?
58) Нѣкто за 7 мѣсяцевъ 19 дней получилъ 1.207 руб. 21 коп., сколько слѣдуетъ ему получить за 1 день?
59) 2 унц. 5 драх. 19 гран. стоютъ 17 руб. 82 коп., что стоитъ 1 гранъ?
60) 5 пуд. 37 фун. 2 лота—1.000 руб. — 1 лотъ?

169

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ VI.

61) 3 золотника стоютъ 40 коп., что стоютъ 4 лота?
62) 2 четверика ячменю стоютъ 1. р. 95 коп., что стоютъ 2 четвер.?
63) На 70 к. куплено 5 зол. чаю; сколько можно купить чаю на 3 руб. 20 коп.?
64) Что стоютъ 4 дести бумаги, когда на 3 гривны 6 коп. куплено 9 листовъ?
65) Если нѣкоторый работникъ въ день выработываетъ 2 руб. 40 к., что онъ можетъ заработать въ 6 недѣль?
66) 4 штофа водки стоятъ 6 руб. 40 коп., что будутъ стоить два ведра той же водки?
67) 13 стопъ — 50 руб. 83 коп. — 5 дестей?
68) за 6 четвериковъ овса заплачено 7 руб. 20 коп.; что должно заплатить за 3 четверика?
69) 7 лотовъ — 1 руб. 85 коп. — 13 фунт.?
70) 19 гранъ — 2 грив. 9 коп. — 3 унціи?
71) 2 фунта 14 лотовъ хлѣба стоютъ 11 коп.; сколько можно купить хлѣба на 2 руб. 15 копѣекъ.
72) 12 фунт. — 73 руб. 48 коп. — 29 пуд. 31 фунт.?
73) фунтъ сѣна стоитъ 1 грошъ, что будетъ стоить возъ сѣна, въ коемъ считается 25 пудовъ?
74) 22 лота — 2 руб. 74 коп.—3 пуда 30 фунтовъ 9 лотовъ?

22

170

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ VII.

75) За 7 четвертей 5 четвериковъ пшеницы А. заплатилъ 83 руб. 40 коп. В. желаетъ купить 3 четверти 6 четвериковъ той же пшеницы; что ему должно заплатить за оную?

76) Нѣкто нанялъ квартиру на 1 годъ за 728 руб., но сверхъ года онъ прожилъ на той квартирѣ 109 дней. Сколько ему должно заплатить хозяину за сіи 109 дней?

77) 4 дести 18 листовъ писчей бумаги стоютъ 2 руб. 70 коп., что стоютъ 2 стопы 7 дестей 9 листовъ?

78) Нѣкто купилъ на платье 5 аршинъ 9 вершковъ сукна и заплатилъ за оное 70 руб. 25 коп.; послѣ оказалось, что ему недостаточно сего сукна, и къ оному нужно было прикупить 2 арш. 14 вершк. Что онъ заплатилъ за остальное?

79) 3 фунта сахару стоютъ 3 руб. 25 коп., что будутъ стоить 5 пуд. 18 фунтовъ?

80) 25 фунтовъ — 9 руб. 30 копеекъ — 4 пуда 19 фунт. 23 лота?

81) 5 четверик. — 6 р. 20 копеекъ, — 8 четвертей 3 четвер. 7 гарнцевъ?

82) 10 четверик. — 13 руб. 50 коп. — 4 ласта 5 четвертей 6 четв. 3 гарнц.?

83) За канаву, вырытую длиною въ 207 саж. 1 аршинъ, заплачено 55 руб. 40 коп. Сколько должно заплатить за вырытье канавы, такой же ширины и глубины, только длиною въ 1.018 саж. 2 аршина?

*

171

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ VIII.

84) 30 пудовъ 15 фунт. — 627 руб. —28 коп. 9 пудовъ?

85) Что стоютъ 9 четверик. чечевицы, когда за 4 четверик. 3 гарн. заплачено 5 рублей 18 копеекъ?

86) 5 пудовъ 2 золот. — 1.026 руб. 47 коп. — 16 фунт. 12 лотовъ?

87) Что стоитъ 1 фунт. говядины, когда за 4 пуда 18 фунтовъ заплачено 26 руб. 24 коп.?

88) Если на одну рубашку пошло холста 5 аршинъ 14 вершковъ, сколько выйдетъ рубашекъ изъ 95 аршинъ того же холста?

89) 9 аршинъ сукна стоютъ 143 руб. 15 коп, что стоютъ 28 арш. 4 вершка?

90) 3 бочки 7 ведръ пива стоютъ 250 руб., что будетъ стоить половина бочки?

91) А. ежедневно вынюхиваетъ на 2 гроша табаку, и выпиваетъ бутылку чернаго пива, которая ему обходится по 17 коп.; сколько онъ издерживаетъ всего на табакъ и на пиво въ годъ?

92) 203 руб. 10 коп. — 13 четверт. 5 четв. — 517 руб. 73 коп.?

03) 3 пуда сѣна проданы за 1 руб. 38 коп.; сколько можно получить денегъ за 19 возовъ сѣна, если въ каждомъ по 25 пудовъ?

172

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ IX.

94) Когда отъ Гатчины до Царскаго села (разстояніе въ 20 верстъ) можно проѣхать въ 2 часа 15 минутъ, то отъ Гатчины до С. Петербурга съ тою же скоростію во сколько времени можно проѣхать?—(Разстояніе отъ Гатчины до С. Петербурга 42 версты.)

95) Въ одномъ полѣ нажато 1.425 суслонъ ржи; съ каждыхъ 25 суслонъ получается умолота 2 четверти, 7 четв.; сколько можно полагать умолота со всего нажатаго хлѣба?

96) Нѣкто съ 7 четвертей 5 четвер. посѣва получилъ 27 четвертей 7 четв. урожая. Сколько можно получить урожая съ 21 четверти 2 четвер. посѣва?

97) Отъ быка, за котораго было заплачено 70 руб. 75 коп., вышло говядины 7 пуд. 26 фунт. и сала 42 фунта. Если каждый фунтъ сала стоитъ по 17 коп. и за кожу быка положить 7 руб. 60 коп., то почемъ обошелся покупателю быка каждый фунтъ говядины?

98) Что стоитъ фунтъ риса, если на 86 руб. 80 коп. куплено 5 пудовъ 17 фунтовъ риса?

99) Сколько можно купить дровъ на 100 руб., если на 25 руб. 70 коп. куплено было 3 сажени?

100) На 109 руб. 20 коп. куплено овса 12 четвертей 3 четверика; что стоютъ 3 гарнца?

173

ПРОСТОЕ ПРЯМОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

Листокъ X.

101) Если одна селёдка стоитъ 9 коп., а въ бочкѣ считается 900 сельдей, то сколько должно заплатить за 2 съ половиною бочки сельдей?

102) Если курьеръ въ 2 часа 40 минутъ проѣзжаетъ 39 верстъ, то сколько верстъ онъ проѣдетъ въ однѣ сутки?

103) Если съ 3 десятинъ покосовъ получается сѣна 105 кучъ, то сколько получится кучъ съ 9 десятинъ?

104) 13 досокъ стоютъ 10 руб. 80 коп., что стоютъ полторы сотни таковыхъ же досокъ?

105) Когда 3 быка стоютъ 225 руб. 50 коп., что стоютъ 12 быковъ?

106) Если отъ каждаго быка можно положить въ сложности говядины вѣсомъ въ 6 пудовъ 14 фунтовъ, за исключеніемъ сала и кожи, то сколько потребно въ годъ быковъ на одно воспитательное заведеніе, въ коемъ ежедневно издерживается 5 пудъ 20 фунтовъ говядины?

107) Въ Россіи въ 1827 году считалось земледѣльцевъ до 36.824.190 душъ, а озимаго хлѣба было посѣяно 19.638,244 четверти. Спрашивается, по скольку посѣва приходится на каждаго земледѣльца?

Листки математического семинара для 10 класса

Н. Н. Константинов

Предлагаемые листки математического семинара дают хорошее представление об уровне и стиле преподавания в матклассах Н. Н. Константинова. По этим листкам проводились занятия в 1 и 2 четвертях в 10-м математическом классе школы №179 г. Москвы.

Листок 1, 09.09.2000

Задачи по комбинаторике

Задача 1. В кухне пять лампочек. Каждая может гореть или не гореть. Сколькими способами может быть освещена кухня?

Задача 2. Сколько можно сделать различных стандартных автомобильных номеров? (Стандартный номер имеет вид: а 123 бв 45 буква, три цифры, две буквы, две цифры; на каждом месте, предназначенном для буквы, может быть любая из 33 букв русского алфавита, на каждом месте, предназначенном для цифры, может быть любая из 10 цифр.)

Задача 3. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь?

Задача 4. Некое современное здание имеет форму куба, стоящего на четырех мощных колоннах. Имеется шесть красок. Сколькими способами можно покрасить здание в шесть цветов, так что каждая грань покрашена в один цвет и все цвета использованы?

Задача 5. Имеется кубик (игральная кость) и шесть красок. Сколькими способами можно покрасить кубик в шесть цветов, так что каждая грань покрашена в один цвет и все цвета использованы? (Два кубика считаются одинаково раскрашенными, если можно так расположить их в пространстве, что одинаково расположенные грани имеют одинаковый цвет.)

Задача 6. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску восемь ладей, так чтобы они не били друг друга? (Ладьи не различимы.)

Задача 7. Докажите, что число способов поставить на шахматную доску максимальное число не бьющих друг друга слонов есть квадрат некоторого числа.

Задача 8. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску восемь ладей, так чтобы они не били друг друга? (Все ладьи различны.)

Задача 9. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выделить из класса одного дежурного и трех его помощников? Сформулируйте, какие два способа следует считать различными.

Принцип математической индукции. Если какое-либо утверждение, в формулировке которого содержится обозначение натурального числа N (обозначим это утверждение через $T(N)$), верно при $N=1$, и из $T(N)$ следует $T(N+1)$, то это утверждение верно. (Иначе говоря, это утверждение верно при любом натуральном N). Вот схематическое изображение принципа математической индукции:

$$\frac{T(1), T(N) \to T(N+1)}{T(N)}$$

Задача 10. В помещении N лампочек. Каждая может гореть или не гореть. Сколькими способами может быть освещено помещение?

Листок 1а, 09.09.2000

Дополнительные задачи

Задача 1. Детская погремушка представляет собой кольцо, по которому свободно перемещаются шарики — два синих и три красных. Сколько существует различных погремушек? (Две погремушки одинаковы, если их можно так расположить, что расположение синих и красных шариков становится одинаковым.)

Задача 2. Та же задача, но синих шариков три, а красных четыре.

Задача 3. Дано 12 монет, одна из них фальшивая. Настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая отличается от них по весу, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Имеются двухчашечные весы без гирь. Как с помощью трех взвешиваний найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих?

Задача 4. Одним ходом можно передвинуть фишку по шахматной доске на одну клетку либо вправо, либо вверх. Сколько существует способов пройти фишкой из левого нижнего угла доски на диагональ, соединяющую левое верхнее поле с правым нижним?

Задача 5. В условиях предыдущей задачи сколько существует способов пройти фишкой из левого нижнего угла доски в правый верхний?

Задача 6. На фабрике игрушек два цеха. В первом цеху автомат производит кубики с ребром 1 см, одинаковые и одинаково покрашенные шестью красками так, что все грани имеют разные цвета. Кубики сваливают в коробки, где они ориентированы случайно. Во втором цеху из этих кубиков склеивают параллелепипеды с ребрами 1 см, 1 см, 2 см. Сколько видов готовой продукции производит фабрика? (Два параллелепипеда считаются одинаково раскрашенными, если можно так расположить их в пространстве, что одинаково расположенные грани окрашены одинаково.)

Задача 7. В самолете n мест. При посадке первой зашла старушка, которая села на произвольное место. После этого каждый пассажир, входя в самолет, садился на свое место, если оно было свободно, и на произвольное место, если его место (указанное в билете) было занято. Какова вероятность того, что пассажир, заходящий в самолет последним, сядет на свое место?

Задача 8. Общая постановка задачи. Имеется шахматная доска, бесконечная вправо и вверх. На некоторых клетках стоят фишки. Систему фишек можно изменять по следующему правилу: если поля справа и вверх от некоторой фишки оба свободны, то эту фишку можно убрать, заменив ее на две фишки на этих двух свободных полях; если же хотя бы одно из этих двух полей занято, то фишку двигать нельзя. На доске выделена некоторая фигура Φ, состоящая из нескольких клеток. В задаче требуется выяснить, можно ли, преобразуя систему фишек по указанному правилу, освободить фигуру Φ от фишек. Рассмотрите два варианта этой задачи:

а) Фигура Φ состоит из полей $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $b1$, $b2$, $b3$, $c1$, $c2$, $c3$; вначале на доске стоит одна фишка на поле $a1$.

б) Фигура Φ состоит из полей $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$; вначале на доске стоит одна фишка на поле $a1$.

Листок 1′, 13.09.2000

Математическая индукция

Не очень научная формулировка принципа математической индукции:

Если первой в очереди стоит женщина, и за *каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди женщины.*

Задача 1. Какой может быть очередь, удовлетворяющая условию: “за каждой женщиной стоит женщина”? Дайте полное описание.

Задача 2. С помощью математической индукции докажите формулу:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

(проверьте, что она верна для $n = 1$, и что из того, что она верна для n, следует, что она верна для $n + 1$).

Задача 3. На шоколадке 4 продольных борозды и 5 поперечных. Сколько нужно прямолинейных разломов по бороздам, чтобы разломать шоколадку на кусочки без бороздок? (Сложить два куска и разломить их одним разломом не разрешается).

Задача 4. На плоскости имеется n точек. Некоторые точки соединены отрезками, причем известно: 1) что любые два отрезка либо не пересекаются, либо имеют один общий конец, 2) что из любой точки в любую можно пройти по отрезкам (связность) и 3) что такой путь для каждых двух точек только один (отсутствие циклов, ацикличность). Докажите, что отрезков $n-1$.

Задача 5. Верна ли теорема: "Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из этих треугольников не остроугольный".

Вот доказательство этой теоремы.

1. Если произвольный треугольник разбит прямой на два треугольника, то один из них не остроугольный (очевидно).

2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на треугольники. Проведем еще одну линию разреза, разрезав один из маленьких треугольников на два. Один из двух новых треугольников будет не остроугольный.

По индукции теорема доказана.

Верно ли это доказательство?

Задача 6. В 1800 году в Австралию завезли несколько красноглазых кроликов и больше кроликов не завозили. К настоящему времени кролики размножились. Известно, что у красноглазых родителей все потомство красноглазое. Докажите, что все нынешние кролики в Австралии красноглазые.

Задача 7. Как Вы думаете, следует ли пытаться использовать в предыдущей задаче принцип математической индукции в обычной формулировке (данной в листке 1 или в начале этого листка) или лучше попытаться сформулировать этот принцип в другой форме? Если да, то в какой именно?

Задача 8. Верна ли следующая формулировка принципа математической индукции:

"Если из того, что $T(M)$ верно при всех M, меньших N (M и N натуральны), следует верность $T(N)$, то $T(N)$ верно при всех N"?

Листок 2, 13.09.2000

Комбинаторика (продолжение)

Задача 1. В выражении $(1+x+y)^{20}$ раскрыты скобки, но не приведены подобные. Сколько получится членов?

Задача 2. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства? (Максимальное число зубов — 32.) Сравните ответ с населением России.

Задача 3. Оцените количество различных текстов длиной в одну строчку. Сравните с числом атомов видимой части вселенной.

Задача 4. На рояле 88 клавиш. Сколько существует мелодий из шести попарно различных звуков? (Длительность не учитывается.)

Задача 5. А сколько существует аккордов из шести звуков?

Задача 6. Докажите, что коэффициенты многочлена $(1+x)^n$ (если раскрыть скобки, привести подобные и расположить слагаемые в порядке убывания степени x)совпадают с элементами n-й строки треугольника Паскаля:

номер строки

$$
\begin{array}{lccccccccc}
0 & & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

(по краям единицы, а каждый из остальных элементов равен сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 7. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

Задача 8. Обозначим k−тый слева элемент n-й строки треугольника Паскаля через C_n^k (считая самый левый элемент нулевым). Докажите, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

($n!$ — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно; $0!$ считается равным 1).

Задача 9. Сколькими способами можно представить натуральное число N в виде суммы двух натуральных слагаемых? Рассмотрите два варианта задачи: порядок слагаемых существенен и порядок несущественен.

Задача 10. Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

верное, если x — действительное число, n — целое, причем $x \geq -1$, $n > 0$.

Листок 3, 30.09.2000

Зачет по комбинаторике

I. Обязательные задачи.

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить класс, если присутствует 26 человек, а мест 28?

Задача 2. Сколькими способами можно раздать восьми человекам пять различных предметов, если каждый получает не больше одного предмета?

Задача 3. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано? (Фрукты одного вида неразличимы.)

Задача 4. В выражении $(x-1)(x-2)(x-3)...(x-100)$ раскрыты скобки и приведены подобные. Найдите коэффициент при x^{99}.

II. Задачи на выбор (требуется решить хотя бы две).

Задача 5. Сколько различных делителей имеет число 10?

Задача 6. Что вероятнее получить в сумме при двукратном бросании кости: 9 или 10?

Задача 7. Сколькими способами шашка может попасть в дамки с поля a1? (Других шашек на поле нет.)

Задача 8. Сколькими способами можно раскрасить октаэдр восемью красками, если каждая грань закрашивается одной краской, и все грани закрашиваются разными красками? (Два октаэдра считаются одинаковыми, если их можно так расположить в пространстве, что одинаково расположенные грани закрашены одинаково.)

Задача 9. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две белых ладьи и две черных так, чтобы белые не были черных?

Задача 10. В выражении $\left(1+x^5+x^7\right)^{20}$ раскрыты скобки и приведены подобные. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18}.

Листок 3′, 07.10.2000

Дополнительное зачётное задание по комбинаторике для тех, кто почти сдал зачет

Количество звездочек при номере задачи примерно соответствует трудности задачи. Для получения полного зачета достаточно набрать три звездочки.

Задача 1. На уроке бальных танцев присутствуют 8 мальчиков и 12 девочек. Сколькими способами можно составить 8 танцевальных пар для исполнения вальса (пара, исполняющая вальс, состоит из одного мальчика и одной девочки)?

Задача 2. A и B — противоположные вершины проволочного куба. Муравей ползет из A в B по ребрам куба таким образом, что никакую точку не проходит дважды. Сколько существует таких путей?

Задача 3**. В выражении $(1 + x + y)^{20}$ раскрыты скобки и приведены подобные. Найдите коэффициент при x^4y^6.

Задача 4. Сколькими способами можно раскрасить шестью красками деревянный прямоугольный параллелепипед с ребрами 1, 1, 2 ? (Каждая грань закрашивается одной краской, все краски используются; два параллелепипеда считаются одинаково раскрашенными, если их можно так расположить в пространстве, что со всех сторон они выглядят одинаково.)

Листок 3″, 14.10.2000

Зачет по комбинаторике (переписывание)

I. Обязательные задачи.

Задача 1. Сколькими способами можно положить в два кармана семь монет различного достоинства?

Задача 2. В школе 10 предметов, в среду 6 уроков. Сколькими способами можно составить расписание на среду так, чтобы все уроки были различны?

Задача 3. В выражении $(1 + x)^{56}$ раскрыты скобки и приведены подобные. Найдите коэффициенты при x^8 и x^{48}.

Задача 4. Прямая треугольная призма имеет в сечении правильный треугольник. Ее грани раскрашивают пятью красками, на каждую грань по краске. Сколько существует таких раскрасок? (Мы считаем две призмы одинаково раскрашенными, если их можно так расположить в пространстве, что они с любой стороны выглядят одинаково.)

II. Задачи на выбор (требуется решить хотя бы две).

Задача 5. Сколькими нулями оканчивается число $11^{100} - 1$?

Задача 6. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике?

Задача 7. Между каждыми двумя соседними цифрами числа 14641 вставлено k нулей. Докажите, что полученное число есть полный квадрат.

Задача 8. На карусели 8 посадочных мест для детей: 4 лошадки и 4 самолетика. Сколькими способами можно их расположить? (Два способа считаются одинаковыми, если они совпадают при некотором повороте карусели.)

Задача 9. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 15 человек?

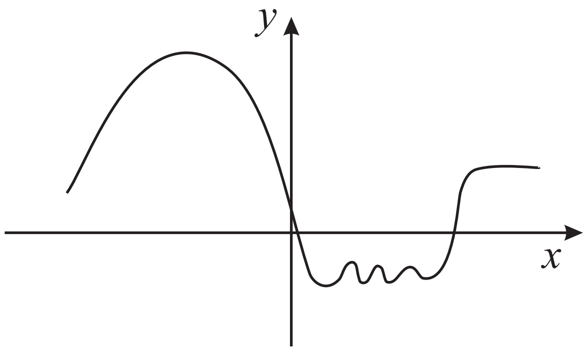
Задача 10. По дороге из школы Петя заходит к друзьям — к одному, двум или трем. Сколькими путями он может дойти до дому? (Два пути различны, если отличаются либо числом, либо последовательностью посещения друзей; каждого друга он посещает не больше одного раза.)

Листок 4, 04.10.2000

Графики

В этом задании требуется нарисовать на листе бумаги декартову прямоугольную систему координат и изобразить на ней эскиз графика одной или нескольких функций, о которых говорится в задаче. Особой точности не требуется, но желательно, чтобы основные характерные черты функции были отражены. В некоторых случаях для этого требуется подобрать подходящие масштабы по оси x и по оси y.

Задача 1. Дан график функции $y = f(x)$:



Нарисуйте графики функций: $y = 2f(x)$, $y = f(x)/2$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Задача 2 (продолжение задачи 1). Нарисуйте графики функций: $y = f(x-1)$, $y = f(x+1)$, $y = f(2x)$, $y = f(x/2)$.

Задача 3. Докажите, что графики функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ являются подобными фигурами.

Задача 4. Докажите, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin^2 x$ подобны.

Задача 5. Вертикальное сечение рюмки, проходящее через ее ось симметрии, имеет форму параболы $y = x^2 \quad (-1 < x < 1)$. В рюмку положили шарик радиуса r. При каких r шарик коснется дна рюмки?

Задача 6. Нарисуйте график функции $y = x^{100}$.

Задача 7. Нарисуйте по возможности точно этот график в интервале $0,98 < x < 1,02$. Разрешается пользоваться приближенной формулой $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \approx e \approx 2,71$, верной при малых α. Эту формулу мы потом докажем, а сейчас можете проверить ее на калькуляторе.

Задача 8. Нарисуйте на одном чертеже графики функций $y = x^{100}$ и $y = 2^x$. Сколько точек пересечения имеют эти кривые?

Задача 9. Найдите хотя бы одно такое n, большее 1, что $2^n > n^{100}$.

Листок 5, 18.10.2000

Сравнение роста функций

Задача 1. Найдите хотя бы одно такое положительное число x, что

$$x^{10} > 1000x^9 + x^4 - x + 20.$$

Задача 2. Докажите, что существует такое натуральное k,что

$$1,0001^k > 1000000.$$

Задача 3. Докажите, что существует такое натуральное k,что

$$0,999^k < 0,0000001.$$

Задача 4. Докажите, что найдется такое p, что для любого натурального k, большего $p, 1000 \times 2^k < k!$

Задача 5. Докажите, что для любого положительного числа ε найдется число N такое, что для любого k, большего N,

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2k-1}{3k+6} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Задача 6. Даны числа a, b и c. Докажите, что существует такое k, что $k^3 + ak^2 + b > k^2 + c$.

Задача 7. $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен ($a_0 \neq 0$). Докажите, что при x, достаточно большом по модулю, этот многочлен имеет тот же знак, что и его старший член. (Иначе говоря, найдется такое число C, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > C$, $P(x)$ и a_0x^n имеют одинаковый знак.)

Задача 8. Существует ли такое n, что

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}>100?$$

Задача 9. Существует ли такое n, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}>100?$$

Задача 10. Существует ли такое n, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}>100?$$

Листок 6, 15.11.2000

Ограниченность

Определение 1. Числовое множество M называется ограниченным сверху, если существует такое число C, что для любого элемента x множества M выполняется неравенство: $x<C$.

Определение 2. Числовая функция $y=f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует такое число C, что для любого x из области определения функции f выполняется неравенство: $f(x)<C$.

Задача 1. Сформулируйте определения следующих понятий:

Множество M ограничено снизу, если ...

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если ...

Функция $y=f(x)$ ограничена снизу, если ...

Определение 3. Числовое множество M называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 4. Числовое множество M называется ограниченным, если существует такое число C, что для любого элемента x множества M выполняется неравенство: $|x|<C$.

Задача 2. Эквивалентны ли определения 3 и 4? (если эквивалентны, то нужно доказать две теоремы: что из определения 3 следует определение 4, и что из определения 4 следует определение 3, а если не эквивалентны, то нужно привести пример множества, которое ограничено по одному определению, и не ограничено по другому.)

Задача 3. Сформулируйте (без отрицаний) что означает, что множество M не ограничено (выполните это упражнение для двух определений: 3 и 4).

Задача 4. Докажите, что объединение двух ограниченных множеств ограничено.

Задача 5. Пусть M и N — ограниченные множества. Определим множество P как множество всевозможных сумм $x+y$, где $x\in M, y\in N$. Докажите, что P — ограниченное множество.

Определение 5. Числовое множество M называется отделенным от нуля, если существует такое положительное число δ, что для любого элемента x множества M выполняется неравенство: $|x|>\delta$.

Задача 6. Докажите, что если множество M отделено от нуля, то множество чисел, обратных к элементам множества M, ограничено.

Задача 7. Сформулируйте обратную теорему так, чтобы она была верной, и докажите ее.

Задача 8*. При каких α множество сумм $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}$ ограничено?

Листок 7, 22.11.2000

Предел равен плюс бесконечности

Обычно, чтобы понять фразу, достаточно, чтобы фраза была грамматически правильно построена и чтобы был известен смысл всех ее слов. Фраза “Последовательность x_1, x_2, $\ldots$, x_n,... стремится к плюс бесконечности” не может быть понята таким способом, так как неизвестно, что значит "стремится" и что такое "плюс бесконечность". Не удается объяснить смысл этих слов по отдельности, но в математике пошли по другому пути, а именно дают определение этой фразе в целом:

Говорят, что последовательность x_1, x_2 , ..., x_n,... стремится к плюс бесконечности, если для любого числа C найдется такое число N, что для любого числа k, которое больше N, выполняется неравенство $x_k > C$.

Ключевую часть этой фразы запишем кратко: для любого C найдется N, что для любого $k > N$, $x_k > C$.

Меняя в этой фразе произвольным образом слова "для любого" на "найдется" и наоборот, и заменяя неравенство, получим 16 фраз:

1. Найдется C, что найдется N, что найдется $k > N$ такое, что $x_k > C$.
2. Найдется C, что найдется N, что найдется $k > N$ такое, что $x_k < C$.
3. Найдется C, что найдется N, что для любого $k > N \quad x_k > C$.
4. Найдется C, что найдется N, что для любого $k > N \quad x_k < C$.
5. Найдется C, что для любого N найдется $k > N$ такое, что $x_k > C$.
6. Найдется C, что для любого N найдется $k > N$ такое, что $x_k < C$.
7. Найдется C, что для любого N и для любого $k > N \quad x_k > C$.
8. Найдется C, что для любого N и для любого $k > N \quad x_k < C$.
9. Для любого C найдется N, что найдется $k > N$ такое, что $x_k > C$.
10. Для любого C найдется N, что найдется $k > N$ такое, что $x_k < C$.
11. Для любого C найдется N, что для любого $k > N \quad x_k > C$.
12. Для любого C найдется N, что для любого $k > N$ $x_k < C$.
13. Для любого C и для любого N найдется $k > N$ такое, что $x_k > C$.
14. Для любого C и для любого N найдется $k > N$ такое, что $x_k < C$.
15. Для любого C и для любого N и для любого $k > N \quad x_k > C$.
16. Для любого C и для любого N и для любого $k > N \quad x_k < C$.

Задание 1. Какой смысл имеет каждая из этих фраз? Приведите примеры последовательностей, удовлетворяющих и не удовлетворяющих этим условиям. Найдите среди этих понятий знакомые.

Задание 2. Найдите пары эквивалентных понятий и докажите их эквивалентность.

Листок 8, 25.11.2000

Точная верхняя грань числового множества (Supremum)

Определение 1. Верхней гранью, или верхней границей числового множества M называется такое число C, что для любого числа x из множества M выполняется неравенство: $x \le C$.

Определение 2. Число C называется точной верхней гранью числового множества M, если выполняются два условия:

1) Для любого $x \in M \quad x \le C$;

2) Для любого C', меньшего C, найдется $x \in M$ такое, что $x > C'$.

Определение 3. Точной верхней гранью числового множества M называется наименьшая из его верхних граней.

Задача 1. Докажите эквивалентность определений 2 и 3.

Задача 2. Приведите пример непустого ограниченного сверху числового множества, для которого не существует точной верхней грани в области рациональных чисел (формулировка примера не должна содержать прямого или косвенного упоминания каких-либо чисел, кроме рациональных).

Задача 3. Даны числовые множества M и N. Рассматривается множество S, составленное из всевозможных сумм $x + y$, где $x \in M$, $y \in N$. Докажите, что если $P=$ Sup $M, Q=$ Sup N, то существует точная верхняя грань множества S и Sup $S = P + Q$.

Задача 4. Сформулируйте без отрицаний, что значит, что число C не является точной верхней гранью множества M.

Задача 5. Даны множества M и N, составленные из положительных чисел. Рассматривается множество S, составленное из всевозможных произведений xy, где $x \in M$, $y \in N$. Докажите, что если $P = \operatorname{Sup} M$, $Q= \operatorname{Sup} N$, то $\operatorname{Sup} S$ существует и равен PQ.

Задача 6. Сформулируйте определение точной нижней грани множества M (Infimum, обозначение — $\operatorname{Inf} M$).

Задача 7. Пусть $C= \operatorname{Inf} M$ и $C > 0$. Рассмотрим множество N,составленное из чисел вида $\frac{1}{x}$, где $x \in M$. Докажите, что существует Supremum множества N, и $\operatorname{Sup} N = \frac{1}{C}$.

Задача 8. Пусть M — множество сумм $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$ при всевозможных целых неотрицательных n. Найдите точную верхнюю грань этого множества (и докажите, что найденное число удовлетворяет определению точной верхней грани).

Задача 9. Аналогичная задача для множества сумм

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + ... + \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

Листок 9, 02.12.2000

Зачетная работа по теме “Ограниченность”

Для получения зачета необходимо сделать в классе не меньше 5 задач, остальные сделать дома и сдать.

Задача 1. Контрольная называется *трудной,* если каждую задачу не решил хотя бы один ученик. Сформулируйте (без использования отрицаний) какую контрольную следует назвать легкой (не трудной).

Задача 2. Контрольная называется *трудной,* если каждый ученик не решил хотя бы одну задачу. Сформулируйте (без использования отрицаний) какую контрольную следует назвать легкой (не трудной).

Далее приводится ряд высказываний. Те из них, которые являются верными теоремами, докажите, а те, которые таковыми не являются, опровергните (приведите противоречащие примеры).

Задача 3. Если последовательность стремится к плюс бесконечности, то она ограничена снизу.

Задача 4. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ стремилась к плюс бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы для любого C количество членов этой последовательности, которые меньше C, было конечно.

Задача 5. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ стремилась к плюс бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы для любого C количество членов этой последовательности, которые больше C, было бесконечно.

Задача 6. Условия: а) “для любого C найдется член последовательности, который больше C” и б) “для любого C найдется бесконечно много членов последовательности, которые больше C” эквивалентны.

Задача 7. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, и последовательность $\{y_n\}$ ограничена сверху, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ ограничена сверху.

Задача 8. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, и последовательность $\{y_n\}$ не ограничена сверху, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ не ограничена сверху.

Задача 9. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, и последовательность $\{y_n\}$ не ограничена, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ не ограничена.

Задача 10. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, и последовательность $\{y_n\}$ отделена от нуля, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ не ограничена.

Листок 9$'$, 13.12.2000

Вспомогательный листок на логику определений

Задача 1. Речь идет о некоторой бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}$. Эквивалентны ли выражения:
а) “Для любого числа C найдется x_n, которое больше C.”
б) “Найдется x_n, которое больше любого числа C.”?

Задача 2. Какие из трех приведенных высказываний эквивалентны?
а) “Для любого числа C найдется x_n, которое больше C.”
б) “Для любого числа C найдется бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, которые больше C.”
в) “Для любого числа C и для любого числа N найдется число n, большее N, такое что $x > C$.”

Договоренность. Выражение:

“Почти все элементы бесконечного множества M обладают свойством P” означает: *“Свойством P обладают все элементы множества M, кроме конечного количества”* или иначе: *“Множество M элементов множества M, не обладающих свойством P, конечно”*.

Определения. Числовым интервалом называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам: $a < x < b$ (концы интервала — действительные числа a и b, $a < b$). Обозначение: (a, b).

Числовым отрезком называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам: $a \leq x \leq b$ (концы отрезка — действительные числа a и b, $a < b$). Обозначение: $[a,b]$.

Окрестностью числа x называется любой интервал, содержащий x. Окрестностью плюс бесконечности называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству: $a < x$ (открытый правый луч).

Задача 3. Эквивалентны ли следующие три определения последовательности, стремящейся к плюс бесконечности:
а) “Последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности, если для любого числа C найдется число N такое, что для любого числа n, большего N,выполняется неравенство: $x > C$.”
б) “Последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности, если для любого числа C почти все члены последовательности больше C.”
в) “Последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности, если любая окрестность плюс бесконечности содержит почти все члены последовательности.” ?

Листок 10, 20.12.2000

Расширение понятий окрестности и предела

Окрестностью бесконечности мы будем называть объединение любых открытого правого луча и открытого левого луча (см. листок 9’).

Левой полуокрестностью бесконечности мы будем называть любую окрестность плюс бесконечности, то есть любой открытый правый луч.

Левой полуокрестностью точки будем называть любой интервал, правым концом которого является эта точка.

Аналогично определяются соответствующие *правые* понятия.

Выколотой окрестностью точки мы будем называть окрестность за вычетом самой точки. (У бесконечности есть только выколотая окрестность, так как бесконечность числом не является.)

Симметричной окрестностью точки мы будем называть окрестность, которую эта точка делит на две равные части (у бесконечности нет симметричной окрестности).

$\varepsilon -$ *окрестностью точки* (эпсилон-окрестностью точки) мы будем называть ее симметричную окрестность длиной 2ε.

Далее называется ряд понятий (слов), для которых требуется дать строгую формулировку, соответствующую интуитивному смыслу этих слов. При этом старайтесь использовать два способа описания ситуаций :

1. Для любого C найдется N такое что при всех n, больших N... и

2. Для любой окрестности (полуокрестности и т.п.) чего-то найдется N такое что . . .

и еще два аналогичных способа с использованием словосочетания “почти все”. Для каждого понятия старайтесь привести все возможные варианты определения.

Продолжите начатую формулировку:

1. Последовательность $\{x_n\}$ стремится к бесконечности (без знака) если ... (смысл в том, что $\{x_n\}$ стремится к бесконечности без знака, если $\{|x_n|\}$ стремится к плюс бесконечности).

2. Последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу A, если ...

3. Последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу A справа, если ...

Неформальное задание.

Попробуйте сформулировать об этих понятиях десяток верных теорем, аналогичных теоремам о стремлении к плюс бесконечности.

Первые месяцы НМУ в протоколах

Из архивов НМУ

Н. Н. Константинов является одним из идейных вдохновителей и организаторов высшего учебного заведения нового типа в Москве — Независимого Московского Университета (НМУ). В настоящее время математический факультет НМУ (с измененным названием) входит в состав Московского Центра Непрерывного Математического Образования (см. www.mccme.ru). Мы публикуем сохранившиеся подлинники протоколов, отражающие атмосферу того интересного времени и первые шаги нового учебного заведения.

ПРОТОКОЛ №1. 16.08.90. Москва

Собрание Учредительного комитета Математического университета в г. Москве

Председатель — Константинов Н.Н.
Секретарь — Комаров С.И.
Присутствовали: см. список в приложении 1.

Повестка дня:
1. О создании новой общественной организации — Учредительного комитета Математического университета в г. Москве.
2. Выборы руководящих органов.

1. СЛУШАЛИ:
Константинова Н.Н. — о создании новой общественной организации, ее целях, задачах, об ее уставе.

ПОСТАНОВИЛИ:
1.1. Считать настоящее собрание организационным (учредительным) собранием новой общественной организации — Учредительного комитета Математического университета в г. Москве.
1.2. Принять Устав Учредительного комитета Математического университета.
1.3. Обратиться в Исполком Моссовета с просьбой о регистрации Учредительного комитета Математического университета в г. Москве в качестве общественной организации и об утверждении его Устава.
1.4. Уполномочить Комарова С.И. вести переговоры о регистрации Учредительного комитета.
1.5. Просить Комарову Л.П. предоставить ее квартиру Учредительному комитету в качестве временного юридического адреса.

2. ПОСТАНОВИЛИ:
2.1. Назначить Константинова Н.Н. председателем Учредительного комитета, Вайнтроба А.В. и Комарова С.И. — заместителями председателя.

Председатель Н.Н.Константинов
Секретарь С.И.Комаров

**Список членов Учредительного комитета
Математического университета в г. Москве**

1.	Адельсон-Вельский Г.М.	—	
2.	Бейлинсон А.А.	—	ст. н. сотр. ИТФ, профессор MIT, к.ф-м.н.;
3.	Вайнтроб А.В.	—	ст. преп. МГИАИ, к.ф-м.н.;
4.	Васильев В.А.	—	
5.	Васильев Н.Б.	—	ст. н. сотр. МГУ, к.ф-м.н.;
6.	Давидович Б.М.	—	завуч школы №57 г. Москвы;
7.	Дубровин В.А.	—	
8.	Звонкин А.З.	—	ст. н. сотр. ИНТ, к.ф-м.н.;
9.	Ильин Г.П.	—	
10.	Ильяшенко Ю.С.	—	
11.	Имайкин В.М.	—	н. сотр. ИНТ, к.ф-м.н.;
12.	Кириллов А.А.	—	проф. МГУ, д.ф-м.н;
13.	Комаров С.И.	—	мл. н. сотр. ИНТ;
14.	Константинов Н.Н.	—	уч. секр. КНМС "Зодиак", к.ф-м.н.;
15.	Ландо С.К.	—	
16.	Левитов Л.	—	ст. н. сотр. ИНТ, к.ф-м.н.;
17.	Семенов А.Л.	—	ген. директор ИНТ, д.ф-м.н;
18.	Одесский А.В.	—	
19.	Рудаков А.Н.	—	
20.	Скворцов В.А.	—	проф. МГУ, д.ф-м.н;
21.	Сосинский А.Б.	—	доцент МИЭМ, к.ф-м.н.;
22.	Фейгин Б.Л.	—	
23.	Финкельберг М.В.	—	асп. Гарвардского ун-та;
24.	Хованский А.Г.	—	
25.	Шень А.	—	н. сотр. ИППИ, к.ф-м.н.;
26.	Шубин М.А.	—	доцент МГУ, д.ф-м.н;
27.	Завьялов О.И.	—	

ПРОТОКОЛ №7. 11.10.91. Москва

Заседание Правления УК Математического ун-та в г. Москве

Председатель — Константинов Н.Н.
Секретарь — Комаров С.И.
Присутствовали: Имайкин В.М., Константинов Н.Н., Комаров С.И., Ландо С.К., Рудаков А.Н., Сосинский А.Б.

Повестка дня:
1. Об утверждении списка студентов математического факультета НМУ на 1 семестр (сентябрь-декабрь 1991 г.).
2. Об утверждении новых преподавателей.
3. О стажерах математического факультета НМУ.
4. О сроках окончания 1 семестра.
5. Об экзаменах за 1 семестр.
6. О публикациях информационных сообщений о НМУ и его математическом факультете.
7. Разное.

1. СЛУШАЛИ:
Комарова С.И. — о результатах осеннего вступительного экзамена на математический факультет НМУ и формировании списка студентов по результатам экзаменов.

ПОСТАНОВИЛИ:
1.1. Утвердить список студентов математического факультета НМУ на 1 семестр (сентябрь-декабрь 1991 г.) в количестве 40 человек (см. список в приложении 1).

2. СЛУШАЛИ:

Константинова Н.Н., Ландо С.К. — о включении Неретина Ю.А. и Грибкова И.В. в состав преподавателей по математическому анализу на 1 семестр.

ПОСТАНОВИЛИ:

2.1. Включить Неретина Ю.А. в состав преподавателей математического факультета НМУ на 1 семестр (сентябрь-декабрь 1991 г.).

2.2. Отложить вопрос о включении Грибкова И.В. в состав преподавателей математического факультета НМУ на 1 семестр до очередного заседания правления УК. До принятия окончательного решения по данному вопросу оплачивать работу Грибкова И.В. в полном размере.

3. СЛУШАЛИ:

Константинова Н.Н., Сосинского А.Б. — о стажерстве как форме подготовки преподавателей для математического факультета НМУ; Рудакова А.Н. — о кандидатурах стажеров на 1 семестр; Комарова С.И. — о размерах оплаты стажеров.

ПОСТАНОВИЛИ:

3.1. Одобрить введение на математическом факультете НМУ института стажерства.

3.2. Утвердить стажерами на 1 семестр (сентябрь-декабрь 1991 г.) Зюзину Е.Ю. и Тюрина Н.А.

3.3. Утвердить оплату стажеров в размере 15 руб/час.

3.4. Внести соответствующие изменения в списки преподавателей и в перечень размеров оплаты труда на математическом факультет НМУ (см. приложение 3).

4. СЛУШАЛИ:

Константинова Н.Н. — о сроках окончания 1 семестра.

ПОСТАНОВИЛИ:

4.1. Считать сроком окончания 1 семестра (сентябрь-декабрь 1991 г.) 15 декабря 1991 г.

4.2. Зачетную и экзаменационную сессии завершить в основном в первой неделе декабря.

5. СЛУШАЛИ:

Константинова Н.Н., Рудакова А.Н., Ландо С.К. — предложения о формах проведения экзаменов за 1 семестр, о порядке сдачи зачетов и экзаменов.

ПОСТАНОВИЛИ:

5.1. Подготовить предложения по данному вопросу к очередному заседанию Правления УК.

6. СЛУШАЛИ:

Ландо С.К., Константинова Н.Н. — о возможных формах публикации сообщений о НМУ и математическом факультет НМУ.

7. СЛУШАЛИ:

Константинова Н.Н. — о вопросах, связанных с организацией занятий во 2 семестре (февраль - май 1992 г.);

Комарова С.И. — о необходимости проведения заседания Совета математического факультета НМУ.

ПОСТАНОВИЛИ:

7.1. Подготовить предложения для Совета математического факультета НМУ и Правления УК по организации занятий во 2 семестре к очередному заседанию Правления УК.

7.2. Просить Совет математического факультета НМУ о проведении его заседания в октябре 1991 г.

Председатель Н.Н.Константинов
Секретарь С.И.Комаров

Приложение 1
к ПРОТОКОЛУ №7 заседания Правления
Учредительного комитета Математического университета в г. Москве.
Студенты математического факультета НМУ.
1 курс, 1 семестр, 1991/92 уч. год.

1. Артемов Георгий Евгеньевич
2. Билецкий Олег Михайлович
3. Блинов Михаил Львович
4. Буссукайа Искандер
5. Бычкова Юлия Сергеевна
6. Вологодский Вадим Александрович
7. Глуховский Илья Александрович
8. Дранев Юрий Яковлевич
9. Дубнов Дмитрий Владимирович
10. Еленик Илья Владимирович
11. Зуев Юрий Борисович
12. Иванов Андрей Борисович
13. Калинин Евгений Дмитриевич
14. Кановей Григорий Владимирович
15. Котлов Геннадий Борисович
16. Кузьмин Андрей Викторович
17. Львовский Андрей Михайлович
18. Ниязов Владимир Усманович
19. Панов Андрей Алексеевич
20. Пастухов Станислав Вениаминович
21. Петровская Анна Владимировна
22. Плотников Сергей Владимирович
23. Поляков Максим Евгеньевич
24. Посицельский Семен Ефимович
25. Пугачев Олег Всеволодович
26. Ретах Александр Владимирович
27. Самохин Александр Валерьевич
28. Сапожников Дмитрий Леонидович
29. Сирота Анна Александровна
30. Соловьев Александр Владимирович
31. Тейблюм Дмитрий Михайлович
32. Темкин Михаил Александрович
33. Титаренко Андрей Юрьевич
34. Турчин Виктор Эдуардович
35. Федоровский Николай Евгеньевич
36. Филатов Александр Александрович
37. Филатов Константин Николаевич
38. Червов Александр
39. Ярский Дмитрий Александрович
40. Яшин Андрей Викторович

Председатель Н.Н.Константинов
Секретарь С.И.Комаров

Приложение 2
к ПРОТОКОЛУ №7 заседания Правления
Учредительного комитета Математического
университета в г. Москве от 11.10.91.
Список преподавателей и стажеров математического
факультета НМУ в 1 семестре
(сентябрь-декабрь 1991 г.)

Преподаватели.

1. Васильев В.А. — математический анализ
2. Горелик Е.М. — математический анализ
3. Городенцев А.Л. — алгебра
4. Имайкин В.М. — математический анализ
5. Карпов В.В. — алгебра
6. Кулешов С.А. — алгебра
7. Ландо С.К. — математический анализ
8. Неретин Ю.А. — математический анализ
9. Орлов Д.О. — алгебра

Стажеры

1. Зюзина Е.Ю. — алгебра
2. Тюрин Н.А. — алгебра

Председатель Н.Н.Константинов
Секретарь С.И.Комаров

ПРОТОКОЛ №1. 29.10.91. г. Москва

Заседание Совета Математического ф-та НМУ.

Председатель — В.И.Арнольд
Секретарь — С.И.Комаров
Присутствовали: члены Совета Арнольд В.И., Кириллов А.А., Рудаков А.Н., Тихомиров В.М., Хованский А.Г.; зам. декана матем. ф-та НМУ Константинов Н.Н., начальник курса Комаров С.И.

Повестка дня:
1. Утверждение курсов лекций, лекторов и преподавателей математического ф-та на I семестр.
2. О зачетах и экзаменах за I семестр.
3. Об учебных курсах и лекторах во втором семестре.

1. СЛУШАЛИ:
Константинова Н.Н. — о составе лекторов и преподавателей.

ПОСТАНОВИЛИ:
1.1. Утвердить лекторами в I семестре по алгебре — Рудакова А.Н., по математическому анализу — Кириллова А.А., по математическому английскому языку — Сосинского А.Б.

2. СЛУШАЛИ:
Константинова Н.Н. — предложения о формах и сроках проведения зачетов и экзаменов;
Арнольда В.И. — о формах проведения экзаменов по алгебре и мат. анализу, об опубликовании списка экзаменационных задач.

ПОСТАНОВИЛИ:
2.1. Рекомендовать провести экзамены по алгебре и математическому анализу за I семестр в письменной форме.
2.2. Опубликовать списки экзаменационных задач и другие материалы курсов, прочитанных в I семестре.

2.3. Утвердить сроки проведения зачетов и экзаменов, предложенных Правлением УК ММУ.

3. Слушали:
Константинова Н.Н. — поставлен вопрос о необходимости подготовить предложения о курсах и лекторах во втором семестре.

Председатель Секретарь

ПРОТОКОЛ №8. 22.11.91. Москва

Заседание Правления УК Математического ун-та в г. Москве
Председатель — Константинов Н.Н.
Секретарь — Комаров С.И.
Присутствовали: Имайкин В.М., Константинов Н.Н., Комаров С.И., Ландо С.К., Рудаков А.Н., Сосинский А.Б.

Повестка дня:
1. О порядке сдачи зачетов и экзаменов.
2. О расписании экзаменов.
3. Об основных принципах устройства НМУ.

1. Слушали:
Имайкина В.М., Комарова С.И., Сосинского А.Б. — о порядке сдачи зачетов и экзаменов.

ПОСТАНОВИЛИ:
1.1. Утвердить следующий порядок сдачи зачетов и экзаменов:
- к экзаменам допускаются студенты и слушатели, сдавшие зачет по соответствующему предмету,
- зачет проводится в устной форме преподавателями по спискам задач, согласованных с лектором,
- экзамены проводятся письменно по спискам задач, предложенным лекторами, время экзамена 4 часа,
- зачеты проводятся по алгебре и математическому анализу,
- экзамены проводятся по алгебре, математическому анализу и математическому английскому языку,
- экзамены по алгебре и математическому анализу считать обязательными.

2. Слушали:
Комарова С.И. — о расписании экзаменов.

ПОСТАНОВИЛИ:
2.1. Провести экзамены в следующие сроки:
- по алгебре 1.12.91
- по математическому анализу 5.12.91
- по математическому английскому языку 8.12.91.

3. Слушали:
Комарова С.И., Рудакова А.Н., Константинова Н.Н. — об основных принципах структуры и устройства Независимого Московского Университета.

Председатель: Секретарь:

Краткая информация о Турнирах

По материалам Интернета

Н. Н. Константинов является создателем популярных соревнований для школьников — многопредметного Турнира имени М.В.Ломоносова, который проводится ежегодно осенью, начиная с 1978 года, а также Международного математического Турнира Городов, начиная с 1980 года; этот турнир в современном формате имеет осенний и весенний туры. Приводим краткую информацию об этих ставших массовыми турнирах, а также о Международной летней конференции Турнира Городов. (По материалам сайта www.mccme.ru).

Турнир Ломоносова

Турнир им. М. В. Ломоносова — ежегодное многопредметное соревнование по математике, физике, наукам о Земле, химии, биологии, истории, лингвистике, литературе. Цель Турнира — дать участникам материал для размышлений и подтолкнуть интересующихся к серьезным занятиям. Турнир проводится Международным оргкомитетом Турнира Городов (председатель Н. Н. Константинов), Московским Центром непрерывного математического образования, научными учреждениями, вузами и школами Москвы при поддержке Департамента образования города Москвы, МГУ им. М. В. Ломоносова, МИОО (Московского Института открытого образования), а также школами и вузами Оренбурга, Санкт- Петербурга, Харькова и других городов.

Задания ориентированы на учащихся 7-11 класса. Можно, конечно, придти и школьникам более младших классов (только задания для них, возможно, покажутся сложноватыми) — вообще, в Турнире может принять участие любой школьник. Программа во всех местах одинакова. Конкурсы по всем предметам проводятся одновременно в разных аудиториях в течении 5 часов. Дети имеют возможность свободно переходить из аудитории в аудиторию, самостоятельно выбирая предметы и время.

Турнир Городов

Турнир Городов — международная олимпиада по математике для школьников.

Задания рассчитаны на учащихся 8-11 классов. Проводится ежегодно с 1980 года.

С 1989 года проводятся 2 тура — осенний и весенний, каждый из которых состоит из двух вариантов — тренировочного и основного. Основной вариант олимпиады составляется из задач, сопоставимых по трудности с задачами Всероссийской и Международной математических олимпиад, тренировочный — из более простых. Кроме того, регулярно проходят летние конференции.

В Москве, как правило, проводится только осенний тур. Основной вариант весеннего тура совпадает по времени и частично по задачам с Московской городской математической олимпиадой.

В других городах (последние годы — более 100 городов более 25 государств Европы, Азии, Южной и Северной Америки, Австралии и Океании) Турнир проводится силами местных оргкомитетов, которые получают из Москвы задания и организуют написание работ школьниками своих городов. В некоторых городах проверка работ организуется на месте, из других работы отсылаются для проверки в Москву. Принять участие в Турнире (организовать олимпиаду у себя) может любой город (а также отдельная школа или деревня, но таких вариантов — единицы).

За успешное выступление на олимпиаде школьники награждаются дипломами, а авторы самых лучших работ приглашаются на летнюю математическую конференцию Турнира. Непременным её участником является изображённый на эмблеме самовар, ставший по этой причине символом Международного математического Турнира Городов. Наша олимпиада и, следовательно, полученные награды не имеют никакого официального статуса, хотя их международный авторитет достаточно высок.

Основной движущей силой Турнира Городов является энтузиазм математиков, студентов, учителей, ... Всем им огромное спасибо! К сожалению, в последнее время обходиться совсем без финансовой поддержки становится всё тяжелее. Участие в Турнире является безусловно бесплатным для школьников. Некоторые местные оргкомитеты перечисляют небольшие добровольные взносы.

Список из 101 города, принимавших участие в Турнире Городов в 2001-2002 гг.

Алматы	Астана	Армавир	Bahia
Blanca	Баня Лука	Барранкийя	Барнаул
Богота	Букараманга	Белград	Боровск
Бразилиа	Буэнос Айрес	Верхняя Сальда	Ванкувер
Винница	Витебск	Волжский	Волгоград
Вологда	Гагра	Гамбург	Горячий Ключ
Graz	Днепропетровск	Долгопрудный	Донецк
Екатеринбург	Ереван	Елабуга	Жуковский
Запорожье	Иваново	Ижевск	Иркутск
Казань	Калгари	Кали	Калуга
Канберра	Карсун	Киев	Киров
Кирово-Чепецк	Королев	Кострома	Крайсчеч
Краматорск	Краснодар	Красноярск	Кропоткин
Липецк	Луга	Львов	Любляна
Майкоп	Меделин	Мельбурн	Минск
Москва	Набережные Челны	Нарва	Нижний Новгород
Нижний Тагил	Ниш	Новосибирск	Новочебоксарск
Новый Сад	Норильск	Оклэнд	Омск
Первоуральск	Пермь	Перт	Ростов-на-Дону
Раменское	Рубцовск	Рязань	Санкт-Петербург
Сан Пауло	Старый Оскол	Сосновый Бор	Суботица
Стокгольм	Сургут	Сухуми	Тайвань (см. ниже)
Таллинн	Ташкент	Тихвин	Тобольск
Торонто	Томск	Тюмень	Улаанбаатар
Уфа	Харьков	Целе	Чебоксары
Череповец	Шарлотт		

Тайвань. Про Тайвань следует сказать отдельно. В этой стране в Турнире Городов участвует просто огромное количество народу — сравнимое с общим количеством участников по всему миру. В несколько выбранных мест приезжают школьники из разных частей страны. На проверку в Москву высылаются только 10-15 лучших по каждому варианту работ. Замечу, что именно тайваньские работы представляют наибольшую сложность при проверке (из-за лингвистической особенности).

Летние конференции Турнира Городов

"Конференции" Турнира Городов не похожи на научные конференции в обычном смысле слова. Здесь нет "пленарных докладов", "работы по секциям", официальной программы. Это, скорее, неформальные встречи, на которые приглашаются школьники — победители международного математического Турнира Городов — и сопровождающие их учителя.

Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы. Даже рассказ условий такого типа задач превращается в целую лекцию. Поэтому презентация задач занимает по крайней мере день работы конференции.

Решение таких задач требует больших затрат времени и значительных интеллектуальных усилий. Поэтому организационно процесс решения проходит в свободной форме: дается много времени (несколько дней), решения могут быть как индивидуальными, так и коллективными, т. е. допускается решение от любой группы объединившихся людей. Это не обязательно совпадает с “командой”, приехавшей из одного города. Жюри назначает сроки сдачи письменных решений, по традиции их два, и для них прижились названия “предварительный финиш” и “окончательный финиш”. Сданные решения проверяются, оценивается степень продвижения участников в той или иной задаче.

Затем проводится разбор решенных задач. Некоторые пункты после первого срока сдачи снимаются с конкурса. Иногда после промежуточного разбора добавляются новые задачи. Критерии успеха также отличаются от традиционных: успешность выступления оценивается по наибольшему продвижению в одной из задач.

Т.е., фактически, проводится одновременно несколько конкурсов (по каждой из задач в отдельности). В реальности многие участники не могут остановиться на какой-то единственной задаче и решают сразу несколько задач.

Вообще все участники — как школьники, так и учителя — получают возможность активного отдыха, интенсивной творческой работы и интересного общения.

Упомянем, где проходили конференции.

1-я	1989 г.	Ныо, Эстония
2-я	1990 г.	Вийтна, Эстония
3-я	1991 г.	Челябинск
4-я	1992 г.	Миасс, Челябинская обл.
5-я	1993 г.	Белорецк, Башкирия
6-я	1994 г.	Белорецк, Башкирия
7-я	1995 г.	Нови Сад, Югославия
8-я	1996 г.	Углич, Ярославская обл.
9-я	1997 г.	Переславль-Залесский, Ярославская обл.
10-я	1998 г.	Гамбург, Германия
11-я	1999 г.	ДОК ”РУСИЧИ”, Малоярославец, Калужская обл.
12-я	2000 г.	ДОК ”РУСИЧИ”, Малоярославец, Калужская обл.
13-я	2001 г.	Суботица, Югославия
14-я	2002 г.	Белорецк, Башкирия
15-я	2003 г.	Переславль-Залесский
16-я	2004 г.	Мир, Беларусь
17-я	2005 г.	Мир, Беларусь
18-я	2006 г.	Озеро Селигер (Бараново, лагерь ”Чайка”), Тверская область

Материалы конференций с 4 по 10 были опубликованы в специальных изданиях Информационного центра Турнира Городов. Начиная с 11-й, — на указанном сайте.

О московской школе №179

Школа №179 г. Москвы — многопрофильное государственное общеобразовательное учреждение, экспериментальная площадка Московского Института Открытого Образования. Информацию о школе можно найти в Интернете по адресу http://www.179.ru/

Телефон секретаря: (495)692-48-51.

Информация о наборе учащихся на 2007/2008 учебный год:

Классы самоопределения (с профильными группами: историко-филологической, математической, естественнонаучной): **8, 9, 10:** По субботам и четвергам с 15 марта 2007 г., в 17.00.

Математические классы **9:** По субботам с 10 марта 2007 г., в 17.00.

Историко-филологические классы **9:** По четвергам с 15 марта 2007 г., в 17.00.

Изобретательский класс **6:** По четвергам с 15 марта 2007 г., в 17.00.

Добор в классы: Изобретательский профиль: **7, 9, 10**; Математический профиль: **10** класс; Историко-филологический профиль: **10** класс: по субботам и четвергам с 10 марта 2007 г., в 17.00 для всех указанных классов.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

The issue is devoted to the 75-th Anniversary of N. Konstantinov, the outstanding Russian teacher of mathematics, the foundator of the world-wide famous international math competition — the Tournament of the Towns. Every item of the issue reflects a certain activity of N. Konstantinov