ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год одиннадцатый

№1 (41)

Январь-март 2007 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (41), 2007 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2007 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2007 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (41), январь – март 2007 г.

Содержание

Журналу “Математическое образование” — 10 лет

От редакции

Выход настоящего номера означает, что журналу “Математическое образование” (возрожденному в 1997 г. Фондом математического образования и просвещения) исполнилось 10 лет. Об истории возрождения журнала рассказано в №1(20), 2002 г. — публикация была посвящена 5-летию журнала. За прошедшие с тех пор 5 лет сложился достаточно стабильный круг авторов и читателей журнала. География публикаций остается обширной: от Израиля до Сибири с запада на восток; от Финляндии до Краснодарского края с севера на юг. Состав редколлегии за истекшие 5 лет не изменился. Ниже приведено современное положение тех членов редколлегии, у которых оно изменилось за прошедшее время.

Бондал Алексей Игоревич — доктор физико-математических наук, исполняющий обязанности ведущего научного сотрудника отдела алгебры МИАН.

Дориченко Сергей Александрович — учитель математики школ №№ 57 и 179 г. Москвы, председатель жюри Турнира Городов.

Дубовицкая Наталья Викторовна — старший преподаватель кафедры математического моделирования МЭИ.

Дубовицкий Александр Викторович — Генеральный директор Фонда свт. блгв. князя Александра Невского.

Имайкин Валерий Марсович — старший научный сотрудник НИИ инновационных стратегий развития общего образования Департамента Образования г. Москвы.

Саблин Александр Иванович — Доцент кафедры высшей математики Московского Государственного Университета Леса.

Компьютерное вычисление групп гомоморфизмов и автоморфизмов конечных групп

И. А. Шилин

Современный персональный компьютер можно использовать, в частности, для решения различных математических задач. В настоящей статье говорится о том, как с помощью небольших программ, составленных на языке Паскаль, можно вычислить группы гомоморфизмов и автоморфизмов конечных групп.

1. Теоретические сведения

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $\operatorname{Aut} G$ — множество автоморфизмов группы G и $\operatorname{Inn} G$ — подмножество в $\operatorname{Aut} G$, состоящее из внутренних автоморфизмов (автоморфизм ϕ называется внутренним, если можно указать такой $g \in G$, что $\phi(a) = g^{-1} \circ a \circ g$ для всех a).

Предложение1. $\operatorname{Aut} G$ — *группа относительно композиции автоморфизмов.*

Доказательство. Поскольку в настоящей статье рассматриваются конечные группы, мы ограничимся случаем, когда группа G конечна.

Как известно, множество преобразований конечного множества, состоящего из n элементов, является группой относительно композиции, которая обозначается S_n и называется симметрической группой. Таким образом, нам остается доказать, что $\operatorname{Aut} G$ — подгруппа в $S_{|G|}$, где $|G|$, как обычно, означает порядок группы G.

Пусть $\phi, \psi \in \operatorname{Aut} G$. Это означает, в частности, что существует взаимно однозначное отображение ψ^{-1}. Покажем, что, во-первых, множество $\operatorname{Aut} G$ замкнуто относительно композиции и, во-вторых, ψ^{-1} — тоже автоморфизм.

Пусть $a, b \in G$. Тогда

$$(\phi\psi)(a \circ b) = \phi(\psi(a \circ b)) = \phi(\psi(a) \circ \psi(b)) =$$

$$= (\phi\psi)(a) \circ (\phi\psi(b).$$

Так как отображение ψ^{-1} сюръективно, то существуют прообразы элементов a и b при этом отображении: пусть $\psi(c) = a$ и $\psi(d) = b$. Тогда

$$\psi^{-1}(a \circ b) = \psi^{-1}(\psi(c) \circ \psi(d)) = \psi^{-1}(\psi(c \circ d)) =$$

$$= \mathrm{id}(c \circ d) = c \circ d = \psi^{-1}(a) \circ \psi^{-1}(b). \ \square$$

Предложение 2. $\operatorname{Inn} G$ — *подгруппа в* $\operatorname{Aut} G$.

Доказательство. Пусть $\phi, \psi \in \operatorname{Inn} G$, то есть существуют $g, \hat{g} \in G$, такие, что $\phi(a) = g^{-1} \circ a \circ g$ и $\psi(a) = \hat{g}^{-1} \circ a \circ \hat{g}$ на всей области определения. Достаточно будет доказать, что $\phi\psi, \psi^{-1} \in \operatorname{Inn} G$.

Вот доказательство первого включения:

$$(\phi\psi)(a) = \phi(\psi(a)) = \phi(\hat{g}^{-1} \circ a \circ \hat{g}) =$$

$$= g^{-1} \circ \hat{g}^{-1} \circ a \circ \hat{g} \circ g = (\hat{g} \circ g)^{-1} \circ a \circ (\hat{g} \circ g).$$

Легко проверить, что отображение $\bar{\psi} : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto g \circ x \circ g^{-1}$ взаимно однозначно и является гомоморфизмом, то есть $\bar{\psi} \in \operatorname{Inn} G$. Но $\psi^{-1} = \bar{\psi}$, поскольку для любого $a \in G$

$$\psi\bar{\psi}(a) = \psi(g \circ a \circ g^{-1}) = g^{-1} \circ g \circ a \circ g^{-1} \circ g = a,$$

$$\bar{\psi}\psi(a) = \bar{\psi}(g^{-1} \circ a \circ g) = g \circ g^{-1} \circ a \circ g \circ g^{-1} = a,$$

то есть $\psi\bar{\psi} = \bar{\psi}\psi = \mathrm{id}$. □

Если группа G коммутативна, то, очевидно, $\operatorname{Inn} G = \{\mathrm{id}\}$.

Рассмотрим теперь еще одну группу $(H, \bullet)$. Будем считать, что группа H абелева. Обозначим $\operatorname{Hom}(G, H)$ множество гомоморфизмов группы G в группу H.

Предложение 3. $\operatorname{Hom}(G, H)$ *— группа относительно операции* $(\phi, \psi) \longmapsto \phi \times \psi$, *которая определена по правилу*

$$\phi \times \psi(a) = \phi(a) \bullet \psi(a).$$

Доказательство. В самом деле, во-первых, данная операция бинарна на множестве $\operatorname{Hom}(G, H)$, поскольку отображение $\phi \times \psi : G \longrightarrow H$ тоже является гомоморфизмом:

$$(\phi \times \psi)(a \circ b) = \phi(a \circ b) \bullet \psi(a \circ b) = \phi(a) \bullet \phi(b) \bullet \psi(a) \bullet \psi(b) =$$

$$= \phi(a) \bullet \psi(b) \bullet \phi(a) \bullet \psi(b) = (\phi \times \psi)(a) \bullet (\phi \times \psi)(b).$$

Во-вторых, эта операция ассоциативна:

$$((\phi \times \psi) \times \theta)(a) = (\phi \times \psi)(a) \bullet \theta(a) = \phi(a) \times \psi(a) \times \theta(a),$$

$$(\phi \times (\psi \times \theta))(a) = \phi(a) \times (\psi \times \theta)(a) = \phi(a) \times \psi(a) \times \theta(a).$$

В-третьих, относительно этой операции во множестве $\operatorname{Hom}(G, H)$ существует нейтральный элемент: им служит постоянный гомоморфизм $\epsilon : G \longrightarrow e_H$, где e_H — нейтральный элемент группы H. Действительно, в этом случае

$$(\phi \times \epsilon)(a) = \phi(a) \bullet \epsilon(a) = \phi(a) \bullet e_H = \phi(a),$$

$$(\epsilon \times \phi)(a) = \epsilon(a) \times \phi(a) = e_H \bullet \phi(a) = \phi(a).$$

Наконец, отметим, что если $\phi \in \operatorname{Hom}(G, H)$, то и отображение $\bar{\phi} : G \longrightarrow H$, $x \longmapsto [\phi(x)]^{-1}$ тоже является гомоморфизмом группы G в группу H:

$$\bar{\phi}(a \circ b) = [\phi(a \circ b)]^{-1} = [\phi(a) \bullet \phi(b)]^{-1} =$$

$$[\phi(b)]^{-1} \bullet [\phi(a)]^{-1} = \bar{\phi}(b) \bullet \bar{\phi}(a) = \bar{\phi}(a) \bullet \bar{\phi}(b).$$

При этом $\phi^{-1} = \bar{\phi}$, поскольку

$$(\phi \times \bar{\phi})(a) = \phi(a) \bullet [\phi(a)]^{-1} = e_H,$$

$$(\bar{\phi} \times \phi)(a) = \phi(a) \bullet [\phi(a)]^{-1} = e_H,$$

то есть $\phi \times \bar{\phi} = \bar{\phi} \times \phi = \epsilon$.

В случае $G = H$ вместо $\operatorname{Hom}(G, H)$ пишут $\operatorname{End} G$, так как группа $\operatorname{End} G$ состоит из эндоморфизмов группы G.

2. Постановка задачи

Группы G, удовлетворяющие условию $1 < |G| \leq 10$, это (с точностью до изоморфизма) суть следующие группы:

$\mathbb{Z}_2$ — группа порядка 2,

$\mathbb{Z}_3$ — группа порядка 3,

$\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2^2$ — группы порядка 4,

$\mathbb{Z}_5$ — группа порядка 5,

$\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ и $\mathbf{D}_3$ — группы порядка 6,
$\mathbb{Z}_7$ — группа порядка 7,
$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbf{D}_4, Q$ — группы порядка 8,
$\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3^2$ — группы порядка 9,
$\mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ и $\mathbf{D}_5$ — группы порядка 10.

Здесь $\mathbb{Z}_n$ — циклическая (и потому коммутативная) группа порядка n, $\mathbf{D}_n$ — диэдральная группа порядка $2n$ (группа самосовмещений правильного n-угольника) и Q — мультипликативная группа, состоящая из кватернионов $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$.

Все перечисленные группы, за исключением $\mathbf{D}_n$ и Q, коммутативны.

3. Вычисление групп гомоморфизмов

Чтобы найти группу $\mathrm{Hom}(G, H)$ ($\mathrm{End}\, G$), мы должны описать в программе групповые операции в G и H. Это можно сделать с помощью массивов. Например, бинарная операция в группе

$$\mathbf{D}_3 = \langle s, t \mid s^2 = t^3 = e, ts = st^2 \rangle$$

определяется таблицей Кэли

	e	t	t^2	s	st	st^2
e	e	t	t^2	s	st	st^2
t	t	t^2	e	st^2	s	st
t^2	t^2	e	t	st	st^2	s
s	s	st	st^2	e	t	t^2
st	st	st^2	s	t^2	e	t
st^2	st^2	s	st	t	t^2	e

Обозначая элементы e, t, t^2, s, st, st^2 числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно, получим описание групповой операции в $\mathbf{D}_3$ в виде массива

```
g: array [1..6,1..6] of integer =
((1,2,3,4,5,6), (2,3,1,6,4,5), (3,1,2,5,6,4),
(4,5,6,1,2,3), (5,6,4,3,1,2), (6,4,5,2,3,1))
```

Для нахождения гомоморфизмов группы G в группу H мы должны рассмотреть все отображения $G \longrightarrow H$ и выделить из них те, которые удовлетворяют определению гомоморфизма. Поскольку при возрастании порядка групп G и H увеличивается число отображений $G \longrightarrow H$ (оно равно $|H|^{|G|}$), для сокращения вычислений, производимых компьютером, целесообразно рассматривать только те отображения, которые удовлетворяют необходимым условиям гомоморфизмов: нейтральный элемент отображается в нейтральный, взаимно обратные элементы отображаются во взаимно обратные. Существенно сократить вычисления поможет следующее свойство гомоморфизма групп $\phi : G \longrightarrow H$:

$$\phi(\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{n}) = \underbrace{\phi(a) \bullet \ldots \bullet \phi(a)}_{n}.$$

Приведем пример. Программа, вычисляющая группу $\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_5, \mathbb{Z}_8)$, может выглядеть следующим образом: `var`

```
        a,b,c,d,e,f,s,w,x,y,i,j : integer;
        hom : array [1..10] of integer; {таблица значений отображения D5 в Z8}
const
        gg : array [1..10,1..10] of integer =
        ((1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), (2,3,4,5,1,8,9,10,6,7),
        (3,4,5,1,2,10,6,7,8,9), (4,5,1,2,3,7,8,9,10,6),
        (5,1,2,3,4,9,10,6,7,8), (6,9,7,10,8,1,3,5,2,4),
        (7,10,8,6,9,4,1,3,5,2), (8,6,9,7,10,2,4,1,3,5),
        (9,7,10,8,6,5,2,4,1,3), (10,8,6,9,7,3,5,2,4,1));
        {таблица Кэли для группы D5}
        gh : array [1..8,1..8] of integer =
```

```
    ((1,2,3,4,5,6,7,8), (2,3,4,5,6,7,8,1),
    (3,4,5,6,7,8,1,2), (4,5,6,7,8,1,2,3),
    (5,6,7,8,1,2,3,4), (6,7,8,1,2,3,4,5),
    (7,8,1,2,3,4,5,6), (8,1,2,3,4,5,6,7));
    {таблица Кэли для группы Z8}
BEGIN
  {шаг 1:  задаем отображение D5 в Z8}
  hom[1]:=1;
  s:=0; {счетчик гомоморфизмов}
  for a:=1 to 8 do
  for a:=1 to 8 do
  for b:=1 to 8 do
  for c:=1 to 8 do
  for d:=1 to 8 do
  for e:=1 to 8 do
  for f:=1 to 8 do
  begin
    hom[2]:=a;
    hom[3]:=gh[a,hom[2]];
    hom[4]:=gh[a,hom[3]];
    hom[5]:=gh[a,hom[4]];
    hom[6]:=b;
    hom[7]:=c;
    hom[8]:=d;
    hom[9]:=e;
    hom[10]:=f;
    w:=0;
    {далее шаг 2:  проверяем,
    является ли отображение гомоморфизмом}
    for x:=1 to 10 do
    for y:=1 to 10 do
    if hom[gg[x,y]]=gh[hom[x],hom[y]]
    then w:=w+1;
    if w=100 then
    begin
      s:=s+1;
      {шаг 3:  показываем гомоморфизм на экране}
      writeln('homomorphism number ',s,' maps:')
      for i:=1 to 10 do
      writeln('element ',i, 'of G into element ',hom[i],' of H');
      readl(j);
    end
  end;
  writeln('END);
  readln(j)
END.
```

Программы, составленные подобным образом, выводят на экран все гомоморфизмы $G \longrightarrow H$. Например, существует только 4 гомоморфизма группы $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ в группу $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$:

i	$\phi_i(1)$	$\phi_i(-1)$	$\phi_i(i)$	$\phi_i(-i)$	$\phi_i(j)$	$\phi_i(-j)$	$\phi_i(k)$	$\phi_i(-k)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2
3	0	2	2	0	0	2	2	0
4	0	0	2	2	0	0	2	2

Так как период элемента 2 группы $\mathbb{Z}_4$ равен 2, то гомоморфизмы ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4 являются элементами порядка 2 в группе $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{Z}_4)$, то есть $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2^2$.

Результаты вычислений сведены в таблицы.

	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_5$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_5$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{\epsilon\}$
$\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_7$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_7$

	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_{10}$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_5$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_5$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_7$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$

	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$
$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$
$\mathbf{D}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$
Q	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_9$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbf{D}_5$	Z_2	$\{\epsilon\}$	Z_2	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\epsilon\}$

	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_{10}$
$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^9$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$
$\mathbf{D}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$
Q	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_9$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_3^4$	$\{\epsilon\}$
$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_{10}$
$\mathbf{D}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$

4. Вычисление групп автоморфизмов

Для нахождения автоморфизмов группы G мы должны рассмотреть все отображения $G \longrightarrow G$ и выделить те из них, которые взаимно однозначны и удовлетворяют определению гомоморфизма. Если отображение окажется автоморфизмом, надо проверить, является ли этот автоморфизм внутренним.

Следует заметить, что порядки элементов группы $\operatorname{Aut} G$ не так очевидны, как порядки элементов групп $\operatorname{Hom}(G, H)$ и $\operatorname{End} G$, поэтому вычисление порядков следует “поручить” программе.

Например, программа, вычисляющая группы $\operatorname{Aut} \mathbf{D}_5$ и $\operatorname{Inn} \mathbf{D}_5$, может выглядеть следующим образом: `var`

```
    a,b,c,d,e,f,s,v,w,x,y,i,j : integer;
    hom : array [1..10] of integer;
    m : array [1..10] of integer;
const
      g : array [1..10,1..10] of integer =
      ((1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), (2,3,4,5,1,8,9,10,6,7),
      (3,4,5,1,2,10,6,7,8,9), (4,5,1,2,3,7,8,9,10,6),
      (5,1,2,3,4,9,10,6,7,8), (6,9,7,10,8,1,3,5,2,4),
      (7,10,8,6,9,4,1,3,5,2), (8,6,9,7,10,2,4,1,3,5),
      (9,7,10,8,6,5,2,4,1,3), (10,8,6,9,7,3,5,2,4,1));
      {таблица Кэли для группы D5}
BEGIN
    s:=0; {счетчик автоморфизмов}
    {шаг 1: задаем отображение D5 в D5}
    hom[1]:=1;
    for a:=1 to 10 do
    for b:=1 to 10 do
    for c:=1 to 10 do
    for d:=1 to 10 do
    for e:=1 to 10 do
    for f:=1 to 10 do
    begin
      hom[2]:=a;
      hom[3]:=g[a,hom[2]];
      hom[4]:=g[a,hom[3]];
      hom[5]:=g[a,hom[4];
      hom[6]:=b;
      hom[7]:=c;
      hom[8]:=d;
      hom[9]:=e;
      hom[10]:=f;
      w:=1;
      for i:=1 to 10 do
      for j:=1 to i-1 do
      if hom[i]=hom[j] then w:=0;
      {шаг 2: если отображение взаимно однозначно,
      то идем дальше}
      if w<>0 then
      begin
        v:=0;
        for x:=1 to 10 do
        for y:=1 to 10 do
        if hom[g[x,y]]=g[hom[x],hom[y]] then v:=v+1;
        {шаг 3: если отображение является
        гомоморфизмом, то идем дальше}
        if v=100 then
        begin
          s:=s+1;
          writeln('s=',s);
          for i:=1 to 10 do
          writeln(i,'->',hom[i]);
          {шаг 4: проверяем, является ли
          автоморфизм внутренним}
          w:=0;
          for i:=1 to 10 do
          begin
           v:=0;
           for j:=1 to 10 do
          if g[j,i]=g[i,hom[j]] then v:=v+1;
           if v=10 then w:=w+1
```

```
        end;
        if w>0 then writeln('inner');
        {шаг 5:  вычисляем порядок автоморфизма}
        w:=0;
        for i:=1 to 10 do
        if hom[i]=i then w:=w+1;
        if w=10 then writeln('ord = 1');
        else
        begin
         w:=1;
         for i:=1 to 10 do m[i]:=hom[i];
         repeat
         v:=0;
         w:=w+1;
         for i:=1 to 10 do
         begin
          m[i]:=hom[m[i]];
          if m[i]=i then v:=v+1
         end
         until v=10;
         writeln('ord = ',w)
        end;
        readln(j)
       end
     end
    end;
    writeln('END');
    readln(j)
END.
```

Результаты вычислений отражены в таблицах.

G	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8$
$\operatorname{Aut} G$	$\{\mathrm{id}\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\operatorname{Inn} G$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$

G	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbf{D}_4$	Q	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbf{D}_5$
$\operatorname{Aut} G$	$\mathbf{D}_4$	$\mathrm{PSL}(2,7)$	$\mathbf{D}_4$	S_4	$\mathbb{Z}_6$	U	$\mathbb{Z}_4$	V
$\operatorname{Inn} G$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\mathbf{D}_5$

Здесь $\mathrm{PSL}(2,7)$ — подгруппа в S_7, порожденная подстановками $(3-4)(5-6)$ и $(1-2-3)(4-5-7)$,

$$U = \langle a,b,c,d \mid a^2 = b^2 = c^4 = d^4 = acad^3 =$$

$$= bcdb^2d^3 = c^3dcd = bd^3b^2c^3 = abab = e\rangle,$$

$$V = \langle s,t \mid s^4 = t^5 = e, ts = st^2\rangle.$$

V вкладывается в S_5 как подгруппа, порожденная подстановками $(2-3-5-4)$ и $(1-2-3-4-5)$.

Глубоко признателен автор Евгению Вдовину (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН), который нашел, что вычисленные автором группа $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_2^3$, состоящая из 168 элементов, и группа $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_3^2$ порядка 48 являются соответственно группами $\mathrm{PSL}(2,7)$ и U.

Илья Анатольевич Шилин,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
МГОПУ им. М. А. Шолохова.

Email: ilyashilin@infoline.su

Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть II)

Е. З. Гржибовская, В. В. Ивлев

В работе представлен способ решения систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков, а также решение задачи Коши методом интегрируемых комбинаций.

В первой части статьи [2] было предложено обобщение метода интегрируемых комбинаций для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Суть ранее изложенного метода заключается в следующем. Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в матричной записи:

$$\mathbf{y}' = \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y}= \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \ldots\ \ldots \\ y_n(x) \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \ldots\ \ldots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}= [a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ \ldots\ \ a_{1n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ \ a_{n2} \ldots\ \ldots\ a_{nn} \end{bmatrix}$. Пусть $\alpha= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ — собственный вектор линейного оператора $\mathbf{A}^T = [a_{ki}] = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \ldots\ \ldots\ \ a_{n1} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}\ \ a_{2n} \ldots\ \ldots\ a_{nn} \end{bmatrix}$. Умножим (1) на вектор α скалярно и, просуммировав по столбцам сверху вниз, получим:

$$(\alpha, \mathbf{y}') = (\mathbf{A}^T\alpha, \mathbf{y}) + (\alpha, \mathbf{f}). \tag{2}$$

Поскольку α — собственный вектор линейного оператора $\mathbf{A}^T$, то по определению $\mathbf{A}^T\alpha\mathbf{=}\lambda\alpha$, где λ– собственное значение оператора $\mathbf{A}^T$. Поэтому для (2) имеем:

$$(\alpha, \mathbf{y}') = (\alpha, \mathbf{y})' = \lambda(\alpha, \mathbf{y}) + (\alpha, \mathbf{f}). \tag{3}$$

Обозначив линейную комбинацию $J = (\alpha, \mathbf{y}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$, получим:

$$J' = \lambda J + (\alpha, \mathbf{f}). \tag{4}$$

Уравнение (4) есть обыкновенное неоднородное линейное уравнение первого порядка с известным [1] общим решением для интегрируемой комбинации J:

$$J = Ce^{\lambda x} + e^{\lambda x}\int(\alpha, \mathbf{f})e^{-\lambda x}dx. \tag{5}$$

Для получения всех n интегрируемых комбинаций необходимо рассмотреть характеристическое уравнение для оператора $\mathbf{A}^T$. В общем случае действительных коэффициентов a_{ik} корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения могут быть: простыми или кратными вещественными, простыми или кратными комплексными.

Решение систем уравнений высших порядков

Очевидно, что вышеизложенное возможно применить для систем уравнений высших порядков. Пусть дана система n уравнений второго порядка специального вида:

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}.$$

Формально повторяя предыдущие рассуждения, в случае n различных собственных значений, получим для интегрируемых комбинаций систему уравнений вида:

$$\begin{cases} J_1'' = \lambda_1 J_1 + (\alpha_1, \mathbf{f}) \\ J_2'' = \lambda_2 J_2 + (\alpha_2, \mathbf{f}) \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ J_n'' = \lambda_n J_n + (\alpha_n, \mathbf{f}). \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае каждая свёртка-комбинация определяется как решение уравнения второго порядка. В частности, можно рассмотреть решение однородной системы:

$$\begin{cases} J_1 = c_1^1 e^{-\sqrt{\lambda_1}x} + c_2^1 e^{-\sqrt{\lambda_1}x} \\ J_2 = c_1^2 e^{-\sqrt{\lambda_2}x} + c_2^2 e^{-\sqrt{\lambda_2}x} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ J_n = c_1^n e^{-\sqrt{\lambda_n}x} + c_2^n e^{-\sqrt{\lambda_n}x}. \end{cases} \tag{7}$$

Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши в случае однородной системы ($f \equiv 0$) линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида (1). В случае n различных действительных корней характеристического уравнения для линейного оператора $\mathbf{A}^T$ можно получить систему n линейно независимых интегрируемых комбинаций вида (5):

$$\begin{cases} J_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{n1}y_n = c_1 e^{\lambda_1 x} \\ J_2 = \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{n2}y_n = c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \dots \\ J_n = \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n = c_n e^{\lambda_n x} \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя в это уравнение вектор-столбец $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$ начальных данных при $x = 0$, получим

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1^0 + \alpha_{21}y_2^0 + \dots + \alpha_{n1}y_n^0 = c_1, \\ \alpha_{12}y_1^0 + \alpha_{22}y_2^0 + \dots + \alpha_{n2}y_n^0 = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}y_1^0 + \alpha_{2n}y_2^0 + \dots + \alpha_{nn}y_n^0 = c_n. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \ \alpha_{21} \ \dots\dots \ \alpha_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n} \ \alpha_{2n} \dots\dots \alpha_{nn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 \mathbf{y}_0) \\ \dots\dots\dots \\ (\alpha_n \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}$, $e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$ Тогда, согласно (8), решение задачи Коши примет вид:

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{C}_0 e^{\lambda x},$$

или, в развёрнутом варианте:

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{n1}y_n = (\alpha_1, \mathbf{y}_0)e^{\lambda_1 x}, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{n2}y_n = (\alpha_2, \mathbf{y}_0)e^{\lambda_2 x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n = (\alpha_n, \mathbf{y}_0)e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай *кратных собственных значений*. Пусть собственное значение (например, λ_1) имеет кратность m, тогда ему соответствует один собственный и $m-1$ присоединённых векторов. Группа уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (\alpha_0, y) = c_0 e^{\lambda_1 x}, \\ (\alpha_1, y) = (c_1 + c_0 x)e^{\lambda_1 x}, \\ \dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots \\ (\alpha_{m-1}, y) = (c_{m-1} + \dots + c_1 x + c_0 x^{m-1})e^{\lambda_1 x}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{matrix} \alpha_0 - \text{собственный вектор } \lambda_1; \\ \alpha_1 - \text{первый присоединённый вектор и т.д.} \end{matrix} \tag{10}$$

Присоединённые векторы определяются из соотношений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^T\alpha_0 = \lambda_1\alpha_0, \\ \mathbf{A}^T\alpha_0 = \lambda_1\alpha_1 + \alpha_0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{A}^T\alpha_0 = \lambda_1\alpha_m + \alpha_{m-1.} \end{cases}$$

Группа начальных условий, соответствующих корню λ_1 определяется из соотношений (9)

$$\begin{cases} (\alpha_0, \mathbf{y}_0) = c_0, \\ (\alpha_1, \mathbf{y}_0) = c_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ (\alpha_{m-1}, \mathbf{y}_0) = c_{m-1}. \end{cases} \tag{11}$$

Если для собственного значения λ_1 имеется несколько собственных векторов, то формируется несколько групп начальных условий вида (11), причём общее число постоянных c_i равно m.

Наличие комплексных значений λ_k теоретических сложностей не представляет, однако технические трудности очевидны.

Рассматривая задачу Коши для случая (6), введем начальные условия при $x = 0$ для y и y':

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}'_0 = \begin{bmatrix} {y'}_1^0 \\ \dots \\ {y'}_n^0 \end{bmatrix}$$

Начальные условия для (6) определяются из условий:

$$\begin{cases} c_1^1 + c_2^1 = (\alpha_1, \mathbf{y}_0) \\ c_1^2 + c_2^2 = (\alpha_2, \mathbf{y}_0) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1^n + c_2^n = (\alpha_n, \mathbf{y}_0) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -c_1^1\sqrt{\lambda_1} + c_2^1\sqrt{\lambda_1} = (\alpha_1, \mathbf{y}'_0) \\ -c_1^2\sqrt{\lambda_2} + c_2^2\sqrt{\lambda_2} = (\alpha_2, \mathbf{y}'_0) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -c_1^n\sqrt{\lambda_n} + c_2^n\sqrt{\lambda_n} = (\alpha_n, \mathbf{y}'_0) \end{cases}$$

Отсюда для постоянных c_k^i имеем:

$$c_1^i = \frac{-(\alpha_i, \mathbf{y}'_0) + (\alpha_i, \mathbf{y}_0)\sqrt{\lambda_i}}{2\sqrt{\lambda_i}}, \quad c_2^i = \frac{(\alpha_i, \mathbf{y}'_0) + (\alpha_i, \mathbf{y}_0)\sqrt{\lambda_i}}{2\sqrt{\lambda_i}}, \ \text{где} \ i = \overline{1, n}.$$

Формально просматривается решение и для систем уравнений вида $\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}$, но необходимо учесть, что уравнение для k-ой комбинации есть уравнение $J_k^{(n)} = \lambda_k J_k + (\alpha_k, \mathbf{f})$ n-го порядка, требующее решения.

Литература

1. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре, М.: Наука, 1971.

2. Гржибовская Е.З., Ивлев В.В. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть I) // Математическое образование, №1(36), 2006.

3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Высшая школа, 1983.

4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям, СПб: Издательство “Лань”.

5. Тихонов А.Н. и др. Дифференциальные уравнения, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Гржибовская Екатерина Зориевна,
аспирантка кафедры высшей математики
Московского Государственного Открытого
Педагогического Университета им. М. А. Шолохова.

E-mail: artlonga@mail.ru

Ивлев Валерий Васильевич,
доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Открытого
Педагогического Университета им. М. А. Шолохова

Преподавание математики и софизмы

С. В. Дворянинов

В статье рассматривается возможная роль математических софизмов в современном математическом образовании.

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, ***парадоксов*** *друг.*
А. С. Пушкин

В многоплановой статье [1] обсуждаются некоторые направления модернизации школьного курса математики и концепции ее реализации, содержится приглашение к общественной конструктивной дискуссии по этим проблемам. В статье выделены некоторые из назревших и необходимых перемен и в содержании программы, и в методике преподавания, и в формах занятий. Пожалуй впервые в методической литературе здесь обозначена такая характеристика современного математического образования как *прагматичность*. Это — не так называемые задачи с практическим содержанием! В статье читаем: «...Катастрофы типа МММ или Властелины, затронувшие судьбы тысяч наших людей, на совести не только власти, нагло «кинувшей» своих граждан на произвол судьбы, но и школьного курса алгебры, который не рассматривал такие «мелочи», как финансовые пирамиды, и не готовил выпускников к коллизиям жизни, ориентируясь лишь на «высокие материи» цепочек логарифмических и тригонометрических преобразований. Наше «лучшее в мире естественнонаучное образование» показало свою полную несостоятельность при столкновении с творческими думающими мошенниками, магами, гадалками и проч.»

Итак, проблема обозначена. Заметим, что существование современного человека в мире, насыщенном машинами и механизмами, опасными производствами, химическими веществами, сделало актуальным появление сравнительно нового школьного предмета — ОБЖ — основ безопасности жизнедеятельности. Естественно возникает вопрос: каков же арсенал тех специфических средств, которые может использовать *преподаватель математики* для подготовки своих учеников к *безопасной жизнедеятельности*? — С тем, чтобы они не становились жертвами «творчески думающих мошенников», всевозможных лотерей и сомнительных «теорий». Опасности и катастрофы могут быть не только техногенными!

Доказывать и, как принято считать, думать, математика, наверное, учит. Сколько раз ученики действуют по накатанной схеме: условие – заключение, условие – доказательство... Учебники содержат только истинные высказывания и утверждения. Как тут не возникнуть иллюзии, что только такие и существуют, а ложных высказываний не бывает вовсе! Это обилие истины успокаивает, убаюкивает, притупляет бдительность. А как раз ее-то порой и не хватает в разных (и житейских тоже) ситуациях. «Люди, я любил вас! Будьте бдительны!» — большинство нынешних школьников не знают ни этого пламенного призыва, ни того, кто его провозгласил...

В математике издавна существует способ формирования интеллектуальной бдительности как составной части глобальной бдительности. Средство это — софизм. Обратимся к Математическому энциклопедическому словарю (М., Научное издательство БСЭ, 1995):

> *Софизм* (от греч. $\sigma\phi\iota\sigma\mu\alpha$ — уловка, выдумка, головоломка) — см. *Антиномия.*
>
> *Парадокс* (от греч. $\pi\alpha\rho\delta o\xi o\varsigma$ — неожиданный, странный) — то же, что *антиномия.*
>
> *Антиномия* (греч. $\nu\tau\iota\nu o\mu\alpha$, букв. противоречие в законе), *парадокс*, — ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающие друг друга суждения, причем каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами. В отличие от софизма, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, антиномия, как правило, свидетельствует о более глубоких недостатках рассматриваемой теории.

Итак, в цепочке понятий *софизм — парадокс — антиномия* софизм является первичным. Софизм — это рассуждение, содержащие замаскированные ошибки. Заметим, что умение маскировать и маскироваться в некоторых сферах является основным (маскировка военных и промышленных объектов в военном деле, зашита информации в криптографии, банковском деле и пр.). Первым сборником софизмов в России стала книга В. И. Обреимова «Математические софизмы». Рассуждения, содержащие нарочито скрытые ошибки, широко распространены (в пропаганде и контрпропаганде). В. И. Ленин [2] сравнивал с математическими софизмами подобные умозаключения в политике: эти рассуждения похожи «...как две капли воды на те рассуждения, которые математики называют математическими софизмами и в которых, — строго логичным, на первый взгляд, путем, — доказывается, что дважды два пять...». Эти слова В. И. Ленина показывают, что он знал математические софизмы и, наверное, это знание помогало ему разоблачать софизмы в политике. Подчеркивая значение математических софизмов, В. И. Ленин писал [2]: «Существуют сборники таких математических софизмов, и учащимся детям они приносят свою пользу».

Математический софизм может служить учебным, тренировочным материалом в формировании у учащихся способности правильно мыслить и понимать, уметь отличать Правду от Лжи. Математический софизм — своего рода прививка от Лжи, средство формирования иммунитета против интеллектуального оболванивания, бездумного и некритического потребления информации и рекламной всеядности, против навязываемых фактов, убеждений и представлений, фактически против попыток управлять личностью. Математический софизм, содержащий правдоподобную ложь, позволяет учащемуся в течение какого-то времени испытать на себе состояние управляемой куклы, которой доказали, что белое — это черное, а черное — белое... Решение или разоблачение софизма дает учащемуся опыт соответствующей деятельности и формирует алгоритм соответствующего поведения. И в этом своем предназначении софизмы важны не только для математики.

В преподавании элементарной математике софизмы активно используются. Имеются сборники подобных задач. Знакомство с софизмами формирует критичность мышления и его логику, разбор софизмов способствует сознательному усвоению изучаемого материала, развивает наблюдательность и вдумчивость, противостоит формализму. При восприятии абсурдного результата возрастает уровень эмоционального напряжения.

В [3] читаем такие поэтические строки: «В средние века шут был немаловажной персоной. Маленькая шутка, казавшаяся безобидной, могла разрушить королевства, когда выяснялся ее истинный смысл. Точно также в наши дни маленькие шутки вносят беспокойство в математические теории. Мы называем их парадоксами».

В учебных книгах для высшей школы софизмы присутствуют эпизодически. Некоторые их примеры можно найти в журнале «Квант». Рассмотрим три новых математических софизма, из которых два первых адресованы студентам, изучающим обыкновенные дифференциальные уравнения, а третий доступен школьникам, знакомым с исследованием функций с помощью производной.

1. В известном «Сборнике задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова (седьмое изд. 1992 г. и более поздние издания) в задаче 226 утверждается следующее: «Единственность решений уравнения $y' = |y|^\alpha$ при неотрицательных α нарушается при $0 < \alpha < 1$ в точках оси Ox.»

Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt{y}$ при положительных y (согласно сказанному, здесь имеется единственность). Разделяя переменные и интегрируя, найдем $2\sqrt{y} = x + c$. Отсюда получаем решение в явном виде $y = \frac{1}{4}(x+c)^2$. Последнее равенство задает на плоскости xOy семейство парабол, касающихся оси абсцисс, ветви которых направлены вверх. Через каждую точку верхней полуплоскости проходит ровно две параболы этого семейства. Это означает, что через каждую точку верхней полуплоскости проходит ровно две интегральные кривые данного уравнения, и тем самым единственность решения здесь нарушается! Объясните полученное противоречие.

Решение. Интегральными кривыми являются правые половины парабол, а не все параболы.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение в полярных координатах

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r\sqrt{r^2 - 1}. \tag{1}$$

При $r > 1$ для этого уравнения выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши (правая часть уравнения непрерывна по двум переменным, производная по переменной r непрерывна). Методом разделения переменных можно получить общее решение этого уравнения

$$r = \frac{1}{\cos(\varphi + c)}. \tag{2}$$

Уравнение $r\cos\varphi = 1$ задает прямую (в декартовых координатах это прямая $x = 1$). Это прямая — касательная к окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Отсюда следует, что уравнение (2) задает множество всех прямых, касательных к этой окружности. Две непараллельные касательные обязательно пересекаются. Последнее противоречит теореме о единственности решения задачи Коши! Объясните полученное противоречие.

Решение. Эта задача составлена по мотивам задачи 1 — см. выше. Траекториями здесь (интегральными кривыми) являются не прямые, а полупрямые. А две такие полупрямые — касательные к единичной окружности — не пересекаются. Каждая полупрямая соответствует бесконечному множеству решений, поскольку уравнение допускает сдвиг по φ на $2\pi n$.

3. Разыскивая наименьшее значение m функции

$$F(x) = \frac{3 - 2\cos x}{3 - 2\sin x}, \tag{3}$$

поступим обычным образом: вычислим производную и приравняем её к нулю. Получим, что

$$\sin x + \cos x - \frac{2}{3} = 0. \tag{4}$$

Теперь с учетом этого равенства (4) заменим $\cos x$ в формуле (3) для данной функции на равное ему выражение $\frac{2}{3} - \sin x$ и получим такое представление для данной функции

$$F(x) = \frac{5 + 6\sin x}{9 - 6\sin x}. \tag{5}$$

В это выражение (5) входит один синус и не входит косинус, эта формула для использования проще исходной формулы (3). В частности, по формуле (5) находим, что

$$F\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{5 - 6}{9 + 6} = \frac{-1}{15} < 0.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение функции m тем более меньше 0. Но с другой стороны с самого начала было ясно, что $m > 0$, так как и числитель и знаменатель данной в условии задачи дроби (3) положительны! Мы получили противоречие.

В чем же здесь дело и чему равно наименьшее значение функции $F(x)$?

Решение. Полученное нами представление (5) для данной функции справедливо не при всех x, а только в критических точках, там, где

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3}.$$

Легко видеть, что точка $x = -\frac{\pi}{2}$ этому уравнению (а не тождеству!) не удовлетворяет, и поэтому находить значение $F(-\frac{\pi}{2})$ по формуле (5) нельзя.

Итак, с парадоксом мы разобрались. Что же дальше? Забыть о нем? Поступить так было бы, пожалуй, опрометчиво. Постараемся извлечь из сказанного определенную пользу. Недаром говорят, что на ошибках учатся. Попробуем это сделать сейчас.

Мы видим, что для нахождения наименьшего значения m нашей функции представление (5) очень удобно: из него следует, что в критических точках функции F нас интересует только значение $\sin x$. Зная значения синуса в этих точках, мы легко найдем соответствующие значения функции, не находя самих критических точек. Найдем эти значения синуса.

Обозначим $\sin x = z$, тогда согласно основному тригонометрическому тождеству $\cos x = \pm\sqrt{1-z^2}$, и из (2) мы получим иррациональное уравнение относительно z:

$$z \pm \sqrt{1-z^2} - \frac{2}{3} = 0.$$

Решая это уравнение, находим два его корня

$$z_1 = \frac{6-\sqrt{126}}{18}, \qquad z_2 = \frac{6+\sqrt{126}}{18}.$$

Следовательно, в критических точках

$$\sin x = \frac{2-\sqrt{14}}{6} \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{2+\sqrt{14}}{6},$$

и поэтому в критических точках наша функция (равная там $F(x) = \frac{5+6\sin x}{9-6\sin x}$) принимает такие значения:

$$F_1 = \frac{7-\sqrt{14}}{7+\sqrt{14}}, \qquad F_2 = \frac{7+\sqrt{14}}{7-\sqrt{14}}.$$

Ясно, что первое число — это наименьшее значение функции, второе число — это наибольшее значение функции.

Заметим, что решение уравнения (4) относительно критических точек и последующее вычисление значений функции в этих точках по исходной формуле потребовало бы бо́льших усилий.

В начале речь шла о прагматичности и о том, как эту прагматичность развивать в школе. Приведем строки из поэмы А. К. Толстого «Портрет» [4], относящиеся к этой проблеме и написанные 130 лет назад:

Да, классик я — но до известной меры:
Я б не хотел, чтоб почерком пера
Присуждены все были землемеры,
Механики, купцы, кондуктора
Виргилия долбить или Гомера;
Избави бог! Не та теперь пора;
Для разных нужд и выгод матерьяльных
Желаю нам поболе школ реальных.

Но я скажу: не паровозов дым
И не реторты движут просвещенье —
Свою к нему способность изощрим
Лишь строгой мы гимнастикой мышленья,
И мне сдается: прав мой омоним,
Что классицизму дал он предпочтенье,
Которого так прочно тяжкий плуг
Взрывает новь под семена наук.

Литература

[1] *Розов Н. Х.* Проблема размещения новых понятий и объектов в школьном курсе математики. — Математика, № 8, 2005, с. 6–10.

[2] *Ленин В. И.* Положение Бунда в партии. — ПСС, изд. 5, т. 8.

[3] *Янг Л. И.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — Мир, 1974.

[4] *Толстой А. К.* Избранное. — М., «Правда», 1986.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики и информатики
Самарского государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук.

Email: dvoryan@yandex.ru

Прямоугольный треугольник

Е. Д. Куланин

В статье рассмотрены разные интересные факты, связанные с взаимным расположением замечательных точек, прямых и окружностей прямоугольного треугольника. Начало и конец доказательства отмечены значком □.

1. Вписанная и вневписанные окружности прямоугольного треугольника. Свойства точек касания

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Обозначим, как обычно, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = (a+b+c)/2$, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть I — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, C_I — точка касания этой окружности с гипотенузой AB, K_1 и N_1 — проекции точки C_I на катеты AC и BC соответственно, K — точка пересечения отрезков AI и C_IK_1, N — точка пересечения отрезков BI и C_IN_1 (рис. 1). Тогда выполнено равенство $C_IK = C_II = C_IN = r$.*

□ $\angle C_IKI = \angle AKK_1 = 90° - \angle KAK_1 = 90° - \alpha/2$, но из прямоугольного треугольника AC_II вытекает, что $\angle AIC_I = 90° - \angle IAC_I = 90° - \alpha/2 = \angle C_IKI$, откуда следует, что треугольник KC_II равнобедренный и $C_IK = C_II = r$. Аналогично, $C_IN = C_II = r$. □

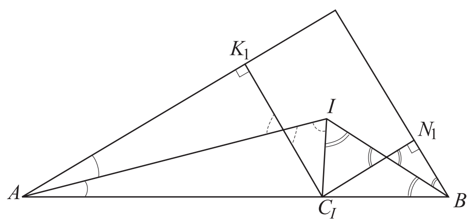

Рис. 1

Обозначим точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами и продолжениями сторон прямоугольного треугольника ABC стандартным образом, т. е. так, как указано на рис. 12 в самом конце статьи [1] (рис. 2). Напомним, что

$$\begin{aligned}
AB_I = AC_I = CA_b = CB_b = BA_c = BC_c = p - a,\\
BA_I = BC_I = CA_a = CB_a = AC_c = AB_c = p - b,\\
CA_I = CB_I = BA_a = BC_a = AB_b = AC_b = p - c,\\
AB_a = CB_c = BA_b = CA_c = AC_a = BC_b = p.
\end{aligned}$$

Так как $CA_I = CB_I$, то прямоугольник CA_IIB_I является квадратом, поэтому $CB_I = CA_I = IA_I = r$, но $CA_I = p - c$, т. е. в прямоугольном треугольнике $p - c = r$.

Теорема 1. *Каждая из следующих троек точек касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами и продолжениями сторон прямоугольного треугольника ABC лежит на одной прямой: A_I, B_b, C_b; B_I, A_a, C_a; A_b, B_I, C_I; B_a, A_I, C_I; A_a, C_c, B_c; B_b, C_c, A_c; A_b, C_b, B_c; B_a, C_a, A_c.*

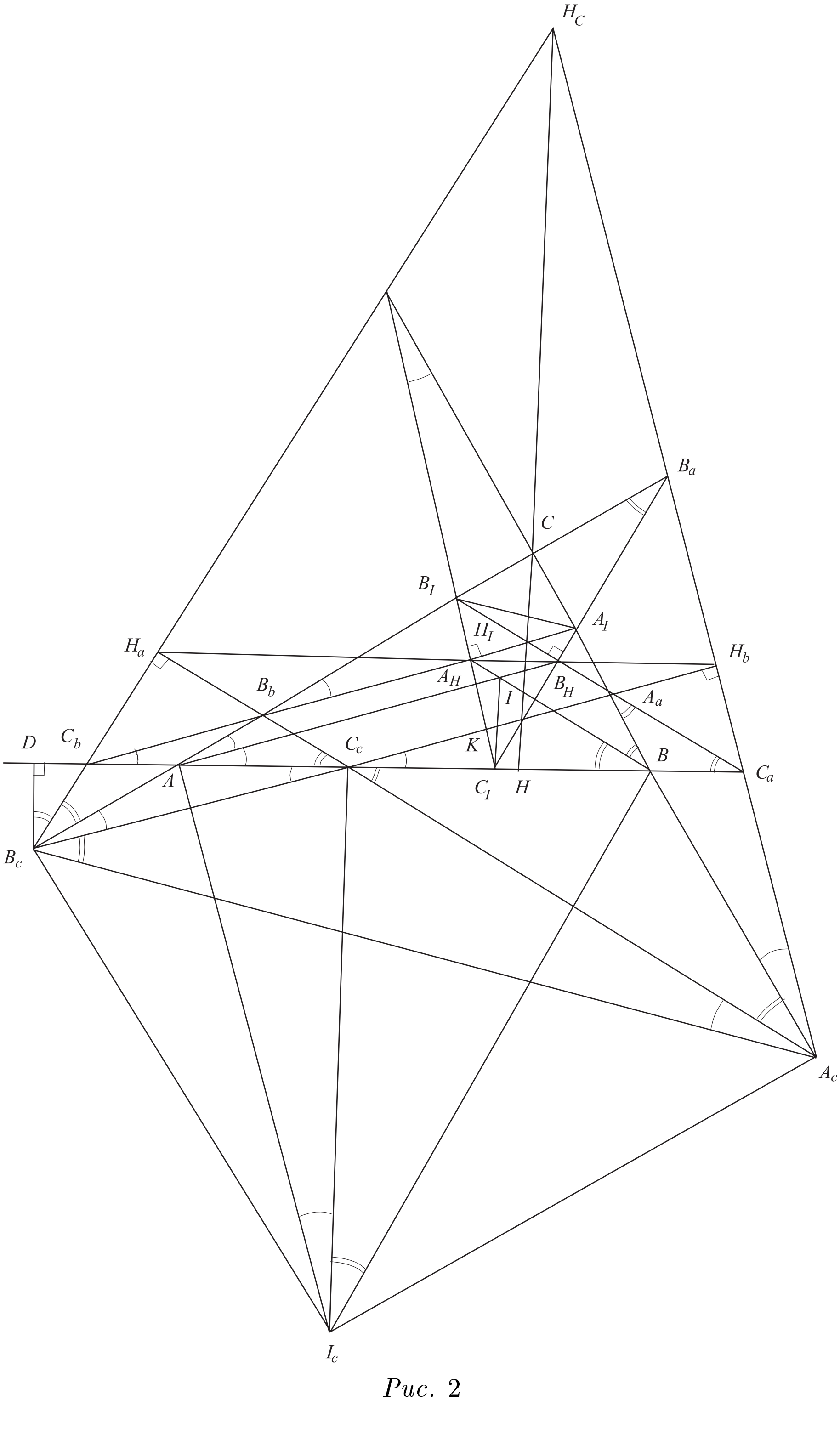

Рис. 2

□ В прямоугольном треугольнике IC_IB (рис. 2) $IC_I = r$, $BC_I = p - b$, а в прямоугольном треугольнике B_ICA_a $CB_I = r = IC_I$, $CA_a = p - b = BC_I$, поэтому треугольники CB_IA_a и IC_IB равны по катетам, откуда $\angle B_IA_aC = \angle IBC_I = \beta/2$.

Поскольку BA_a и BC_a — отрезки касательных, проведенных из точки B к вневписанной окружности I_a, то $BA_a = BC_a$ и $\angle BA_aC_a = \angle BC_aA_a = 1/2\angle ABC = \beta/2$ (угол ABC — внешний угол треугольника A_aBC_a).

Итак, $\angle B_IA_aC = \angle BA_aC_a$, причем точки B, A_a, C лежат на одной прямой. Это означает, что и точки B_I, A_a, C_a лежат на одной прямой. Аналогично получим, что точки A_I, B_b, C_b также лежат на одной прямой. Так как $\angle BAC = \alpha$ — внешний угол равнобедренного треугольника B_cAC_c, то $\angle AB_cC_c = 1/2\angle BAC = \alpha/2$.

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике B_cCA_a $CA_a = BA_I = p - b$, $CB_c = p$, а в прямоугольном треугольнике AC_cI_c $AC_c = BC_I = p - b = BA_I$. Далее, $I_cC_c = I_cA_c$ как радиусы вневписанной окружности I_c, но $I_cA_c = B_cC = p$, т. е. попутно мы доказали, что радиус r_c вневписанной окружности I_c прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) равен полупериметру этого треугольника.

Таким образом, $CA_a = AC_c$ и $I_cC_c = CB_c$, и треугольник A_aCB_c равен треугольнику AC_cI_c по катетам, но $\angle AI_cC_c = \angle IAC_I$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, а $\angle IAC_I = 1/2\angle BAC = \alpha/2$. Мы получили, что прямые B_cC_c и B_cA_a проходят через точку B_c и образуют один и тот же угол $\alpha/2$ с прямой B_cC. Отсюда следует, что прямые B_cC_c и B_cA_a совпадают, а это и означает, что точки B_c, C_c, A_a лежат на одной прямой. Точно так же показывается, что и точки A_c, C_c, B_b лежат на одной прямой.

Докажем теперь, что точки A_b, C_b, B_c лежат на одной прямой. Прямоугольный треугольник A_bCB_c равен прямоугольному треугольнику BC_cI_c по катетам ($A_bC = BC_c$, $CB_c = C_cI_c$), поэтому $\angle CB_cA_b = \angle C_cI_cB = \beta/2$ ($\angle C_cI_cB = \angle C_IBI$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Обозначим через C'_b точку пересечения прямых B_cA_b и AB. Для того, чтобы показать то, что точки B_c, C_b, A_b лежат на одной прямой, достаточно убедиться в том, что $AC'_b = AC_b = r$.

Опустим из точки B_c перпендикуляр B_cD на прямую AB. Тогда в прямоугольном треугольнике AB_cD $\angle AB_cD = 90° - \angle B_cAD = 90° - \angle BAC = 90° - \alpha = \beta$, поэтому $\angle DB_cC'_b = \angle C'_bB_cA = \beta/2$, т. е. $B_cC'_b$ — биссектриса угла AB_cD.

Итак, наша задача свелась к тому, чтобы доказать, что в прямоугольном треугольнике AB_cD с острым углом β и гипотенузой $AB_c = p - b$ биссектриса угла AB_cD отсекает от большего катета отрезок длины r, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку треугольник AB_cD равен треугольнику C_IBN_1 из леммы 1 ($AB_c = BC_I = p - b$, $\angle AB_cD = \angle N_1BC_I = \beta$), то справедливость этого утверждения вытекает из той же леммы 1.

Таким образом, точки C'_b и C_b совпадают, поэтому точки A_b, C_b, B_c лежат на одной прямой. Для точек A_c, C_a, B_a доказательство аналогично. □

Предложение 1. *Точка пересечения высот треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его сторонами лежит на высоте этого прямоугольного треугольника.*

□ Поскольку прямые B_bA_I и A_aB_I параллельны соответственно биссектрисамAI и BI треугольника ABC (рис. 2), которые в свою очередь перпендикулярны соответственно сторонам B_IC_I и A_IC_I треугольника $A_IB_IC_I$, то ортоцентр H_I треугольника $A_IB_IC_I$ совпадает с точкой пересечения прямых B_bA_I и A_aB_I.

Учитывая то, что I — центр описанной окружности треугольника $A_IB_IC_I$, а точка C симметрична точке I относительно стороны A_IB_I, получим, что четырехугольник C_IICH_I — параллелограмм, поэтому $CH_I \,||\, IC_I$, но $IC_I \perp AB$, так как C_I — точка касания вписанной окружности с гипотенузой AB. Отсюда следует, что и $CH_I \perp AB$, а это и означает, что точка H_I лежит на высоте CH треугольника ABC. □

2. О некоторых свойствах средней линии прямоугольного треугольника

Предложение 2. *Основания высот треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его сторонами, проведенных из точек касания этой окружности с катетами, лежат на средней линии данного прямоугольного треугольника, параллельной его гипотенузе.*

□ Обозначим основания высот треугольника $A_IB_IC_I$, опущенных на стороны B_IC_I и A_IC_I через A_H и B_H соответственно (рис. 2). Так как $\angle A_IA_HB_I = \angle A_IB_HB_I = 90°$, то точки A_I, B_I, A_H, B_H лежат на одной окружности, поэтому $\angle A_HB_HC_I = \angle A_IB_IA_H$, но $\angle A_IB_IC_I = \angle A_IC_IB$, поскольку каждый из этих углов измеряется половиной дуги A_IC_I (угол $A_IB_IC_I$ — вписанный, а угол A_IC_IB образован касательной C_IB и хордой C_IA_I).

Таким образом, $\angle A_HB_HC_I = \angle A_IC_I\text{B}$, откуда следует, что $A_HB_H \,||\, AB$. Аналогично, $\angle A_IC_IB_I = \angle CB_IA_I = 45°$ и поэтому прямоугольные треугольники $A_IA_HC_I$ и $B_IB_HC_I$ являются равнобедренными. Отсюда вытекает, что точки A_H и B_H лежат на серединных перпендикулярах сторон A_IC_I и B_IC_I, совпадающих с биссектрисами углов ABC и BAC. Так как $A_HI \,||\, H_IB_H$ и $A_HH_I \,||\, IB_H$, то четырехугольник $A_HIB_HH_I$ — параллелограмм и его диагональ A_HB_H проходит через середину отрезка IH_I, но четырехугольник IC_IH_IC также является параллелограммом (см. предложение 1) и поэтому середина отрезка IH_I совпадает с серединой отрезка C_IC. Итак, прямая A_HB_H параллельна AB и проходит через середину отрезка C_IC, откуда следует, что она проходит и через середины катетов AC и BC треугольника ABC, т. е. точки A_H и B_H лежат на средней линии треугольника ABC, параллельной его гипотенузе AB. □

Следствие 1. *Центр окружности Эйлера треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его сторонами лежит на средней линии этого прямоугольного треугольника, параллельной его гипотенузе.*

□ Поскольку I — центр описанной окружности треугольника $A_IB_IC_I$, а H_I — его ортоцентр, то центр окружности Эйлера треугольника $A_IB_IC_I$, совпадает с серединой отрезка IH_I, которая в свою очередь совпадает с серединой отрезка A_HB_H, лежащего в силу предложения 2 на средней линии треугольника ABC, параллельной его гипотенузе AB. □

Предложение 3. *Обозначим через H_c точку пересечения прямых A_cB_a и B_cA_b. Тогда центр описанной окружности треугольника $A_cB_cH_c$ совпадает с вершиной C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, а точка пересечения высот — с точкой касания C_c вневписанной окружности I_c с гипотенузой AB треугольника ABC.*

□ Так как прямоугольный треугольник A_cCB_c равнобедренный (рис. 2), то $\angle CA_cB_c = \angle CB_cA_c = 45°$, поэтому

$$\begin{aligned}\angle A_cH_cB_c &= 180° - \angle B_cA_cH_c - \angle A_cB_cH_c \\ &= 180° - (\angle B_cA_cC + \angle CA_cH_c) - (\angle A_cB_cC + CB_cH_c) \\ &= 180° - (\angle B_cA_cC + \angle A_cB_cC) - \angle CA_cH_c - \angle CB_cH_c \\ &= 180° - 90° - \alpha/2 - \beta/2 = 90° - (\alpha+\beta)/2 = 90° - 45° = 45°.\end{aligned}$$

Опишем из точки C как из центра окружность радиусом CA_c. Поскольку $CB_c = CA_c$, то эта окружность пройдет через точку B_c и прямой угол A_cCB_c будет центральным углом этой окружности. Тогда из любой точки дуги A_cB_c этой окружности, расположенной по одну сторону с точкой C от хорды A_cB_c, отрезок A_cB_c виден под углом 45°.

Но, как мы показали, $\angle A_cH_cB_c = 45°$. Поэтому точка H_c лежит на построенной окружности и, таким образом, точка C является центром описанной окружности треугольника $A_cB_cH_c$. Далее, так как $\angle C_IA_bA_c = \angle A_bA_cH_c$, то $A_bC_I \,||\, H_cA_c$, но $B_cA_a \,||\, AI$, $AI \perp A_bC_I$, откуда следует, что $AI \perp H_cA_c$, но тогда и $B_cA_a \perp H_cA_c$. Аналогично, $A_cB_b \perp H_cB_c$.

Обозначим точки пересечения прямых B_cA_a и H_cA_c, A_cB_b и H_cB_c через H_b и H_a соответственно. Тогда высоты A_cH_a и B_cH_b треугольника $A_cB_cH_c$ пересекаются в точке C_c. □

Следствие 2. *Центр окружности Эйлера треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности прямоугольного треугольника с его гипотенузой и продолжениями катетов лежит на средней линии этого прямоугольного треугольника, параллельной гипотенузе.*

□ Поскольку точка C_c является согласно предложению 3 ортоцентром треугольника $A_cB_cH_c$, то окружности Эйлера треугольников $A_cB_cC_c$ и $A_cB_cH_c$ совпадают, но так как C — центр описанной окружности треугольника $A_cB_cH_c$, то центр окружности Эйлера треугольника $A_cB_cH_c$ совпадает с серединой отрезка CC_c, т. е. лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной гипотенузе AB. □

Следствие 3. *Расстояние между центрами окружностей Эйлера треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его сторонами и треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности этого же прямоугольного треугольника с его гипотенузой и продолжениями катетов равно полуразности катетов этого прямоугольного треугольника.*

□ Согласно следствиям 1 и 2, отрезок, соединяющий центры окружностей Эйлера треугольников $A_IB_IC_I$ и $A_cB_cC_c$ (рис. 2) является средней линией треугольника C_ICC_c и поэтому равен

$$\begin{aligned}1/2C_IC_c = 1/2(AB - AC_c - BC_I) = 1/2(AB - 2BC_I) = \\ = 1/2(c - 2(p - b)) = 1/2(c - 2p + 2b) = 1/2(b - a).\end{aligned}$$

□

Предложение 4. *Точка пересечения высот треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности прямоугольного треугольника с его гипотенузой и продолжениями катетов лежит на продолжении высоты этого прямоугольного треугольника.*

□ Угол B_cCH_c — центральный, а угол $B_cA_cH_c$ — вписанный угол описанной окружности треугольника $A_cB_cH_c$ (рис. 2), опирающиеся на одну и ту же дугу B_cH_c, поэтому

$$\angle B_cCH_c = 2\angle B_cA_cH_c = 2(\angle B_cA_cC + \angle CA_cH_c) = 2(45^\circ + \alpha/2) = 90^\circ + \alpha.$$

Но из прямоугольного треугольника ACH $\angle ACH = 90^\circ - \alpha$, т. е.

$$\angle ACH + \angle ACH_c = \angle ACH + \angle B_cCH_c = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ.$$

Отсюда следует, что углы ACH и ACH_c смежные и, таким образом, точки H, C, H_c лежат на одной прямой.

Можно, конечно, было бы доказать данный факт так же, как и предложение 1, используя то, что четырехугольник $I_cC_cH_cC$ — параллелограмм, сторона I_cC_c которого перпендикулярна AB. □

Предложение 5. *Основания высот треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности прямоугольного треугольника с его гипотенузой и продолжениями катетов, проведенных из точек касания этой окружности с продолжениями катетов, лежат на продолжениях средней линии данного прямоугольного треугольника, параллельной гипотенузе.*

□ Обозначим основания высот, опущенных из точек A_c и B_c, через H_a и H_b соответственно (рис. 2). Тогда радиус I_cC_c описанной окружности треугольника $A_cB_cC_c$ перпендикулярен H_aH_b и, таким образом, $H_aH_b \,||\, AB$. С другой стороны, так как C – центр описанной окружности треугольника $A_cB_cH_c$, то C лежит на серединных перпендикулярах сторон A_cH_c и B_cH_c.

Учитывая то, что $\angle A_cH_cB_c = 45^\circ$, получим, что точки H_a и H_b также лежат на серединных перпендикулярах отрезков A_cH_c и B_cH_c, откуда вытекает, что $H_aC \perp A_cH_c$ и $H_bC \perp B_cH_c$. Поскольку C_cH_b и C_cH_a также перпендикулярны соответственно A_cH_c и B_cH_c, то четырехугольник $C_cH_aCH_b$ — параллелограмм. Итак, прямая H_aH_b проходит через середину отрезка CC_c параллельно AB, поэтому точки H_a и H_b лежат на продолжениях средней линии прямоугольного треугольника ABC, параллельной гипотенузе AB. □

Литература

[1] Е. Д. Куланин. О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника. Журнал «Математическое образование», № 4(39), 2006.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник.

E-mail: lucas03@mail.ru

Листки математического семинара для 10 класса

Н. Н. Константинов

Предлагаемые листки математического семинара дают хорошее представление об уровне и стиле преподавания в матклассах Н. Н. Константинова. По этим листкам проводились занятия в 3 и 4 четвертях в 10-м математическом классе школы №179 г. Москвы.

Листок 11, 13.01.2001

Сравнение бесконечных множеств

Определение. Два множества A и B называются количественно эквивалентными или равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. *(Взаимно-однозначным соответствием или биекцией двух множеств A и B называется такое их соответствие, при котором каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, так что при этом и каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A.)*

Определение. n-отрезком натурального ряда называется множество натуральных чисел от 1 до n: 1, 2, 3, ... , n.

Определение. Говорят, что множество A конечно и содержит n элементов, если существует биективное соответствие этого множества и n-отрезка натурального ряда.

Задача 1. Если множество A содержит n элементов и в то же время m элементов, то $n = m$.

Эту теорему можно нестрого сформулировать так: если в множестве n элементов, то как его ни считай, их все равно будет n. Для бесконечных множеств это неверно.

Задача 2. В некотором кинотеатре бесконечное число мест, занумерованных натуральным рядом, так же занумерованы билеты. Все билеты проданы, но перед запуском зрителей приехала делегация, которую необходимо посадить в зал. Как должен распорядиться администратор при рассадке зрителей, чтобы этого добиться? (Дополнительных стульев нет.)

Определение. Множество называется счетным, если существует его биекция с натуральным рядом.

В следующих шести задачах требуется доказать счетность указанных множеств.

Задача 3. Множество всех четных положительных чисел.

Задача 4. Множество всех целых чисел (включая отрицательные и 0).

Задача 5. Множество узлов бесконечной во все стороны клетчатой бумаги.

Задача 6. Множество теорем, которые когда-либо будут доказаны.

Задача 7. Множество всех рациональных чисел.

Задача 8. Множество корней всех квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Задача 9. Если A счетно и B счетно, то $A \cup B$ счетно. (Если $a \in A$ и $a \in B$, то a входит в объединение как один элемент, а не как два.)

Задача 10. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Сообщение. В январе занятия семинара проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена неожиданная контрольная работа на логическую тему (помимо обычных тематических контрольных), но в какой именно день, вы накануне знать еще не будете.

Листок 12, 17.01.2001

Несчетные множества

Теорема. Множество всевозможных бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.

Доказательство. Допустим противное; пусть всевозможные последовательности из 0 и 1 занумерованы натуральными числами. Кроме того, каждый член последовательности имеет номер в своей последовательности. Через a_{ij} мы будем обозначать член j-той последовательности, номер которого в своей последовательности i. Рассмотрим последовательность a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots$,

$a_{ii}, \ldots$, которой из каждой первоначальной последовательности взят один элемент, а именно, из i-той последовательности i-тый элемент.

Теперь рассмотрим последовательность $\{b_{ij}\}$, построенную по правилу: $b_i = 1 - a_{ii}$ (то есть если $a_{ii} = 0$, то $b_i = 1$, а если $a_{ii} = 1$, то $b_i = 0$). Последовательность $\{b_i\}$ отсутствует в нашем списке, действительно, от строчки номер j она отличается в j-том члене, тем самым отличается от всех строчек. Противоречие.

Задача 1. Если из счетного множества что-либо выбросить, то останется конечное или счетное множество. Это можно сформулировать так: счетное множество — наименьшее из бесконечных множеств.

Задача 2. Если к несчетному множеству что-либо прибавить, то получится несчетное множество.

Задача 3. Множество действительных чисел интервала (0,1) несчетно (действительным числом интервала (0,1) мы называем бесконечную десятичную дробь вида 0,7483088... , где после запятой стоят произвольные десятичные цифры, и имеется договоренность, в каких случаях считать две дроби задающими одно и то же число; пример такой договоренности — 0,5000... = 0,4999...).

Докажите эквивалентность:

Задача 4. Интервала и прямой.

Задача 5. Интервала и отрезка.

Задача 6. Интервала и квадрата. Более слабая задача:

Задача 6*. Найдите в интервале подмножество, эквивалентное квадрату.

Определение. Мощность отрезка называется мощностью континуума (непрерывности).

Задача 7 (трудная). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

Задача 8. **Теорема Кантора-Бернштейна**. Если A эквивалентно подмножеству B, а B эквивалентно подмножеству A, то A и B эквивалентны.

Листок 13, 20.01.2001

Неожиданная контрольная работа

Для положительной отметки достаточно решить три задачи.

Задача 1. Учитель сказал: В январе занятия семинара проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена неожиданная контрольная работа на логическую тему (помимо обычных тематических контрольных), но в какой именно день, вы накануне знать еще не будете.

Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 31 января.

Задача 2. Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 27 января.

Задача 3. Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 20 января.

Задача 4. Как это совместить с тем, что вы ее пишете?

Листок 14, 24.01.2001

Теория множеств (продолжение)

Некоторые из нижеопределенных множеств конечные, некоторые счетные, некоторые имеют мощность континуума, а некоторые определены недостаточно однозначно, так что остаются различные возможности. Укажите возможные мощности этих множеств (с доказательством).

Задача 1. Множество рациональных точек плоскости (точка плоскости рациональная, если у нее обе координаты рациональные).

Задача 2. Некоторое множество непересекающихся шаров в пространстве.

Задача 3. Некоторое множество непересекающихся сфер в пространстве.

Задача 4. Множество бесконечных последовательностей действительных чисел (действительное число определено как бесконечная десятичная дробь с обычными договоренностями о том, какие дроби изображают одно и то же число).

Задача 5. Некоторое множество восьмерок на плоскости, такое что никакие две восьмерки не имеют общих точек (восьмеркой в этой задаче называется множество, которое есть объединение двух касающихся окружностей).

Задача 6. Некоторое множество букв T на плоскости, такое что никакие две буквы T не имеют общих точек (буквой T в этой задаче называется множество, которое есть объединение двух перпендикулярных отрезков, конец одного из которых лежит внутри другого).

Задача 7. Пусть f — числовая функция, определенная при всех действительных x. Число x_0 называется точкой локального минимума функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что для любого x из U, отличного от x_0, верно неравенство: $f(x) > f(x_0)$. Какова мощность множества точек локального минимума?

Задача 8. Текстов, содержащих не более 110 типографских знаков, конечное число. Следовательно существует *наименьшее натуральное число, которое нельзя определить текстом, содержащим не более* 110 *типографских знаков.* Фраза, выделенная курсивом, содержит 109 типографских знаков, включая пробелы. Эта фраза определяет число, которое нельзя определить этой фразой. Попробуйте разобраться в этом противоречии.

Задача 9. **Теорема**. Множество всех подмножеств множества M более мощно, чем M. (Множество A называется более мощным, чем множество B, если существует взаимно-однозначное соответствие B и подмножества A, но не существует взаимно-однозначного соответствия A и B.)

Задача 10. Назовем действительное число x интервала (0,1) вычислимым, если существует конечно сформулированное правило, которое по n определяет n-ый десятичный знак x. Какова мощность множества вычислимых чисел? Какова мощность множества невычислимых чисел?

Обратите внимание на странное обстоятельство: доказано существование невычислимых чисел, но невозможно предъявить хотя бы одно из них.

Листок 15, 03.02.2001

Теорема о полноте

Определения. Бесконечной десятичной дробью (БДД) называется следующая запись: целое число со знаком + или −, затем запятая, затем бесконечная последовательность десятичных цифр.

Пусть A и B — две бесконечные десятичные дроби. Запишем их друг под другом так, чтобы запятая была под запятой. Если слева от запятой у A и B разное количество цифр, дополним запись одного из них нулями, чтобы оно стало одинаковым. Будем просматривать эти записи слева направо. A и B называются близнецами, если существует первый различающийся знак (пусть у числа A он a, а у числа B — b), a и b различаются на 1, и после меньшего из них записаны все девятки, а после большего все нули. Дроби $0,000...$ и $-0,000...$ также считаются близнецами.

Мы будем называть действительным числом бесконечную десятичную дробь с дополнительной договоренностью, что близнецы являются записями одного и того же числа.

Мы будем считать, что $A < B$, если A и B не близнецы, и имеет место один из случаев:

1) A имеет знак −, а B знак +,

2) Оба имеют знак +, и первый слева различающийся знак у A меньше, чем у B.

3) Оба имеют знак −, и первый слева различающийся знак у A больше, чем у B.

После того, как определено неравенство, имеет смысл говорить о точной верхней грани множества.

Теорема. Если M — непустое ограниченное сверху числовое множество, то существует $\operatorname{Sup} M$.

Построение $\operatorname{Sup} M$ **в частном случае, когда** M **содержит положительные числа**. Отрицательные числа и ноль отбросим, так как они не повлияют на результат. Раз множество M ограничено сверху, значит и целые части этих дробей ограничены сверху. Рассмотрим наибольшую целую часть, обозначим ее через C. Если она принадлежит только одной дроби, то эта дробь и есть $\operatorname{Sup} M$. Если дробей с наибольшей целой частью не одна, то рассмотрим только те дроби, у которых целая часть равна C, а остальные дроби отбросим. Множество выбранных чисел обозначим через M_0. Теперь среди дробей множества M_0 рассмотрим те, у которых наибольшая первая после запятой цифра, эту цифру обозначим через c_1. Если такая дробь только одна, она и есть $\mathrm{Sup}\ M$; если не одна, то будем дальше рассматривать только те дроби из множества M_0, у которых первая после запятой цифра равна c_1; множество этих дробей обозначим через M_1. Дальше порядок действий описывается индуктивно. Если построено множество M_n, то рассматриваем те входящие в него дроби, у которых $(n+1)$-ый после запятой знак наибольший, обозначим этот знак через c_{n+1}, а это множество — через M_{n+1}. Если ни на каком шагу мы не нашли $\mathrm{Sup}\ M$, то строим бесконечную десятичную дробь $C,\ c_1c_2...c_n...$

Листок 16, 03.02.2001

Теорема о полноте (продолжение)

Задача 1. Докажите, что в результате построения, описанного в листке 15, получается $\mathrm{Sup}\ M$.

Задача 2. Опишите построение $\mathrm{Inf}\ M$ для множества, состоящего из положительных чисел.

Задача 3. Опишите построение $\mathrm{Sup}\ M$ для множества, состоящего из отрицательных чисел.

Задача 4. Найдите точную верхнюю грань следующего множества чисел: 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; $\ldots$; $\frac{0{,}333...3}{n\ раз}$; $\ldots$. Входит ли точная верхняя грань этого множества в само это множество?

Задача 5. Аналогичная задача для множества: 0; 0,1; 0,12; 0,123; ... (после запятой выписываются подряд все натуральные числа, так что дальше появятся дроби: 0,12345678910111213; ...).

Задача 6. Докажите, что дробь из предыдущей задачи непериодическая.

Листок 17, 10.02.2001

Действия с действительными числами

В этом листке не сообщается ничего нового, так как действия с действительными числами (сложение, вычитание, умножение, деление, а также операции с неравенствами) вам давно знакомы. Поэтому листок не обязательный, и не будет беды, если вы примите все его утверждения на веру. Но предлагаемые задачи могут послужить полезным упражнением для тех, кто любит разбираться с основаниями арифметики.

Итак, мы делаем вид, что впервые видим действительные числа, поэтому даем

Определение суммы двух положительных действительных чисел.

Для бесконечной десятичной дроби $a,\ a_1a_2a_3...$ приближением по недостатку называется конечная дробь с целой частью a, в которой после запятой знаки выписаны только до какого-то места. Приближение по недостатку есть обычная конечная десятичная дробь, изображающая рациональное число, а с рациональными числами мы умеем производить арифметические операции.

Пусть A и B — положительные действительные числа, $a, a_1a_2a_3\ldots$ и $b, b_1b_2b_3\ldots$ — изображающие их бесконечные десятичные дроби. Рациональное число r отнесем к множеству M, если оно является суммой некоторого приближения по недостатку дроби $a, a_1a_2a_3\ldots$ и некоторого приближения по недостатку дроби $b, b_1b_2b_3\ldots$. Число $C = \mathrm{Sup}\ M$ называется суммой чисел A и B.

Задача 1. Докажите, что этот Sup существует.

Задача 2. Докажите, что он не изменится, если одну из дробей $a, a_1a_2a_3\ldots$ и $b, b_1b_2b_3\ldots$ заменить ее близнецом.

Задача 3. Определите $A+B$, если A и B разных знаков.

Задача 4. Определите произведение действительных чисел (с доказательством существования).

Задача 5. Докажите равенство $(A+B)+C = A+(B+C)$ (свойство ассоциативности сложения).

Задача 6. Докажите равенство $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$ (свойство дистрибутивности умножения по отношению к сложению).

Полный список свойств операций (аксиом), содержащий еще с десяток несложных задач этого же уровня, будет представлен позже.

Связь новых чисел со старыми. Бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся всеми нулями, отождествляется с конечной дробью, которая получается, если эти нули отбросить.

Задача 7. Пусть $A = a, a_1a_2a_3...a_nb_1b_2b_3...b_kb_1b_2b_3...b_k...$ — бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом длины k. Рассмотрим те ее конечные приближения, которые не режут группы цифр, составляющих период. A есть Sup этих приближений. Выпишите бесконечную геометрическую прогрессию, суммой которой является число A, докажите, что A есть ее сумма (и тем самым выведите формулу перевода периодической дроби в простую).

Листок 18, 17.02.2001

Предел последовательности

Определение 1. Интервалом числовой оси называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам: $a < x < b$; концы интервала a и b в интервал не включены.

Определение 2. Окрестностью числа A называется любой интервал, содержащий A.

Определение 3. ε-окрестностью числа A называется интервал длины 2ε с центром в числе A.

Определение 4. ε-окрестностью числа A называется множество точек x числовой оси, удовлетворяющих условию: $A - \varepsilon < x < A + \varepsilon$.

Определение 5. ε-окрестностью числа A называется множество точек x числовой оси, удовлетворяющих условию: $|A - x| < \varepsilon$.

Задача 1. Докажите эквивалентность определений 3, 4 и 5.

Определение 6. Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое число N, что при любом n, большем N, выполняется условие: $|x_n - A| < \varepsilon$.

Определение 7. Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности числа A множество членов последовательности $\{x_n\}$, не лежащих в этой окрестности, конечно.

Задача 2. Докажите эквивалентность определений 6 и 7.

Задача 3. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A, и C — действительное число, то последовательность $\{Cx_n\}$ (полученная умножением каждого члена последовательности $\{x_n\}$ на одно и то же число C) также имеет предел, и он равен CA.

Задача 4. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A, и последовательность $\{y_n\}$ имеет предел B, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ (полученная сложением каждого члена последовательности $\{x_n\}$ с членом последовательности $\{y_n\}$, имеющим тот же номер) также имеет предел, и он равен $A + B$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения последовательностей.

Определение 8. Последовательность, имеющая пределом 0, называется бесконечно малой последовательностью. Последовательность, имеющая пределом бесконечность (со знаком или без), называется бесконечно большой последовательностью.

Задача 6. **Теорема**. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Задача 7. **Теорема**. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Задача 8. Аналогичная задача для бесконечно малой последовательности, не принимающей значение 0.

Листок 19, 28.02.2001

Контрольная работа на пределы №1

Чтобы выполнить контрольную работу, необходимо сдать письменно все обязательные задачи, из них задачи 1 *и* 4 *сделать в классе.*

Определение. Последовательность $\{a_i\}$ называется неубывающей, если из неравенства $i < k$ следует неравенство $a_i \leq a_k$.

Последовательность называется возрастающей, если из неравенства $i < k$ следует неравенство $a_i < a_k$.

Аналогично определяются невозрастающая и убывающая последовательности.

Неубывающая и невозрастающая последовательности называются монотонными, возрастающая и убывающая последовательности называются строго монотонными.

В следующих задачах требуется выяснить, верны ли сформулированные в них теоремы. Верные теоремы требуется доказать, а неверные опровергнуть, приведя противоречащий пример.

Задача 1. Неубывающая ограниченная последовательность имеет предел.

Задача 2. Если последовательность неубывающая и неограниченная, то ее пределом является плюс бесконечность.

Задача 3 (*не обязательная*). Из всякой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

Определение. Последовательность множеств $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ называется вложенной, если из неравенства $i < j$ следует $I_j \subset I_i$.

Задача 4. Если $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ..., $I_k = [a_k, b_k]$, ... — вложенная последовательность отрезков числовой оси, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 5. Если $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ — вложенная последовательность отрезков числовой оси, и последовательность длин этих отрезков стремится к нулю, то существует ровно одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 6. Если $I_1 = (a_1, b_1)$, $I_2 = (a_2, b_2)$, ... , $I_k = (a_k, b_k)$, ... — вложенная последовательность интервалов числовой оси, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем интервалам.

Определение. Последовательность называется стабилизирующейся, если все ее члены, начиная с некоторого, равны между собой.

Задача 7. Если $I_1 = (a_1, b_1)$, $I_2 = (a_2, b_2)$, ... , $I_k = (a_k, b_k)$, ... — вложенная последовательность интервалов числовой оси, последовательность $\{a_i\}$ не является стабилизирующейся, и последовательность $\{b_i\}$ не является стабилизирующейся, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем интервалам.

Листок 19′, 07.03.2001

Упражнения к контрольной №1

Задача 1. **Теорема**. Пусть A и B — числовые множества, $C = A \cup B$. Если $\operatorname{Sup} A = a$ и $\operatorname{Sup} B = b$, то $\operatorname{Sup} C$ существует и равен . . . *(заполните пробел и докажите получившуюся теорему).*

Задача 2. **Теорема**. Если $\operatorname{Sup} A = a$, $B \subset A$ и B непусто, то $\operatorname{Sup} B$ существует и ... (*заполните пробел и докажите получившуюся теорему).*

Задача 3. Пусть множество A состоит из положительных чисел и $\operatorname{Sup} A = a$. Определяем множество B правилом: $x \in B$, если $\frac{1}{x} \in A$. Тогда B имеет Inf, и $\operatorname{Inf} B = \ldots$ *(заполните и докажите).*

Задача 4. Дано: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — неубывающие последовательности. Определяем последовательность $\{c_n\}$ правилом: $c_n = \max(a_n, b_n)$. Можно ли утверждать, что $\{c_n\}$ — неубывающая последовательность?

Задача 5. Ограниченная последовательность, которая начиная с некоторого номера монотонна, имеет предел.

Задача 6. Если изменить конечное число членов последовательности, то ее предельное поведение не изменится (то есть если она имела предел, то и новая последовательность имеет предел, притом тот же самый, если не имела, то и теперь не имеет, если имела пределом какую-либо бесконечность, то и после изменения имеет пределом эту же бесконечность). Приведите доказательство этого факта исходя из определения 6 листка 18.

Задача 7. Решите задачу 6 исходя из определения 7 листка 18.

Задача 8. Если перемешать члены последовательности, то ее предельное поведение не изменится. Приведите доказательство этого факта исходя из определения 6 листка 18.

Задача 9. Решите задачу 8 исходя из определения 7 листка 18.

Пояснение: Что значит перемешать члены последовательности? Это значит, что имеется функция $y = f(x)$, которая каждому натуральному числу ставит в соответствие одно натуральное число, осуществляющая взаимно-однозначное соответствие (биекцию) множества натуральных чисел в себя, то есть различным x она ставит в соответствие различные у, и для каждого натурального у существует такое x, что $y = f(x)$. Тогда если $\{a_n\}$ — первоначальная последовательность, то $\{a_{f(n)}\}$ — результат перемешивания.

Листок А, 28.03.2001

Аффинные преобразования

Определение. Аффинным преобразованием плоскости называется такое взаимно-однозначное преобразование плоскости, при котором три точки, лежащие на прямой, всегда переходят в три точки, также лежащие на прямой.

Задача 1. Докажите, что при аффинном преобразовании образ прямой принадлежит прямой.

Задача 2. Докажите, что при аффинном преобразовании образ прямой есть прямая.

Задача 3. Докажите, что преобразование, обратное аффинному, также аффинное.

Задача 4. Докажите, что при аффинном преобразовании пара параллельных прямых переходит в пару параллельных прямых.

Задача 5. Докажите, что при аффинном преобразовании середина отрезка переходит в середину отрезка.

Задача 6. Докажите, что при аффинном преобразовании точки, делящие отрезок на K равных частей, переходят в точки, делящие отрезок на K равных частей, при этом взаимный порядок этих точек сохраняется.

Замечание. Пока еще не предполагается доказанным, что сохраняется свойство “между”, которое точно формулируется так: если точка B лежит на прямой между точками A и C, то образ точки B лежит на образе этой прямой между образами точек A и C. Раньше даже полагали, что свойство “между” не является следствием определения аффинного преобразования и должно быть включено в это определение в качестве второй аксиомы. Теперь это доказательство известно. Оно получается из следующих фактов.

Задача 7. Если свойство “не между” сохраняется, то и свойство “между” сохраняется (уточните формулировку).

Основная конфигурация. Параллельные прямые L и M. Точки A и B лежат на L и точки C и D — на M. P — точка пересечения прямых AC и BD, O точка пересечения AD и BC. E_1 — точка пересечения прямых PQ и L, E_2 — точка пересечения прямых PQ и M. O — середина отрезка E_1E_2.

Задача 8. Докажите, что в основной конфигурации точка O лежит всегда не между P и Q.

Задача 9. Докажите, что свойство “не между” сохраняется при аффинном преобразовании.

Листок 20, 04.04.2001

Предельная точка

Определение 1. Пусть K — множество точек на прямой. Точка x называется предельной точкой множества M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x.

Определение 2. Точка x называется предельной точкой множества M, если любая окрестность точки x содержит бесконечно много точек множества M.

Пояснение. В этих определениях не сказано, что точка x является элементом множества M.

Задача 1. Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

Определение 3. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Точка x называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности U точки x и для любого числа N найдется натуральное i, большее N и такое, что x_i принадлежит U.

Определение 4. Точка называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если любая окрестность x содержит бесконечно много членов последовательности.

Задача 2. Докажите эквивалентность определений 3 и 4.

Задача 3. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все целые числа и только они?

Задача 4. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все числа вида $\frac{1}{n}$ (n — натуральное) и только они?

Задача 5. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все действительные числа?

Задача 6. Если числовое множество бесконечно и ограничено, то для него найдется предельная точка.

Подсказка: Рассмотрите множество таких точек y, что слева от y лежит конечное число точек нашего множества.

Задача 7. Если числовая последовательность ограничена, то для нее найдется предельная точка.

Задача 8. Если числовая последовательность ограничена и имеет только одну предельную точку, то эта предельная точка есть предел этой последовательности.

Задача 9. Если числовая последовательность не имеет предельных точек, то она стремится к бесконечности (без знака).

Листок 21, 28.04.2001

Теоремы об отрезке

Старые теоремы:

Теорема 1. Для всякого непустого ограниченного сверху множества действительных чисел существует точная верхняя грань (supremum).

Теорема 2. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 3. Для бесконечного ограниченного множества найдется предельная точка.

Новые теоремы:

Определение. Пусть M — числовое множество. Сечением множества M называется такое разбиение M на два непустых класса A и B, что каждый элемент A меньше каждого элемента B(A называется нижним классом сечения, B — верхним). Есть четыре логические возможности, и в соответствии с этим четыре типа сечений:

1) В A есть наибольший элемент, в B нет наименьшего элемента;

2) В A нет наибольшего элемента, в B есть наименьший элемент;

3) В A нет наибольшего элемента, в B нет наименьшего элемента;

4) В A есть наибольший элемент, в B есть наименьший элемент;

Задача 1. Пусть M — множество рациональных чисел. Приведите примеры сечений первого, второго и третьего типов.

Задача 2. Докажите, что в множестве рациональных чисел не бывает сечений четвертого типа.

Задача 3. (**Теорема 4**.) Докажите, что в множестве действительных чисел бывают сечения только первого и второго типов.

Определение. Пусть P — числовая последовательность $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Назовем n-ым хвостом P_n последовательности P последовательность $\{a_{n+1}, ...\}$, то есть P_n получается из P отбрасыванием первых n членов, так что $P_0 = P$). Колебанием $K(P_n)$ последовательности P_n называется $\underset{i,j>n}{Sup}\,|a_i - a_j|$ (если Sup не существует, то $K(P_n) = +\infty$). Колебанием последовательности P на бесконечности называется $\lim\limits_{n\to\infty} K(P_n)$.

Задача 4. Если последовательность имеет предел (числовой), то ее колебание на бесконечности равно 0.

Задача 5. (**Теорема 5**.) Если колебание последовательности на бесконечности равно 0, то она имеет пределом некоторое число.

Другая формулировка теоремы 5.

Определение. Последовательность $P = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ называется фундаментальной, если для любого положительного ε найдется такое числа N, что для любых натуральных i и j, больших N, выполняется неравенство: $|a_i - a_j| < \varepsilon$.

Задача 6. (**Теорема 6**.) Для того, чтобы последовательность сходилась (то есть имела пределом число) необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Листок 22, 12.05.2001

Теоремы об отрезке (продолжение)

Упражнения к листку 21

Задача 1. Для последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ определите хвост P_n, колебание этого хвоста $K(P_n)$ и колебание на бесконечности.

Задача 2. То же для последовательности $b_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Теоремы о покрытиях

Определение. Пусть M — числовое множество, $\sum$ — система числовых множеств (конечная или бесконечная). Говорят, что $\sum$ образует покрытие множества M, если каждое число из M принадлежит некоторому множеству из системы $\sum$.

Пример. M — множество рациональных чисел отрезка [0,1]. Занумеруем множество M натуральными числами: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. n-ый элемент системы $\sum$ есть интервал σ_n с центром в точке r_n, имеющий длину $\frac{1}{2^{n+2}}$

Задача 3. Докажите, что в вышеприведенном примере нельзя из системы $\sum$ выделить конечную подсистему $\sum'$, которая является покрытием множества M.

Задача 4 (Теорема 7.) Если отрезок числовой оси покрыт бесконечной системой интервалов, то из этой системы можно выделить конечную подсистему, которая также является покрытием отрезка.

Задача 5. Это можно сделать так, что никакие три интервала не будут иметь общей точки.

Задача 6. Покажите, что теорема 7 перестает быть верной, если отрезок заменить интервалом.

Задача 7. Покажите, что теорема 7 перестает быть верной, если интервалы заменить отрезками.

Задача 8. Решите задачи 6 и 7 листка 20 (и докажите теорему 3 листка 21) с помощью теоремы 7 настоящего листка.

Определение действительного числа с помощью **сечений.**

Определение. Сечения A/A' и B/B' в области рациональных чисел называются близнецами, если в A есть наибольший элемент max A, в B' есть наименьший элемент min B', и max A = min B' (этот элемент называется производящим сечение).

Определение. Сечение, не имеющее близнеца, определяет действительное число; два сечения-близнеца определяют одно действительное число (оно идентифицируется с рациональным числом, производящим эти два сечения).

Определение. Число a (сечение B/B') меньше числа b (сечения A/A'), если найдутся два рациональных числа x и y, которые принадлежат A' и в то же время B.

Задача 9. Докажите теорему о полноте (листок 15, она же теорема 1 листка 21), считая, что действительные числа определены с помощью сечений.

Константинов Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный руководитель Экспериментальной
школы №179 г. Москвы,
преподаватель математического анализа.

Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции»

А. И. Щетников

В статье приведено краткое жизнеописание выдающегося деятеля науки и культуры итальянского Возрождения Луки Пачоли. Дан обзор одного из важнейших его сочинений "О божественной пропорции". Проанализированы обвинения в плагиате, выдвинутые против Пачоли некоторыми исследователями.

Биографический очерк

Лука Пачоли (Luca Pacioli или Paciollo) родился в 1445 году в небогатой семье Бартоломео Пачоли в небольшом городке Борго Сан-Сеполькро, расположенном на берегу Тибра, на границе Тосканы и Умбрии, и принадлежавшем в то время Флорентийской республике. Подростком он был отдан на обучение в мастерскую знаменитого художника Пьеро делла Франческа (ок. 1415–1492), жившего в этом же городке. Обучение в мастерской не сделало его художником, однако выработало отменный вкус, а главное, здесь он впервые приобщился к математике, глубоко интересовавшей его учителя. Вместе со своим учителем Лука часто посещал двор Федерико де Монтефельтро, герцога Урбинского. Здесь его заметил великий итальянский зодчий Леон Батиста Альберти (1404–1472), который в 1464 году рекомендовал молодого человека богатому венецианскому купцу Антонио де Ромпианзи в качестве домашнего учителя.

В Венеции Лука учил сыновей своего патрона и учился сам, посещая лекции знаменитого математика Доменико Брагадино в школе Риальто. В 1470 году он составил свою первую книгу — учебник коммерческой арифметики. В этом же году он оставил Венецию и перебрался в Рим, где был принят Альберти и поселился в его доме. Однако через два года Пачоли покинул Рим и принял монашеский постриг, став францисканцем.

После пострига брат Лука некоторое время живёт на родине в Сан-Сеполькро. С 1477 по 1480 год он преподаёт математику в университете в Перудже. Затем в течении восьми лет он живёт в Заре (ныне — Задар в Хорватии), где занимается теологией и математикой, иногда совершая по делам ордена поездки по другим городам Италии. В эти годы Пачоли начал писать главный труд своей жизни — энциклопедическую *Сумму арифметики, геометрии, отношений и пропорций*. В 1487 году его вновь приглашают занять кафедру в Перудже. В последующие годы он живёт в Риме, Неаполе, Падуе.

12 октября 1492 года умирает Пьеро делла Франческа. В следующем году работа Пачоли над *Суммой* была, наконец, завершена. С этой рукописью он приезжает в Венецию, где в ноябре 1494 года эта книга, посвящённая юному Гвидо Убальдо де Монтефельтро (1472–1508), ставшему в 1482 г. после смерти отца герцогом Урбинским, выходит в свет.

Примечательно то, что книга написана не на обычной для учёных трудов латыни, а на итальянском языке. У некоторых авторов можно прочитать, что Лука писал свои трактаты на итальянском языке, потому что он не получил соответствующего образования и не владел латинским языком в совершенстве. Однако он был магистром теологии, а латынь была единственным языком теологических трактатов; он преподавал математику в различных университетах, а там все предметы читались на латыни; и он же перевёл всего Евклида с латыни на итальянский (правда, этот перевод так и не был издан). Потому, хотя он и не владел гуманистической латынью, школьная латынь была для него повседневным языком. Стало быть, причина, по которой он предпочёл итальянский язык латыни, состояла в другом. Вот что говорит об этом сам Лука в посвящении к *Сумме* (написанном и на итальянском, и на латинском языке):

> Правильное понимание трудных терминов среди латинистов прекратилось ввиду того, что хорошие учителя стали редки. И хотя для Вашего Герцогского Высочества лучше подошёл бы стиль Цицерона или ещё более высокий, однако я полагаю, что этим источником красноречия не всякий сумеет воспользоваться. Так что, принимая во внимание интересы общей пользы ваших почтительных подданных, я решил написать своё сочинение на родном местном языке, чтобы и образованные, и не образованные в равной мере могли получить удовольствие от этих занятий.

В предисловии к *Сумме* Пачоли рассказывает о тех людях, благодаря общению с которыми у него сложилось убеждение в том, что математика рассматривает «всеобщую закономерность, применимую ко всем вещам». Он говорит об астрономии, о научном подходе к архитектуре, воплощённом в трудах Витрувия и Альберти, о многочисленных живописцах, развивавших искусство перспективы, «которая, если разобраться тщательно, была бы пустым местом без применения математических вычислений», среди которых выделяется «король нашего времени в живописи» Пьеро делла Франческа, о замечательных скульпторах. Это те мастера, «которые, пользуясь вычислениями в своих работах с помощью нивелира и циркуля, довели их до необычайного совершенства». Пачоли говорит также о значении математики для музыки, для космографии, для торговли, для механических искусств, для военного дела.

Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций — это обширный энциклопедический труд, напечатанный на 300 листах in folio. Первая часть в 224 листа посвящена арифметике и алгебре, вторая, в 76 листов — геометрии. Нумерация листов в обеих частях начинается заново. Каждая часть делится на отделы, отделы — на трактаты, трактаты — на главы.

В арифметической части *Суммы* излагаются приёмы выполнения арифметических действий; эта часть опирается на многочисленные *Книги абака*, принадлежавшие разным авторам. Алгебраические задачи, решаемые в *Сумме*, не выходят за пределы круга задач на линейные и квадратные уравнения, рассматривавшегося в арабских трактатах по «алгебре и альмукабале»; в Европе эти задачи были известны по *Книге абака* Леонардо Пизанского (1180–1240). Из задач, привлёкших внимание математиков последующих поколений, следует отметить задачу о разделе ставки при незавершённой игре, которую сам Лука решил неправильно. Пожалуй, самое существенное нововведение Пачоли состоит в систематическом использовании синкопированной алгебраической записи — своеобразной предшественницы последующего символического исчисления. Книга содержит таблицу монет, весов и мер, принятых в разных частях Италии, а также руководство по венецианской двойной бухгалтерии. Что касается геометрической части *Суммы*, она следует за *Практической геометрией* Леонардо Пизанского.

В первой половине 90-х годов Пачоли живет в Урбино. Именно к этой эпохе относится картина Якопо де Барбари, на которой Пачоли изображён в сопровождении неизвестного молодого человека. По поводу личности этого молодого человека выдвигались разные гипотезы. Наиболее правдоподобным представляется предположение о том, что это — герцог Гвидо Убальдо, покровитель Пачоли.

В 1496 году учреждается кафедра математики в Милане, и Пачоли предлагают её занять. Здесь он читает учебные лекции студентам и публичные — всем желающим. Здесь же, при дворе герцога Лодовико Моро Сфорца (1452–1508) он сближается с Леонардо да Винчи. В записных книжках Леонардо сохранились записи: «Научись умножению корней у маэстро Луки», «попроси брата из Борго показать тебе книгу о весах». Пачоли выполнил для Леонардо расчёты веса гигантского конного памятника Франческо Сфорца. В Милане Пачоли написал послание *О божественной пропорции*, адресованное герцогу Лодовико Сфорца, а Леонардо выполнил к нему иллюстрации. Трактат был завершён 14 декабря 1498 года. К нескольким рукописным экземплярам трактата, вручённым властительным особам, прилагался набор правильных многогранников и других геометрических тел, о которых брат Лука говорит, что изготовил их собственноручно. (О моделях правильных многогранников он писал ещё в *Сумме*.) Сохранилось две рукописи этого трактата — одна в Публичной библиотеке в Женеве, вторая — в Амброзианской библиотеке в Милане.

В 1499 году французская армия заняла Милан, и герцог СФОРЦА бежал; ЛЕОНАРДО и ЛУКА в скором времени покинули город. В последующие годы ЛУКА ПАЧОЛИ читает лекции в Пизе (1500), Перудже (1500), Болонье (1501–1502) и Флоренции (1502–1505). Во Флоренции ему покровительствует ПЬЕТРО СОДЕРИНИ, пожизненный гонфалоньер Республики.

Однако не все труды ПАЧОЛИ напечатаны, и поэтому он снова едет в Венецию. Здесь в 1508 году он издаёт латинский перевод ЕВКЛИДА, принадлежащий ДЖОВАННИ КАМПАНО из Новары. Этот перевод, сделанный ещё в 1259 году с арабского языка, уже издавался в 1482 году и затем несколько раз переиздавался, но издание изобиловало опечатками и ошибками. ПАЧОЛИ отредактировал перевод; по этой редакции, снабжённой многочисленными комментариями, он и читал свои университетские лекции. Однако издание оказалось невостребованным, поскольку в 1505 году БАРТОЛОМЕО ДЗАМБЕРТИ издал новый перевод *Начал*, выполненный непосредственно с греческого оригинала.

Рис. 1. Портрет ЛУКИ ПАЧОЛИ и неизвестного молодого человека. Картина ЯКОПО ДЕ БАРБАРИ (Неаполь, Национальный музей)

В 1509 году в Венеции была издана ещё одна книга ПАЧОЛИ: *Divina proportione. Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria. Ove ciascun studioso di Philosophia, Prospectiva, Pictura, Sculptura, Architectura, Musica e altre Mathematice suavissima sottile ed admirabile doctrina consequira e delectarassi con varie questione de secretissima scientia* («Божественная пропорция. Сочинение, весьма полезное всякому проницательному и любознательному уму, из коего каждый изучающий философию, перспективу, живопись, скульптуру, архитектуру, музыку или другие математические предметы извлечёт приятнейшее, остроумное и удивительное учение и развлечёт себя различными вопросами секретнейшей науки»).

Это печатное издание включает в себя ряд текстов. Изданию предпослано обращение к флорентийскому гонфалоньеру ПЬЕТРО СОДЕРИНИ. Первая часть (33 листа) содержит послание *О божественной пропорции*, а также трактат об архитектуре, о пропорциях человеческого тела и о принципе построения букв латинского алфавита. За ней следует *Книжка в трёх отдельных трактатах о правильных телах* (27 листов), из коих первый трактат рассматривает плоские фигуры, второй — правильные тела, вписанные в сферу, третий — правильные тела, вписанные друг в друга. Далее идут графические таблицы, отпечатанные с одной стороны листа: пропорции человеческого лица (1 лист), принцип построения букв латинского алфавита (23 листа), изображения архитектурных элементов (3 листа), выполненные на основе рисунков ЛЕОНАРДО изображения правильных и других тел (58 листов), и, наконец, «дерево пропорций и пропорциональности»— рисунок, который ПАЧОЛИ уже приводил в *Сумме* (1 лист).

В послании *О божественной пропорции* Лука Пачоли говорит о том, что ему, как старому человеку, пора на покой, чтобы «в солнечном месте подсчитывать годы». Эта его просьба была услышана, и в 1508 году он становится местоблюстителем монастыря в родном Сан-Сеполькро. Однако в декабре 1509 г. два монаха его монастыря передали генералу ордена письмо, в котором указывали на то, что «маэстро Лука неподходящий человек, чтобы управлять другими», и просили освободить его от административных обязанностей. Но поддержки у начальства они не нашли, и в феврале 1510 года Лука Пачоли становится полноправным приором родного монастыря. Впрочем, распри внутри монастыря продолжались и далее.

В последние годы своей жизни брат Лука продолжал ещё иногда читать лекции; его приглашали в Перуджу в 1510 году и в Рим в 1514 году, причём последнее приглашение исходило от нового папы Льва X. Умер Лука Пачоли в возрасте 72 лет, 19 июня 1517 года во Флоренции.

Обзор послания «О божественной пропорции»

В послании Луки Пачоли *О божественной пропорции* выделяются следующие содержательные части:

Введение (гл. 1–4). Божественные качества, определение и математические свойства пропорции, возникающей при делении величины в среднем и крайнем отношении (гл. 5–23). О правильных телах, почему их не может быть больше пяти и как каждое из них вписывается в сферу (гл. 24–33). О том, как правильные тела вписываются друг в друга (гл. 34–46). О том, как в каждое из этих тел вписывается сфера (гл. 47). О том, как из правильных тел получаются усечённые и надстроенные (гл. 48–52). О других телах, вписанных в сферу (гл. 53–55). Сфера (гл. 56–57). О колоннах и пирамидах (гл. 58–69). О материальных формах представленных тел и их перспективных изображениях (гл. 70). Глоссарий (гл. 71).

Под «божественной пропорцией» Пачоли понимает непрерывную геометрическую пропорцию трёх величин, которую Евклид называет «делением в среднем и крайнем отношении», а в XIX веке её стали называть «золотым сечением». В определении этой пропорции и описании её свойств Пачоли следует за Евклидом. Данная пропорция возникает при делении целого на две части, когда целое так относится к большей части, как большая часть относится к меньшей. На языке равенства площадей эта же пропорция задаётся так: квадрат на большей части равен прямоугольнику, сторонами которого служат целое и меньшая часть.

Особую ценность, выделенность отношения «божественной пропорции» среди прочих отношений брат Лука обосновывает доводами метафизического и теологического характера. Единственность и неизменность данной пропорции сравнивается с единственностью и неизменностью Бога, три её члена — с тремя ипостасями Святой Троицы, иррациональность отношения — с непостижимостью и невыразимостью Бога. Но помимо этих доводов имеется ещё один: с этой пропорцией связаны процедуры построения правильного плоского пятиугольника, и телесных додекаэдра и икосаэдра. Но Платон в *Тимее* рассматривал пять правильных тел в качестве пяти элементов, из которых состоит Вселенная. Таким образом, в метафизических построениях Пачоли соединяются мотивы христианского богословия и платоновской космологии.

Далее Лука излагает различные свойства «божественной пропорции», известные по XIII и XIV книге *Начал* Евклида. Всего он рассматривает тринадцать таких свойств, связывая это число с числом участников тайной вечери. Вот пример одного из этих свойств: «Пусть прямая линия разделена в пропорции, имеющей середину и два края, тогда если к большей части прибавить половину всей пропорционально разделённой линии, то с необходимостью окажется, что квадрат суммы всегда будет пятикратным, то есть в 5 раз большим квадрата указанной половины». Все эти свойства он сопровождает одним и тем же числовым примером, когда длина целого отрезка равна 10, а его части составляют: меньшая $15-\sqrt{125}$, а большая $\sqrt{125}-5$. Пример с алгебраическим делением 10 в среднем и крайнем отношении был заимствован Лукой Пачоли у Леонардо Пизанского (1180–1240), а последним — у Абу Камила (850–930) и ал-Хорезми (787–850). Само вычисление корней соответствующего квадратного уравнения в трактате не производится: здесь Лука ссылается на свою же *Сумму*, где этот результат получен «по правилам алгебры и альмукабалы». И вообще, выбранный им жанр послания предопределяет собой тот факт, что Пачоли все результаты приводит без доказательства, хотя эти доказательства ему, вне всякого сомнения, известны.

Вслед за этим Пачоли рассматривает пять платоновских тел. Сначала он доказывает теорему том, что этих тел — ровно пять, и не больше. Затем он приводит построения всех пяти тел, вписанных в данную сферу, в следующем порядке: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр. Далее рассматривается пропорция между сторонами этих тел, вписанных в одну и ту же сферу, и приводится ряд теорем о соотношениях между их поверхностями. Затем рассматриваются некоторые способы, по которым одно правильное тело может быть вписано в другое. Наконец, обсуждается теорема о том, что в каждое правильное тело тоже может быть вписана сфера.

Теперь Пачоли на время оставляет Евклида и переходит к новому материалу. А именно, он рассматривает тела, которые могут быть получены из правильных тел путём «усечения» либо «надстройки». Тела, которые получаются из правильных тел усечением — это некоторые из полуправильных тел Архимеда. Всего имеется тринадцать полуправильных тел, что было доказано Архимедом. Но Пачоли с обзором этой работы Архимеда, имеющимся у Паппа, не был знаком. Из тринадцати полуправильных тел он рассматривает шесть: усечённый тетраэдр, кубоктаэдр, усечённый октаэдр, усечённый икосаэдр, икосидодекаэдр и усечённый ромбикубоктаэдр. Два тела — усечённый куб и усечённый додекаэдр — он пропустил по непонятной причине, хотя их построение аналогично построению усечённых тетраэдра, куба и икосаэдра. Что касается усечённого ромбикубоктаэдра («тела с 26 основаниями»), Пачоли открыл его, по-видимому, сам, и очень гордился этим открытием: именно это тело, изготовленное из прозрачных стеклянных пластин и наполовину заполненное водой, изображено в левой верхней части картины Якопо де Барбари.

Надстроенные правильные и надстроенные усечённые тела у Пачоли — это не то же самое, что исследовавшиеся в последующей математике звёздчатые многогранники Кеплера. Тела Кеплера получаются продлением плоскостей исходных многогранников; тела Пачоли — построением на каждой грани исходного многогранника пирамиды, боковые стороны которой являются равносторонними треугольниками. Пачоли приводит интересную теорему о том, что в надстроенном икосидодекаэдре пять вершин треугольных пирамид и вершина пятиугольной пирамиды лежат в одной плоскости; опущенное доказательство «возводится тончайшей практикой алгебры и альмукабалы до редкой отметки».

Далее рассматривается «тело с 72 основаниями», которым Евклид пользовался как вспомогательным в последних двух предложениях XII книги *Начал*; это тело в литературе иногда называют «сферой Кампано» (рис. 2). Пачоли утверждает, что форма этого тела послужила геометрической основой для купола Пантеона в Риме и для сводов ряда других построек.

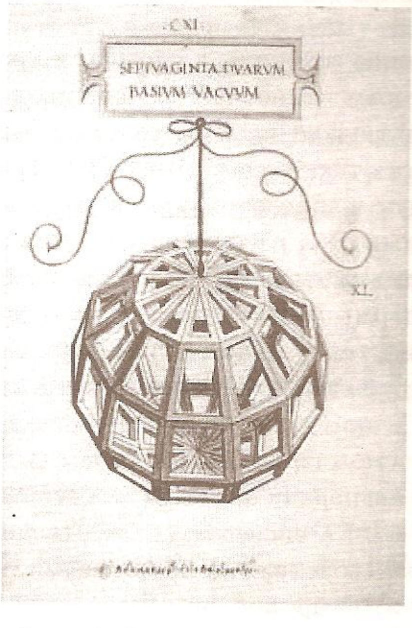

Рис. 2. Один из рисунков Леонардо да Винчи.

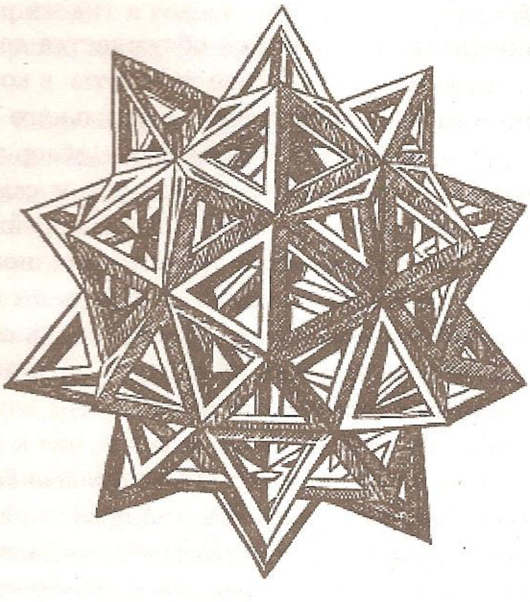

Рис. 3. Гравюра из печатного издания трактата.

Вслед за этим Пачоли говорит о том, что усечением и надстройкой может быть получено бесчисленное множество многогранных форм, и переходит к рассмотрению сферы, ещё раз касаясь вписания в неё правильных тел.

Последняя часть послания *О божественной пропорции* вновь возвращает нас к Евклиду. Здесь рассматриваются многогранные призмы и цилиндр, затем — многогранные пирамиды и конус, затем — усечённые пирамиды. Пачоли приводит правила для вычисления объёмов всех этих тел, всюду указывая на то, какие из этих правил являются приближёнными, а какие — точными.

Далее Пачоли пишет о том, что к рукописным копиям трактата, вручаемым герцогу и его родственникам, прилагаются таблицы с перспективными рисунками, сделанными Леонардо да Винчи, а также «материальные формы» всех упомянутых в нём тел. Рисунки и формы многогранников были изготовлены в двух вариантах — сплошные, с цельными плоскими гранями, и полые, с одними только рёбрами. Выполнял ли Леонардо свои рисунки чисто расчётным путём или с натуры, мы не знаем. Часть рисунков выполнена с заметной для глаза погрешностью, однако её можно объяснить как неточностью расчётов, так и переменой точки, с которой рассматривалось изображаемое тело. Послание завершается словариком, в котором ещё раз разъясняются употреблявшиеся в тексте специальные термины.

Золотое сечение в «древней» и в «новой» эстетике

Многочисленные популярные и специальные книги и статьи, посвящённые проблеме пропорций в искусстве, рассматривают золотое сечение в качестве «самой совершенной» пропорции, причём это совершенство трактуется в этих книгах по преимуществу психологически: прямоугольник с «золотым» отношением сторон считается самым приятным для зрительного восприятия, и т. п. В этих публикациях принято рассматривать разнообразные произведения изобразительного искусства и памятники архитектуры, созданные мастерами античности и Возрождения, в качестве примеров, подтверждающих этот тезис.

Надо заметить, что от античности до нас не дошло не одного текста, в котором деление величины в среднем и крайнем отношении обсуждалось бы в качестве формообразующего начала в изобразительном искусстве и архитектуре. Похоже, что таких текстов и вовсе не существовало. Для сравнения можно рассмотреть так называемую музыкальную пропорцию $12 : 9 = 8 : 6$, задающую структуру музыкальной гармонии. Эта пропорция, открытая пифагорейцами, упоминается в десятках античных текстов, посвящённых теории музыки, — как специальных, так и общефилософских. Странно было бы, если бы золотое сечение играло аналогичную роль в архитектуре, скульптуре и живописи, а у античных авторов не осталось об этом ни одного свидетельства.

Все античные тексты, в которых обсуждается деление величины в среднем и крайнем отношении — это сугубо математические трактаты, в которых данное построение рассматривается исключительно в связи с построением правильного пятиугольника, а также двух правильных платоновских тел — икосаэдра и додекаэдра (обзор этих текстов см. Herz-Fishler 1998). Верно то, что интерес к правильным телам, а тем самым и к золотому сечению, не был сугубо математическим: ведь Платон вслед за пифагорейцами стал рассматривать пять правильных тел в качестве элементарных основ мироздания, поставив тетраэдр в соответствие огню, куб — земле, октаэдр — воздуху, икосаэдр — воде, а форму додекаэдра он связал со Вселенной в целом. В этом плане, конечно, можно говорить об эстетической значимости золотого сечения, как это делал в своих сочинениях А. Ф. Лосев; но сама эта «эстетика» носит отнюдь не психологический, но космологический характер.

В эпоху Возрождения произошло возвращение к космологическим картинам античного платонизма, и трактат Луки Пачоли *О божественной пропорции* является важнейшим памятником этого математико-спекулятивного направления. Лука воспевает «божественную пропорцию» в начальных главах своего трактата, называя её свойства «не природными, но поистине божественными». Однако его воззрения на значение этой пропорции остаются привязанными к космологии платоновского *Тимея*, и «величайшая гармония», о которой он говорит — это гармония космоса, и никакая другая. И хотя Пачоли приложил к посланию *О божественной* *пропорции* трактат об архитектуре и о пропорциях человеческого тела, но о золотом сечении в этом трактате он не обмолвился ни единым словом. Стало быть, никакого другого взгляда на золотое сечение, кроме математико-космологического, у него не было, и мысль о том, что золотое сечение может выступать в качестве базовой пропорции произведений архитектуры и живописи, ему просто не приходила в голову.

В точности такие же воззрения характерны для Иоганна Кеплера и других авторов эпохи Возрождения, интересовавшихся золотым сечением и ролью правильных многогранников в «гармонии мира». Так что искать в их сочинениях некую концепцию золотого сечения, связанную с эстетикой произведений искусства, — это совершенно напрасное занятие, поскольку её там попросту не было.

Судьба сочинений Пачоли. Вопрос о плагиате

После смерти Пачоли о его сочинениях помнили не слишком долгое время. Наступала эпоха грандиозных научных свершений, когда в науке стали цениться в первую очередь новые результаты, а книги Пачоли представляли собой обзоры того, что было сделано в прежние времена. Джироламо Кардано (1501–1576) назвал Пачоли компилятором, в чём он, со своей точки зрения, был вполне прав. Впрочем, другой выдающийся математик этой эпохи, Рафаэль Бомбелли (1526–1573), сказал, что Пачоли был первым после Леонардо Пизанского, «кто пролил свет на науку алгебры».

Возрождение интереса к личности и сочинениям Пачоли датируется 1869 годом, когда *Сумма* попала в руки к миланскому профессору математики Лючини, и он обнаружил в ней *Трактат о счетах и записях.* После этого открытия на Пачоли стали смотреть как на родоначальника науки о бухгалтерском учёте, и именно этот трактат оказался самой востребованной частью его наследия, много раз переводившейся на другие языки, в том числе и на русский.

Впрочем, уже вскоре после первых публикаций *Трактата о счетах и записях* среди исследователей разгорелись жаркие споры о том, был ли Лука Пачоли его действительным автором. Было высказано сомнение, мог ли человек, далёкий от торговых дел, составить такой трактат. А если не мог, то не следует ли предположить, что здесь совершён плагиат? Думается всё же, что обвинение в плагиате в данном случае неправомочно. Пачоли нигде не говорит, что это он изобрёл двойную бухгалтерию; он лишь описывает её нормы «по венецианскому обычаю». Но ведь если мы откроем любое современное руководство по бухгалтерскому учёту, оно будет представлять собой в точности такое же нормативное описание, без ссылок на предшественников. И если Пачоли описывает систему бухгалтерского учёта по какой-то прочитанной им рукописи, то ведь он и правила умножения в столбик тоже не сам придумал, однако в данном случае обвинять его в плагиате никому не приходит в голову. А ознакомиться с системой двойной бухгалтерии на практике он мог в то время, когда состоял домашним учителем в богатом купеческом доме.

Другое серьёзное обвинение в плагиате было выдвинуто против Пачоли ещё в 1550 году, когда Джордже Вазари (1511–1572) в своей книге *Жизнеописания знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих* в главе, посвящённой Пьеро делла Франческа, написал следующее:

> И хотя тот, кто должен был всеми силами стараться приумножить его славу и известность, ибо у него научился всему, что знал, пытался как злодей и нечестивец изничтожить имя Пьеро, своего наставника, и завладеть для себя почестями, которые должны были принадлежать одному Пьеро, выпустив под своим собственным именем, а именно брата Луки из Борго, все труды этого почтенного старца.

Математические сочинения Пьеро делла Франческа долгое время считались утерянными. Однако в 1903 году Дж. Питтарелли обнаружил в Ватиканской библиотеке рукопись *Petri Pictoris Burgensis de quinque corporibus regularibus* («Петра, художника из Борго, о пяти правильных телах»). Несколько позже были обнаружены ещё две рукописи Пьеро: *Перспектива в живописи* (*De perspectiva pingendi*) и *Об абаке* (*De abaco*). Тогда же было установлено, что найденный латинский манускрипт *О пяти правильных телах* и три итальянских трактата о правильных телах в печатном издании *De Divina Proportione* представляют собой две близкие версии одного и того же текста.

Сохранившаяся рукописная книжка Пьеро *О пяти правильных телах* посвящена Гвидо Убальдо де Монтефельтро, герцогу Урбинскому. Герцогский титул он получил в 1482 году после смерти отца. Пьеро умер в 1492 году. Стало быть, дошедший до нас экземпляр книжки был переписан набело в промежутке между 1482–1492 гг. Однако сама книжка могла быть создана и раньше. Лука Пачоли в *Сумме* (VI, I, II) говорит, что книжку по перспективе Пьеро написал на итальянском, а латинский перевод выполнил его друг Маттео даль Борго. Таким же образом мог появиться на свет и латинский текст книжки *О пяти правильных телах*. Во всяком случае, итальянский текст, опубликованный впоследствии Пачоли, естественно рассматривать как исходный.

Что касается этой публикации в приложении к изданию *Божественной пропорции*, её полное заглавие звучит следующим образом: *Libellus in tres partialis tractatus divisus quinque corpore regularium e dependentium active per scrutationis. D. Petro Soderino principi perpetuo populi florentinia. M. Luca Paciolo, Burgense Minoritano particulariter dicatus, feliciter incipit* («Книжка, разделённая на три отдельных трактата, о пяти правильных и зависимых [от них] телах, последовательно рассмотренных. Г[осподину] Петру Содерини, постоянному предводителю флорентийского народа. М[аэстро] Лука Пачоли, миноритом из Борго, по частям продиктованная, счастливо начинается»).

Об каком-либо отношении Пьеро делла Франческа к трактату в этом заглавии действительно ничего не говорится. Но и своё собственное «авторство» Пачоли обозначает весьма странным образом. А именно, он говорит, что книжка эта им *particulariter dicatus*, «по частям (или частично?) продиктована», — и не более того.

Это заставляет задуматься. Ведь Лука Пачоли в своих сочинениях вовсе не выглядит человеком, стремившимся беззастенчиво присваивать чужие результаты. Так в I разделе I главы *Суммы* он пишет:

> И поскольку мы будем следовать по большей части Л. Пизанскому, я намерен заявить, что когда имеется какое-нибудь предложение без автора, оно — этого Л. А когда других, кто был — авторство приведено (цит. по Глушкова, Глушков 1982, с. 58).

Аналогичное уведомление имеется и в IV главе *Божественной пропорции*:

> Первым делом я замечу, что всякий раз, когда я буду писать «первое в первой», «четвёртое во второй», «десятое в пятой», «20 в 6» и так до пятнадцатой, под первой цифрой всегда следует понимать номер предложения, а под второй — номер книги нашего философа Евклида, который всеми признаётся за главу данного факультета. Таким образом, говоря о пятом в первой, я говорю о пятом предложении его первой книги, и так же о других отдельных книгах, составляющих цельную книгу об элементах и первоначалах Арифметики и Геометрии. Но когда упоминается другое его сочинение или книга другого автора, это сочинение или этот автор называются по имени.

Не следует забывать и о том, что в те периоды, когда Лука жил в своём родном городе, он имел возможность общаться с Пьеро напрямую. Естественно думать, что встречи двух математиков были достаточно частыми, а их общение — содержательным. Темы книжки *О пяти правильных телах* почти наверняка обсуждались в этих беседах, а потому они оба могли в какой-то мере смотреть на неё как на свою, вне зависимости от того, кто придал ей окончательную форму.

Мы ничего не знаем и о том, какое влияние на Пьеро делла Франческа и Луку Пачоли оказали работы немецкого астронома и математика Иоганна Мюллера (1436–1476), более известного под латинским именем Региомонтан. А ведь он много жил в Италии и умер в Риме, так что итальянские математики могли быть знакомы с ним и его рукописями. Среди его сочинений имелся трактат *De quinque corporibus aequilateris, quae vulgo regularia nuncupantur, quae videlicet eorum locum impleant naturalem et quae non contra commentatorem Aristotelis Averroem* («О пяти равносторонних телах, обычно называемых правильными, а именно, какие из них заполняют естественное место, а какие нет, против Аверроэса, комментатора Аристотеля»). До наших дней он не дошёл, но Региомонтан даёт его обзор в другой своей работе. В этом трактате рассматривалось построение правильных тел, их преобразования друг в друга, вычислялись их объёмы. Содержалась в нём и встречающаяся у Пачоли идея о том, что последовательным изменением правильных тел можно получать безграничное количество полуправильных.

Далее, первая печатная книга по математике вышла в 1475 году. Пьеро делла Франческа жил ещё в мире рукописей, а более молодой Лука Пачоли зрелые свои годы провёл уже в мире печатных книг. Рукопись могла быть переписана для собственного пользования кем-то ещё, но каждый раз в одном экземпляре. Её переписчик совершает богоугодное дело уже потому, что продлевает жизнь рукописи, не даёт ей погибнуть. То же и в случае, когда сохранившаяся рукопись превращается в печатную книгу.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о плагиате с оценкой, в большей мере соответствующей системе взглядов того времени. Похоже, что в ту эпоху, когда жили Пьеро делла Франческа и Лука Пачоли, вопрос об авторстве ещё попросту не стоял. (Средневековье, между прочим, вообще не знает авторства: можем ли мы сказать, кто был «автором» прекрасных готических соборов? Сама эта постановка вопроса очевидным образом бессмысленна. — Вот и в *Началах* Евклида большая часть результатов была переписана из других математических книг, но мы этим почему-то не возмущаемся и Евклида в плагиате не обвиняем.) Самому Пьеро была интересна математика, а не слава в грядущих веках. В предисловии к своей латинской книжке он пишет, что она будет ему «залогом и памятником», но не у потомков вообще, а у его герцогского Высочества.

А что касается авторства как указания на то, кто первый совершил такое-то открытие, то здесь важен момент онтологический. Математик открывает какие-то неизвестные доселе тела, а Колумб в это же самое время открывает новые страны. Но Колумб не является «автором» этих стран, и точно так же математик не является «автором» открытых им тел. И ведь когда Колумб организовывал свою экспедицию, его целью были сами новые страны, а не память потомков о том, что он их открыл.

Лука Пачоли и формирование института экспертизы

Обращаясь в послании *О божественной пропорции* к миланскому герцогу Лодовико Сфорца, Лука Пачоли нигде не рекомендует себя так: «Я математик, потому что могу получать новые математические результаты». Нет, он говорит о себе совершенно иначе: «Я математик, потому что я знаю математику и могу ей научить других».

Вот и Данте в *Божественной комедии* называл Аристотеля «учителем тех, кто знает», и Лука не зря эту цитату приводит. Для уяснения этого довода проведём следующее сравнение. Врач знает медицину и поэтому может лечить. Юрист знает право и поэтому может быть адвокатом. А математик знает математику — и что дальше? Он может ей учить? Но ведь и врач, и юрист тоже могут учить своим наукам — для чего в университете и существуют медицинский и юридический факультеты. Но кем может быть математик вне сферы обучения? Какое умение выделяет его среди прочих людей и делает кому-то нужным? Астроном умеет вычислять движения небесных светил и составлять гороскопы. Архитектор способен построить прекрасную виллу, военный строитель — неприступную крепость. Художники создают прекрасные произведения, услаждающие взор. А математик — какой от него может быть прок?

Посмотрим, как на этот вопрос отвечает сам Лука. Прежде всего, он настаивает на том, что математика в качестве самой точной науки является основанием и пробирным камнем для всех прочих наук.

> «В [нашем трактате] мы говорим о высоких и утончённых вещах, которые поистине служат испытанием и пробирным тиглем для всех изысканных наук и дисциплин:

ведь из них проистекают все прочие спекулятивные действия, научные, практические и механические; и без предварительного ознакомления с ними человеку невозможно ни познавать, ни действовать, как это будет показано... Как подтверждают Аристотель и Аверроэс, наши математические науки являются самыми истинными и стоят на первом уровне строгости, а за ними идут естественные» (гл. I).

От похвалы математике как таковой он переходит к похвалам математикам:

«Благоразумным известна пословица: *Aurum probatur igni et ingenium mathematicis.* То есть золото проверяется огнём, и проницательность разума — математическими дисциплинами. Это высказывание говорит вам, что добрый разум математиков наиболее открыт каждой науке, ведь они привычны к величайшей абстракции и тонкости, поскольку всегда рассматривали то, что находится вне чувственной материи. Как говорит тосканская поговорка, это те, кто расщепит волос на лету» (гл. II).

Но само по себе «рассмотрение того, что находится вне чувственной материи» вряд ли способно заинтересовать властителей, к которым обращается Лука. Поэтому он переходит от вещей идеальных к вещам реальным, и приводит доводы, согласно которым математика является необходимым основанием военного искусства и архитектуры:

«О Вашем Герцогском Высочестве идёт и иная добрая слава, когда крепнет уверенность близких родственников и благодарных подданных в том, что в её высочайшем Владении они защищены от всех нападений... От повседневного опыта Вашего Герцогского Высочества не скрыто, что оборона больших и малых республик, называемая также военным искусством, невозможна без знания Геометрии, Арифметики и Пропорций, каковые превосходно сочетаются с честью и пользой. И ни одно достойное занятие из тех, с которыми имеют дело инженеры и новые механики, так не ведёт к взятию [крепости] или же к долгой обороне, как те, в которых в былые времена упражнялся великий геометр Архимед из Сиракуз» (гл. II).

«Они называют себя архитекторами, но я никогда не видел у них в руках выдающейся книги нашего достойнейшего архитектора и великого математика Витрувия, который составил трактат *Об архитектуре* с наилучшими описаниями всякого сооружения. И те, кому я дивлюсь, пишут на воде и строят на песке, наскоро растратив своё искусство: ведь они являются архитекторами лишь по имени, ибо не ведают разницы между точкой и линией и не знают различия между углами, без чего невозможно хорошо строить... Однако есть и такие, кто восхищается нашими математическими дисциплинами, внедряя истинное руководство всеми постройками в согласии с сочинением вышеупомянутого Витрувия. Отклонение от него заметно, если посмотреть, каковы наши строения, как церковные, так и светские: какое искривлено, а какое перекошено» (гл. XLIV).

Говоря нынешним языком, Лука рекомендует себя герцогу в качестве эксперта, причём в вопросах не собственно математических (такой эксперт герцогу нисколько не нужен), но сугубо прикладных, имеющих самое прямое отношение к сохранению власти (военное дело) и процветанию (архитектура). Что же касается умения получать новые математические результаты, оно в эту эпоху ещё не рассматривалось как необходимое отличительное качество математика высокого класса, оставаясь случайным, а не сущностным признаком последнего.

Литература

[1] Глушкова Ф. Р., Глушков С. С. Геометрическая часть «Суммы» Пачоли. *История и методология естественных наук*, **29**, 1982, с. 57–63.

[2] Коллинз Р., Рестиво С. Пираты и политики в математике. *Отечественные записки*, 2001, № 7.

[3] Ольшки Л. *История научной литературы на новых языках.* В 3 т. М.–Л.: ГТТИ, 1933–34. (Репринт: М.: МЦИФИ, 2000.)

[4] Соколов Я. Лука Пачоли — человек и мыслитель. В кн.: Пачоли Лука. *Трактат о счетах и записях.* М.: Статистика, 1974.

[5] Юшкевич А. П. *История математики в средние века.* М.: Физматгиз, 1961.

[6] Arrighi G. Piero della Francesca e Luca Pacioli. Rassegna della questione del plagio e nuove valutazioni. *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi*, **23**, 1968, p. 613–625.

[7] Biagioli M. The social status of Italian mathematicians, 1450–1600. *History of Science*, **27**, 1989, p. 41–95.

[8] Bertato F. M. A obra «De Divina Proportione» (1509) de Frà Luca Pacioli. *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*, Rio Claro, 2003.

[9] Biggiogero G. M. Luca Pacioli e la sua «Divina proportione». *Rendiconti dell'Istituto lombardo di scienze e lettere*, **94**, 1960, p. 3–30.

[10] Castrucci S. *Luca Pacioli da 'l Borgo San Sepolcro.* Alpignano: Tallone, 2003.

[11] Davis M. D. *Piero della Francesca's mathematical treatises: The «Trattato d'abaco» and «Libellus de quinque corporibus regularibus»* . Ravenna: Longo Editore, 1975.

[12] Field J. V. Rediscovering the Archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro and Johannes Kepler. *Archive for History of Exact Sciences*, **50**, 1997, p. 241–289.

[13] Herz-Fischler R. *A mathematical history of division in extreme and mean ratio.* Waterloo: Wilfrid Laurier Univ. Press, 1987 (2^d ed. NY, Dover, 1998).

[14] Lucas de Burgo. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione & Proportionalita.* Venetia: Paganino de Paganinis, 1494.

[15] Lucas de Burgo. *Divina Proportione.* Venetia: Paganino de Paganinis, 1509.

[16] Mancini G. L'opera «De corporibus regularibus» di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli. *Accademia dei Lincei*, 1909.

[17] Morison S. *Fra Luca Pacioli of Borgo San Sepolcro.* New York, 1933.

[18] Picutti E. Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli. *La Scienze*, **246**, 1989, p. 72–79.

[19] Piero della Francesca. *Libellus de quinque corporibus regularibus.* Eds. M. D. Emiliani e. a. Florence: Giunti, 1995.

[20] Pittarelli G. Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de' Franceschi? *Atti IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 6–11 aprile 1908*, III. Rome, 1909, p. 436–440.

[21] Portoghesi P. Luca Pacioli e la «Divina Proportione». In: *Civiltà delle machine*, 1957, p. 22–28.

[22] Regiomontanus. *Commensorator.* Ed. Blaschke W., Schoppe G. Wiesbaden: Verlag der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz, 1956.

[23] Ricci I. D. *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato.* Sansepolcro, 1940.

[24] Rose P. L. *The Italian renaissance of mathematics.* Geneva: Librairie Droz, 1975.

[25] Speziali P. Luca Pacioli et son oeuvre. *Sciences of the Renaissance*, Paris, 1973, p. 93–106.

[26] Taylor R. E. *No royal road: Luca Pacioli and his times.* Chapel Hill: Univ. of North Carolina Press, 1942.

[27] Williams K. Plagiary in the Renaissance (Luca Pacioli and Piero della Francesca). *Mathematical Intelligencer*, **24**, 2002, p. 45–57.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта “Школа Пифагора”,
Центр образовательных проектов “СИГМА”,
Новосибирск.

Email: pythagor@ngs.ru

Образование и технология «снежного кома»

Ю. А. Неретин

Некоторые методы обучения и контроля в вузовском математическом образовании, бессмысленность которых была понятна уже в советское время, до сих пор остаются традиционными для многих российских вузов. В статье приведена критика подобных методов и намечены пути выхода из тупика.

Моя цель — обсуждение одной распостраненной у нас (и часто считающейся образцовой) образовательной технологии. Начну с далекого воспоминания, когда я, впервые, еще свежим взглядом, увидел проявления «снежного кома» в действии. Собственно, я хочу для дальнейшего обсуждения иметь конкретный пример образовательной «фантасмагории». Сам по себе пример ничем не замечателен, любой человек, работавший в массовом образовании и способный к трезвой самооценке, видел и не такое.

1983 год. Я, только что «распределенный» на работу в вуз «молодой специалист», сижу на занятии «опытного преподавателя». Тема — «вычисление обратной матрицы». Напомню, как со стороны выглядит вычисление обратной матрицы по методу Гаусса в действии. На доске нарисована таблица. В ней 18 чисел. Далее с этими числами производятся определенные манипуляции (они переставляются, складываются, вычитаются, делятся, умножаются). После чего выписывается новая таблица. Таблица, возникшая на 6–9 шаге, содержит ответ. Список правил довольно замысловат, удержать его в памяти долго нельзя (если не понимаешь, откуда они взялись). Разумеется, отступление от правил дает неверный результат.

Академическая «пара». Матрица сменяет матрицу, студент сменяет студента... Абсурдность «действа» у меня как человека, еще не являвшегося «профессиональным преподавателем», не вызывала сомнений. Прежде всего было и видно, и очевидно, что студенты (говоря политкорректно) большого удовольствия не испытывают. Далее мне было вообще не понятно, зачем это делается. Буквально к тем же вычислениям приводит решение системы линейных уравнений с произвольными параметрами в правой части. В этом случае никаких алгоритмов запоминать не надо (и не надо забивать память). Тогда мы лишь теряем время на выписывании неизвестных и параметров (а также увеличиваем вероятность случайной описки). Для человека, которому, начиная с завтрашнего дня, предстоит всю оставшуюся жизнь с утра до вечера вручную считать обратные матрицы по методу Гаусса, этому семинару цены не было бы. Но если ему предстоит приступить к сему почтенному занятию через месяц, то алгоритм придется учить заново. (кстати, это было не при Иване Грозном, электронно-вычислительная техника была достаточно широко распостранена).

Заключительный аккорд. Несколько минут до «звонка». Выясняется, что никто из студентов не знает, что же такое «обратная матрица» ... На самом деле, было еще интереснее (для меня тогда). Определение «обратной матрицы» кто-то бойко отрапортовал. А вот загадочную «единичную матрицу», упоминавшуюся в определении, написать никто не мог.

Как понимать происходившее, я тогда еще не знал. Все преподаватели привыкли (я тогда тоже был не лишен опыта) к «глупым студентам». Но ведь здесь и студенты были не совсем при чем. От них добивались чего-то несбыточного, забывая обсуждать природу вещей ...

Для нашей системы образования привычно большое количество контрольно-силовых форм: экзаменов, зачетов, контрольных, коллоквиумов и т. п. Все это вполне разумные формы деятельности, и все они способны нести положительную нагрузку. Только эти мероприятия очень легко начинают работать против образования при потере разумности со стороны преподавателя или при потере чувства меры.

В описанном выше случае произошло и то, и другое. Преподавателю было трудно объяснять студентам, что такое «обратная матрица» (люди, имеющие опыт преподавания, меня поймут). А вот обучить студентов ее посчитать на «типовой контрольной» преподаватель мог, он мудро ставил достижимые цели и их успешно достигал. Вместо (вместо!) того, чтобы учить студентов.

Более того, преподавателю надо было добиться того, чтобы студенты написали «типовую» контрольную. Иначе у него самого возникли бы проблемы (потому что дальше он должен был бы и сам распутываться с не написавшими ее студентами, см. ниже).

Система отработок

Для наших технических вузов (ныне именуемых университетами) была типична система с большим количеством контрольных работ, коллоквиумов, практикумов, расчетных работ, типовых домашних заданий и т.п. Студент должен был их сдавать, а несданные работы переводились в разряд «долгов». Студент или сдает «контрольные точки» в течение семестра (по нескольким предметам) или получает «снежный ком» из всего несданного на зачет. В добросовестно работающих структурах были также «отработки» (переписывание контрольных и т.п.), где студент мог сдавать накопившуюся отчетность.

К сожалению, жива и проявляет себя разными способами вера в эту технологию (например, она сползает в «хорошие школы»). Поэтому я подробно обсуждаю ее в «классическом виде» — хорошем вузе 80-х годов, который сейчас (часто подсознательно) выглядит как «античный образец» для подражания. Сам тот вуз — достойная уважения структура (там не только «считали обратные матрицы», отнюдь). Но вот вопрос — в чем ему надо подражать? Наши восьмидесятые годы в образовании не могут не выглядеть радужно с глубинных высот XXI века, но в действительности-то это уже были годы тяжелого и запутанного кризиса.

Некоторые минусы снежных комов

1. Чем хуже студент, тем больше на него тратится сил преподавателя. Должно быть наоборот.

2. Обучение подстраивается под будущие контрольные, и они из вспомогательного средства превращаются в самоцель. См. «обратную матрицу» выше; нужно, чтобы студенты посчитали ее на контрольной достаточно быстро. Появление самостоятельного жанра занятий по «подготовке к контрольной»— признак, скорее свидетельствующий о неблагополучии обстановки. При появлении искуственных целей, цели, более важные, могут вообще ускользать (и действительно ускользают) из внимания.

3. Основное. В реальности все не сдается, а «спихивается». Выгодное поведение студента — именно «спихивание», а не попытка разобраться. На что уже не остается ни времени, ни сил, ни — главное — желания (см. выше успешные формулировки студентами определения «обратной матрицы»). С точки зрения студента «спихивание» на отработках правильно, разумно и эффективно. Более того, при некотором старании (добросовестности) преподавательского корпуса в целом такое поведение можно сделать единственно возможным. Мелочность рождает мелочность.

4. Особенно это усиливается, когда разные отчетности и отчетности по разным предметам перемешиваются во времени. Скажем, экзамен предполагает концентрацию человека с целью разобраться в предмете (и основная цель экзамена в этом, а вовсе не в «учете и контроле», этих самых «знаний»). Но определенная степень концентрации нужна и на других этапах обучения. Трудно представить себе что-либо, более рассевающее внимание, чем эти самые перемешанные отработки. Возникает необходимость скоростного зазубривания лишенных смысла самих по себе лоскутков курса для их последующего еще более скоростного забывания.

5. Процесс обучения предполагает определенный интерес обучающегося к предмету. Трудно представить себе, что-либо, лучше гасящее живой интерес, чем повседневный мелочный контроль.

6. Система поощряет самообман преподавателей. Студент на отработке может совершать сколь угодно сложные действия, при этом ничего не понимая. У преподавателя остается иллюзия успеха и чувство выполненного долга. Скажем, студенты, несмотря на абсолютное непонимание предмета, успешно «считают обратную матрицу»!

7. Заболевший студент далее оказывается виноватым (даже если он все умеет делать). Лес рубят — щепки летят. Кстати меня чуть ли не каждый год удивлял состав отчисляемых после первой сессии. В среднем 20-25 процентов из них я лично предпочел бы видеть сидящими в аудиториях (в отличие от многих, продолжавших успешно сидеть).

8. Возможность существования системы образования предполагает разумность и добросовестность преподавателей. В них приходится верить. Но система «отработок» уж слишком их предполагает. К сожалению, за последние 15 лет качественный состав преподавательского корпуса не улучшился. С другой стороны технология дает малые возможности реализовываться положительным качествам преподавателя, если они есть.

9. Я отчасти повторюсь. Чем добросовестней образовательная структура следует этой технологии, тем выше ее «контр-продуктивность». Тем выше «лоскутность», тем успешнее «знания» вымываются из мозгов, тем лучше отбивается интерес, и тем интенсивней поощряется халтура. Настоящий ужас начинается, когда исчезает внешняя, сдерживающая преподавателей сила (при большевиках она очень даже была). А какие возможности у недобросовестной структуры, добросовестно следующей данной технологии, да еще и в рыночных условиях, я не обсуждаю.

10. Ко всему этому букету, в современных школах добавляются еще и специфически школьные приемы, вроде текущих оценок. То есть применяется двойная система насилия. Уж или одно, или другое.

11. Слишком большие затраты времени и сил преподавателя. У него их не так уж много. Например, было бы неплохо, если бы у преподавателя (учителя) оставались силы и время на удержание или повышение собственной квалификации (вместо победоносного «вычисления обратных матриц» на отработках).

Зачем это нужно?

а) Есть особые случаи. Я их не обсуждаю.

б) Контрольные (в умеренных дозах) — полезное мероприятие. Прямая цель отработок — повышение статуса контрольных. Но мероприятия, «повышающие статус», очень легко становятся обликом обучения. Не слишком ли дорогая цена? Иногда говорят, что студент должен «проработать тему». Но вузовские «типовые контрольные» не имеют своей целью достижение понимания. Более того, чем больший юридически-контрольный статус им придавать, тем менее они даже внешне имеют отношение к «пониманию». Это не совсем очевидный тезис; дело в том, что и преподаватель тоже заинтересован в «успешной сдаче» контрольных; поэтому, чем формализованней контрольная, тем преподавателю же лучше. Этот довод может показаться устаревшим, сейчас «некоторые» преподаватели наоборот заинтересованы в том, чтобы оказать посильную «помощь» отставшему студенту. Но ведь и «помогать» лучше на формализованном предмете. . .

в) Довод «за», часто приводившийся на моей памяти: это — возможность индивидуальной работы со студентами. В реальности это была «работа с отстающими», такая же «эффективная», как всегда. Я пробовал несколько раз забавы ради: студент/ка благодарно кивает, все понимает (легко представить себе преподавателя, кому это нравится). На следующий день ставлю «контрольный опыт» ... Обнаруживаю девственно чистое сознание. Пробовал «мариновать» хороших ребят: тоже получается плохо, уж больно обстановка неподходящая. Для «индивидуальной работы» лучше искать другие возможности.

г) Довод, несколько циничный. В образовательных структурах за «высокими учебными требованиями» часто скрывается дисциплинарный контроль. Пока студенты не ознакомились с «сессией» на собственном опыте, им приходится каким-то способом доходчиво объяснять разницу между школой и вузом. По-видимому, на этом участке отработки необходимы. В разумной степени. Кстати, «силовой элемент» обучения в вузе в конечном счете концентрируется на зачете и экзамене. Ну так может там его и концетрировать и не растягивать паутину на весь семестр? Умеешь на зачете решать простые задачи — свободен, не умеешь — иди погуляй и подумай. Как организовывать такой зачет — это интеллектуальная задача, конкретная в каждом конкретном случае. Возможна, например, относительно простая и засчитываемая как единое целое зачетная контрольная не совсем предсказуемого состава (ну, скажем, будет вам 3-6 задач из следующих 15 видов; если нужно «повысить статус контрольных», то можно число задач для разных студентов сделать разным; в пределах упомянутой «вилки»). Тогда студенту предлагают сесть и разобраться; это лучше, чем последовательное списывание 25 задач, значительно более сложных.

д) Еще один возможный довод (во всяком случае в отношении «классического» Советского времени). Мелочная регламентация действий «по контрольным точкам» есть также средство контроля вузовского преподавателя кафедральной администрацией. Ни на что не годится, так пусть лучше «считает обратную матрицу». Но (я повторяюсь), на этом поприще положительным качествам негде ни реализоваться, ни развиться (кстати, это важная добавка). А вот отрицательные — и реализуются, и развиваются.

е) Я не знаю, разрешима ли вообще задача «научить всех», это глубоко философский вопрос, я его не обсуждаю. В поздне-Советское время она точно была не разрешима, а «технология снежного кома» развивалась как имитация попытки решения этой нерешаемой задачи. Именно имитация попытки, а не попытка. Подробное обсуждение этой грустной истории меня слишко далеко бы завело. Еще менее эта задача разрешима сейчас (а ближайшие годы в вузах ничего хорошего не предвещают). Ну так может и не надо ее решение имитировать? Все равно реально обучаются лишь те, кто этого хочет. Не надо им усиленно мешать и рьяно стараться уменьшить их количество, отбивая интерес к предмету.

Неретин Юрий Александрович,
доктор физ.-мат. наук.

Email: neretin@mccme.ru

Введение в теорию вероятностей

А. И. Саблин

Предлагаемое пособие может служить вводным курсом в теорию вероятностей для старшеклассников и студентов нематематических специальностей. Пособие вышло отдельным изданием в издательстве МГУЛ. Настоящая публикация осуществляется с разрешения указаноого издательства.

1. Статистический смысл вероятности

Теория вероятностей — это раздел математики предназначенный для изучения так называемых случайных явлений. Под ***случайными явлениями*** мы понимаем такие явления природы или научные эксперименты, результат которых мы не можем предсказать принципиально. В чистом виде таких явлений в природе нет, но есть много явлений, для которых методы теории вероятностей работают достаточно хорошо.

Приведём примеры:

1) Подбрасывание монеты или игральной кости.

2) Количество осадков за летний сезон.

3) Выигрыш в лотерею.

4) Число голосов, отданных за кандидата на выборах.

5) Курс доллара через неделю.

При бросании монеты мы не знаем, что выпадет - орел или решка. Однако мы уверены, что решка выпадает также часто, как и орел. В теории вероятностей мы говорим, что вероятность выпадения орла равна вероятности выпадения решки и равна 0,5. Этот факт можно обосновать логически и проверить экспериментально. Предположим, что мы провели эксперимент по многократному подбрасыванию монеты несколько раз и в результате получили следующую таблицу:

Число подбрасываний	10	50	500	10000
Число выпадений решки	3	29	241	5023
Относительная частота выпадения решки	0,3	0,58	0,482	0,5023
Отклонение от 0,5	0,2	0,08	0,018	0,0023

Мы видим, что чем больше число повторений, тем меньше относительная частота отклоняется от 0,5. Это и означает, что вероятность выпадения решки равна 0,5. Заметим, что экспериментальный способ отыскания вероятности принципиально не точен. Вопрос о числе повторений эксперимента, необходимом для определения неизвестной вероятности с заданной точностью, решается математической статистикой, которая использует развиваемые в теории вероятностей методы.

Упражнение

1. Летом 2004 года в Москве было 72 солнечных дня, а летом 2005 года 75 солнечных дней. Какова относительная частота солнечных дней в 2004 году? В 2005 году? Какова вероятность, что 10 июня 2020 года в Москве будет солнечным ?

Ответ: 0,783; 0,815; 0,80.

2. Классический способ подсчёта вероятности

Логическое обоснование того, что вероятность выпадения решки равна 0,5, состоит в следующем. При подбрасывании монеты возможны два исхода: выпадение решки и выпадение орла. В силу симметричности монеты, нет никаких оснований считать, что решка будет выпадать чаще, чем орел или наоборот. Следовательно, решка будет выпадать примерно в половине случаев, что и означает, что вероятность её выпадения равна 0,5. Мы, конечно, предполагаем, что монета на ребро не становится.

Подобный метод рассуждений применяется часто и называется классическим способом вычисления вероятности. Он может быть выражен следующей формулой:

$$(\textit{вероятность}) = \frac{(\textit{число благоприятных исходов})}{(\textit{общее число равновероятных исходов})}.$$

Примеры

1. Игральную кость бросили один раз. Найти вероятность
а) выпадения тройки;
б) выпадения пятерки;
в) выпадения четного числа очков;
г) выпадения больше четырех очков.

Решение: Запишем решение в случае в), а в остальных укажем ответы. Общее число равновероятных исходов равно 6 по числу граней игральной кости. Благоприятные исходы: выпадение 2 , 4 или 6. Поэтому вероятность равна 3/6=1/2.

Ответ: а) 1/6; б) 1/6; в) 1/2; г) 1/3.

2. В ящике лежат два белых шара, два черных шара и один красный шар. Случайным образом выбрали один шар. Какова вероятность, что он
а) белый;
б) не черный?

Выбрали два шара. Какова вероятность того, что
в) оба шара белые;
г) один из шаров красный;
д) шары разного цвета;
е) первый белый, а второй чёрный?

Решение: Слова “случайным образом “ означают, что каждый шар может быть выбран с равной вероятностью. Поэтому решение в пунктах а) и б) очевидно.

Для решения следующих пунктов пронумеруем шары: 1,2 — белые, 3,4 — черные,5 — красный, и выпишем все возможные пары шаров:

(1;2), (1;3), (1;4), (1;5); (2;3), (2;4), (2;5); (3;4), (3;5); (4;5).

Каждая из пар может появиться с равной вероятностью. В случае в) благоприятным будет исход (1,2), в случае г) исходы (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), а в случае д) все исходы кроме (1,2), (3,4).

Для решения задачи е) приведенного списка не достаточно, так как в нём не учтен порядок в котором берут шары. Учитывающий порядок список будет содержать в два раза больше элементов:

(1;2), (1;3), (1;4), (1;5);
(2;1), (2;3), (2;4), (2;5);
(3;1), (3;2), (3;4), (3;5);
(4;1), (4;2), (4;3), (4;5);
(5;1), (5;2), (5;3), (5;4).

Благоприятными будут (1,3), (1,4), (2,3), (2,4).

Ответ: а) 2/5; б) 3/5; в) 1/10; г) 4/10; д) 8/10; е) 4/20.

3. Монету бросили три раза. Какова вероятность, что

а) решка выпала один раз;

б) после орла выпала решка.

Решение: Оформим решение в виде таблицы:

	а)	б)
РРР		
ООР	+	+
ОРО	+	+
ОРР		+
РОО	+	
РОР		+
РРО		
РРР		

В левом столбце таблицы перечислены возможные равновероятные последовательности выпадения орла и решки, а во втором и третьем столбцах отмечены те из них, которые являются благоприятными для событий из пунктов задачи.

Ответ: а)3/8; б)4/8=1/2.

4. Игральную кость бросили два раза. Какова вероятность, что

а) первый раз выпало меньше очков, чем во второй;

б) сумма выпавших очков не превосходит трёх.

Решение: Все возможные равновероятные исходы описанного в задаче эксперимента можно изобразить в виде таблицы:

	1	2	3	4	5	6
1	б	б				X
2	а, б					
3	а	а				
4	а	а	а			
5	а	а	а	а		
6	а	а	а	а	а	

Мы считаем, что клетка, где стоит буква X, соответствует случаю, когда первый раз выпало 6, а во второй раз 1. Буквой а помечены клетки, соответствующие пункту а); буквой б помечены клетки, соответствующие пункту б).

Ответ: а)15/36, б) 3/36.

Упражнения

1) Правильную игральную кость бросили 2 раза. Какова вероятность, что

   а) хотя бы раз выпала тройка;

   б) сумма очков больше трёх;

   в) разность очков меньше двух?

2) Игрок случайным образом выбрал кость домино. Какова вероятность, что это

   а) тройка;

   б) дубль?

3) В ящике лежат 4 белых и 2 черных шара.

   а) Случайным образом взяли 3 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

   б) Случайным образом взяли 5 шаров. Какова вероятность, что среди них 2 черных?

4) В колоде 2 козырных карты и 3 не козырных. Игрок взял три карты. Какова вероятность, что среди них не менее одного козыря?

5) Из букв слова ПАРТА случайным образом взяли две и положили в ряд. Какова вероятность, что получилось слово ПА?

6) Маленький ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы “Т”, “О” и “Р”. В некоторый момент времени он выложил их в ряд. Какова вероятность , что получилось осмысленное слово ?

7) Какова вероятность, что случайно выбранное двузначное число

   а) делится на три;

   б) делится на семь;

   в) имеет сумму цифр большую 15?

8) Три шара случайным образом разложили по трем ящикам. Какова вероятность, что в первом белый, во втором черный, в третьем красный, если

   а) все ящики не пусты;

   б) если некоторые ящики могут быть пустыми?

9) Четыре шара, из которых белых ровно два, разложили по трем ящикам. Какова вероятность, что белые лежат в одном?

10) В первом ящике один белый и два черных шара. Во втором - два белых и два черных. Из первого во второй переложили шар. Затем из второго взяли шар. Какова вероятность, что он белый?

11) ***Задача о наследовании признака***. Каждый из родителей имеет генотип Аа или АА с равной вероятностью. Какова вероятность, что ребенок имеет ген А , если один ген он наследует от матери, а другой от отца.

    Комментарий. Принято считать, что обусловленный генетически признак соответствует наличию некоторого гена (А) в некоторой аллели. Причем второй ген этой аллели может быть любым. (Мы считаем что он А с вероятностью 0.5, что, в общем-то, необязательно). Поэтому в задаче на самом деле спрашивается, какова вероятность, что ребенок унаследует признак, если каждый из родителей этим признаком обладает. При этом предложена некоторая математическая модель наследования. Интересно также рассмотреть другие модели. Например, если признак наличествует в случае гена А в одной аллели и гена В в другой, если вероятность для второго гена не 0,5 и т.п.

12) Участок сельскохозяйственных угодий имеет смысл орошать искусственно, если вероятность засушливого лета более 30 процентов. Лето считается засушливым, если из четырёх первых декад лета засушливы более трёх. Имеет ли смысл орошать участок, если для этого участка вероятность засушливой декады 50 процентов?

3. Геометрические вероятности

Метод геометрических вероятностей состоит в простейшем обобщении классического подхода на случай, когда множество равновероятных исходов бесконечно. При этом в качестве “числа исходов” берут длину, площадь или объем соответствующей фигуры.

Примеры

1. Самолёт сбрасывает бомбу в любую точку круга радиусом 20 м с равной вероятностью. Какова вероятность, что он попадает в здание шириной 10 м и длиной 20 м, стоящее внутри круга ?

Решение: Искомой вероятностью следует считать отношение площади здания к площади круга.

Ответ: $\frac{200}{400\pi} = \frac{1}{2\pi}$

2. Пешеход подошел к автобусной остановке. Какова вероятность, что он уедет в течении 5 минут, если интервал движения автобуса 15 минут.

Ответ: 5/15=1/3.

3. Задача о встрече. Два друга договорились о встрече. Каждый приходит в условленное место в любой момент времени с 12 часов до 13 часов с равной вероятностью. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них ждет другого 30 минут ?

Решение: Пусть x – время в которое пришел первый, а y – время в которое пришел второй. Тогда множество возможных исходов это квадрат с вершинами (12;12), (12;13), (13;12), (13;13) на координатной плоскости. Множество возможных исходов – это точки квадрата удовлетворяющие условию $|x-y| \leq 0,5$. Это множество можно получить, исключив из квадрата треугольник с вершинами (12,5;12), (13;12), (13;12,5) и треугольник, симметричный ему относительно прямой $x = y$. Суммарная площадь этих треугольников 1/4.

Ответ: 3/4.

Упражнения

1) Пассажир, опаздывающий на поезд, подошел к автобусной остановке в 21 час 15 минут. Какова вероятность, что он успеет на поезд, если поезд отправляется в 21 час 50 минут, автобус идет до вокзала 15 минут, на посадку в поезд требуется 5 минут, а интервал движения автобуса 20 минут?

2) Какова вероятность, что два курьера встретятся на работе, если каждый из них бывает там в течении получаса в период от девяти до двенадцати часов дня?

3) Снаряд миномета попадает с равной вероятностью в любую точку круга радиуса 10 метров с центром в точке прицеливания. При этом он поражает все цели, находящиеся от него на расстоянии не более 7 метров. Какова вероятность поразить цель, находящуюся в точке прицеливания, с одного выстрела?

4) Плоскость разграфлена параллельными линиями, находящимися друг от друга на расстоянии 5 сантиметров. На плоскость наудачу брошена монета диаметром 2 сантиметра. Какова вероятность, что монета не пересечет ни одну из линий?

5) ***Задача Бюффона***. Плоскость разграфлена параллельными линиями находящимися друг от друга на расстоянии 3 сантиметра. На плоскость наудачу брошена игла длиной 3 сантиметра. Какова вероятность, что игла не пересечет ни одну из линий?

6) После аварии на химкомбинате произошел выброс вредных веществ, представляющий собой облако радиусом 400 м. На расстоянии 5 км от завода находится детское учреждение. Приблизительно можно считать, что центр облака осядет в любой точке находящейся от химкомбината на расстоянии не более 7 км с равной вероятностью. Немедленная эвакуация детей считается необходимой, если риск оказаться в зараженной территории превышает 3 процента. Является ли в описанной ситуации немедленная эвакуация необходимой ?

4. Элементы комбинаторики

Рассмотрим задачу:

Задача о шарах. В ящике находятся десять белых и семь черных шаров. Случайным образом взяли пять шаров. Какова вероятность, что среди них

а) ровно три белых;

б) первые три белые а последние два черные ?

Принципиально эта задача ничем не отличается от рассмотренных нами ранее, однако выписать все наборы из пяти шаров представляется трудоемкой задачей. С другой стороны, для вычисления вероятностей достаточно знать лишь общее количество наборов и количество благоприятных наборов. Раздел математики, который дает формулы для подобных подсчетов, называется комбинаторикой.

Определение. Число упорядоченных наборов длины k, составленных из n элементов, называется ***числом размещений*** n по k.

Обозначение: A_n^k.

Пример. $A_5^2 = 20$.

Пояснение:
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,1), (2,3), (2,4), (2,5),
(3,1), (3,2), (3,4), (3,5),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,5),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4).

Определение. Число неупорядоченных наборов длины k, составленных из n элементов, называется ***числом сочетаний*** из n по k.

Обозначение C_n^k.

Пример. $C_5^3 = 10 = C_5^2$.

Пояснение: (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5),
(2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5).

Определение. Размещения n по n называются ***перестановками*** n элементов.

Обозначение. P_n — число перестановок.

Пример: $P_3 = 6$. Пояснение: бчк, бкч, чкб, чбк, кбч, кчб.

Для вычисления числа сочетаний, размещений и перестановок используют следующие основные комбинаторные формулы:

$$P_n = n!, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, $0! = 1$. Читается “эн факториал”.

Решим теперь задачу о шарах.

В задаче а) возможные исходы — это сочетания из 17 по 5 элементов. Благоприятные исходы — это такие сочетания, которые состоят из трех белых шаров и двух черных. К каждому из C_{10}^3 сочетаний трех белых можно добавить два черных C_7^2 способами. Поэтому число благоприятных исходов равно $C_{10}^3 \cdot C_7^2$. Выполним вычисления:

$$C_{17}^5 = \frac{17!}{5! \cdot 12!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13,$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 \cdot 8, \quad C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 3,$$

$$p = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}{17 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 2}{17 \cdot 13} = \frac{90}{221}.$$

В задаче б) важен порядок шаров, поэтому возможные исходы — это размещения из 17 по 5, а число благоприятных исходов равно $A_{10}^3 \cdot A_7^2$. Вычисления:

$$p = \frac{A_{10}^3 \cdot A_7^2}{A_{17}^5} = \frac{(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 6)}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9}{221}$$

Ответ: а) 90/221, б) 9/221.

В основе вывода формул для чисел размещений, сочетаний и перестановок лежит следующий принцип произведения:

Если необходимо составить набор из k элементов, причем первый элемент мы можем выбрать m_1 способами, второй элемент — m_2 способами, ..., k-й элемент — m_k способами, то это можно сделать $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ способами.

Пример. Сколькими способами можно разложить k шаров по n ящикам?

Решение: Для каждого из шаров следует выбрать номер ящика, в который его следует положить.

Таким образом, нужно составить набор из k номеров ящиков. Если разрешается класть несколько шаров в один ящик, то каждый элемент набора можно выбрать n способами и общее число способов равно $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k} = n^k$. Если разрешается в ящик класть не более одного шара, то ящик для первого шара можно выбрать n способами. Для второго — $(n-1)$ способами, так как один шар уже лежит в первом ящике. И так далее. Для k-го – $(n-k+1)$ способами. Общее число способов по принципу произведения равно

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ответ: n^k или $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Нетрудно видеть, что доказательство формулы для числа размещений содержится в рассмотренном примере. Формула для числа перестановок является ее следствием.

Докажем формулу для числа сочетаний. Для этого посчитаем число размещений n по k другим способом. Сначала возьмем неупорядоченный набор из k элементов. Это можно сделать C_n^k способами. Затем упорядочим его. Это можно сделать P_k способами. Общее число упорядоченных наборов A_n^k по принципу произведения равно $C_n^k \cdot P_k$.

Поэтому $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Что и требовалось доказать.

Упражнения

1) Выписать все размещения 6 элементов по 2 местам.

2) Выписать все перестановки четырёх элементов.

3) Выписать все сочетания из 6 элементов по 3.

4) Выписать все подмножества множества {1,2,3,4,5}, включая пустое. Сколько их всего? Сколько подмножеств содержат 0, 1, 2, 3, 4 и 5 элементов?

5) Группе из 10 студентов досталось три билета на престижную дискотеку. Сколькими способами их можно распределить?

6) Группа из 10 студентов должна выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

7) В танцевальном кружке 5 юношей и 5 девушек. Сколько имеется различных способов распределить их по парам?

8) Сколькими различными способами можно собрать гирлянду из пяти лампочек, если имеются лампочки трёх цветов и лампочки, расположенные рядом, должны иметь разные цвета?

9) В ящике находятся восемь белых и одиннадцать красных шаров. Случайным образом взяли шесть шаров. Какова вероятность, что среди них

   а) четыре белых и два красных;

   б) первые четыре белых, а последние два красных;

   в) не менее четырех белых?

10) В ящике находятся шесть белых, семь черных и восемь красных шаров. Случайным образом взяли девять шаров. Какова вероятность, что среди них два белых, три черных и четыре красных?

11) В ящике находятся шесть белых, семь черных и восемь красных шаров. Случайным образом взяли два шара. Какова вероятность, что они будут разного цвета?

12) Из колоды в 32 листа случайным образом берут две карты. Какова вероятность, что они будут одной масти?

13) Студент знает 12 вопросов из 15. В билете 4 вопроса. Какова вероятность, что он ответит по крайней мере на 3 из них?

14) Из 25 билетов лотереи 6 выигрышных. Какова вероятность, что из 7 случайным образом выбранных билетов выиграют 3?

15) По плану мелиорации земель некоторого района планируется осушить пять болот. На первом этапе мелиорации необходимо осушить три болота из пяти. Сколькими различными способами можно выбрать три болота для осушения на первом этапе?

Саблин Александр Иванович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры высшей математики
Московского Государственного Университета Леса.

Email: sablin@imail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2007 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2007 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents