ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год одиннадцатый

№2 (42)

апрель-июнь 2007 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (42), 2007 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2007 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.06.2007 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (42), апрель – июнь 2007 г.

Содержание

Е. Д. Куланин

Замечание к статье "О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника", "Математическое образование", №4(39), 2006 г.

Уже после выхода статьи "О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника" автор обнаружил, что в журнале *American Mathematical Monthly*, 54(1947), 38 была напечатана следующая задача известного французского геометра Виктора Тебо (Victor Thebault):

Задача E752. *Две окружности шести точек прямоугольного треугольника.*

Покажите, что в прямоугольном треугольнике двенадцать точек касания вписанной и вневписанных окружностей образуют две группы по шесть точек в каждой, лежащих на двух окружностях, пересекающихся ортогонально в точках пересечения описанной окружности с прямой, проходящей через середины катетов.

В примечании редакции к решению этой задачи, опубликованном в *American Mathematical Monthly*, 54(1947), 414, указывалось, что вероятно эти две окружности шести точек являются новыми в геометрии прямоугольного треугольника. Таким образом, в статье "О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольник" показано, что на самом деле эти окружности шести точек являются окружностями восьми точек прямоугольного треугольника, т.е. на них лежат также четыре точки Фейербаха. В то же время автору неизвестно, является ли этот результат новым в геометрии прямоугольного треугольника.

Окружности шести точек прямоугольного треугольника

Автор продолжает исследование взаимного расположения замечательных точек и прямых прямоугольного треугольника, начатое в статье "Прямоугольный треугольник", см. предыдущий выпуск журнала.

1. Точки касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон, образующие ортоцентрические четверки

Перейдем теперь к рассмотрению ортоцентров треугольников с вершинами в точках касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон.

Определение. *Назовем четверку точек ортоцентрической, если любая из них служит ортоцентром треугольника с вершинами в оставшихся трех точках.*

Теорема 1. *Следующие четверки точек касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон являются ортоцентрическими:*

$$A_I, A_b, B_b, B_I; \qquad B_I, B_a, A_a, A_I;$$
$$A_a, A_b, B_c, B_I; \qquad B_b, B_a, A_c, A_I;$$
$$A_b, A_c, B_c, B_b; \qquad B_a, B_c, A_c, A_a.$$

□ В треугольнике $A_IA_bB_b$ высоты B_bC и A_bA_H пересекаются в точке B_I (рис. 1), в треугольнике $A_aA_bB_c$ высоты B_cC и A_bK также пересекаются в точке B_I и, наконец, в треугольнике $A_bA_cB_c$ высоты B_cC и A_cH_a пересекаются в точке B_b (см. предложение 3 в [1]). Для оставшихся трех треугольников $B_IB_aA_c$, $B_bB_aA_a$, $B_bB_aA_c$, $B_aB_cA_c$ доказательство совершенно аналогично приведенному выше. □

Обозначим через X и Y точки пересечения прямой CH с прямыми A_IC_I и B_IC_I соответственно.

Предложение 1. *Точки X и Y лежат соответственно на прямых A_aC_c и B_bC_c и совпадают с ортоцентрами треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$.*

□ Рассмотрим треугольник $C_bC_IH_I$ (рис. 2). Поскольку $H_IH \perp C_bC_I$ и $C_IA_H \perp C_bH_I$, то ортоцентр треугольника $C_bC_IH_I$ совпадает с точкой пересечения прямых CH и B_IC_I, т. е. с Y. Тогда $C_bY \perp C_IH_I$, но $C_IH_I \perp A_IB_I$ (H_I — ортоцентр треугольника $A_IB_IC_I$), поэтому $C_bY||A_IB_I||A_cB_c$.

С другой стороны, так как $A_bA_H \perp C_bB_b$ и $C_cB_b \perp A_bC_b$ (по теореме 2 из [1] B_b — ортоцентр треугольника $A_bA_cB_c$), то ортоцентр P треугольника $A_bB_bC_b$ совпадает с точкой пересечения прямых A_bC_I и B_bC_c. Тогда $C_bP \perp A_bB_b$, но $A_bB_b \perp A_cB_c$, поскольку B_b — ортоцентр треугольника $A_bA_cB_c$. Отсюда следует, что $C_bP||A_cB_c$ и, таким образом, точка P лежит на прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c.

Итак, точка P совпадает с точкой пересечения прямой $A_bC_I = B_IC_I$ с прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c. Вспомнив, что точка Y также лежит на прямой B_IC_I и прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c, получим, что точки P и Y совпадают. Но точка P лежит на прямой B_bC_c как ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$, поэтому совпадающая с P точка Y лежит на B_bC_c.

Обозначим через X' точку пересечения прямых A_aC_c и CH и рассмотрим треугольник C_cYX'. Поскольку $C_cH \perp YX'$ и $YC_I \perp C_cX'$, то C_I — ортоцентр треугольника C_cYX', т. е. $X'C_I \perp C_c$Y, но XC_I также перпендикулярна C_cY, так как X лежит на A_IC_I, а $A_IC_I \perp B_IA_a$ и $B_IA_a||B_bC_c$.

Отсюда следует, что X' лежит на прямой A_IC_I, и, таким образом, точки X' и X совпадают. □

Следствие 1. *Ортоцентры двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы, лежат на прямой, содержащей высоту этого прямоугольного треугольника.*

Из предложений 1, 3 из [1] и следствия 1 сразу же вытекает

Теорема 2. *Ортоцентры четырех треугольников с вершинами в точках касания соответственно вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон лежат на прямой, содержащей высоту этого прямоугольного треугольника.*

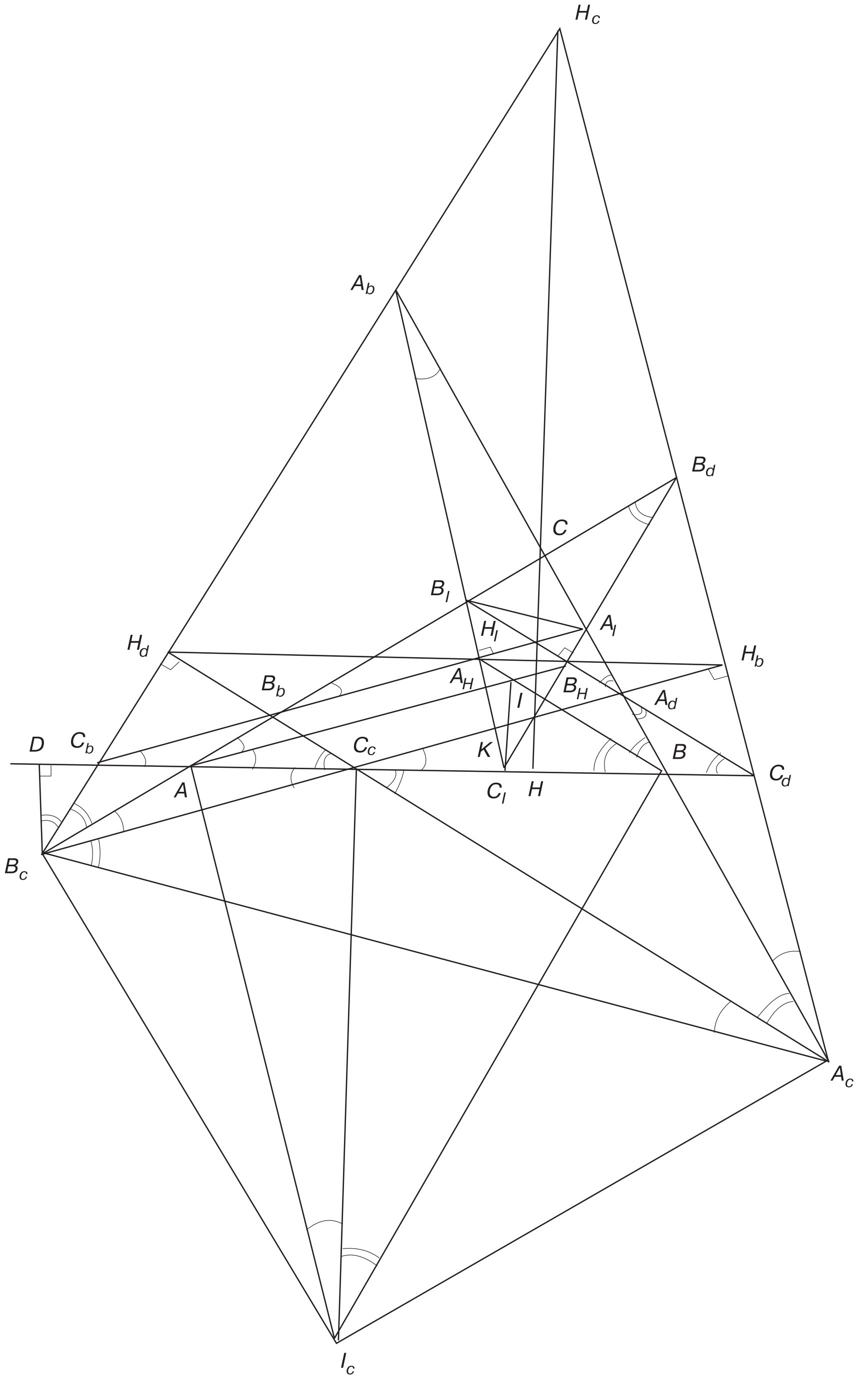


Рис. 1

В дальнейшем будем обозначать ортоцентры треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$ через H_a и H_b соответственно, а основания высот треугольника $A_cB_cH_c$, опущенных из вершин A_c и B_c — через A_1 и B_1.

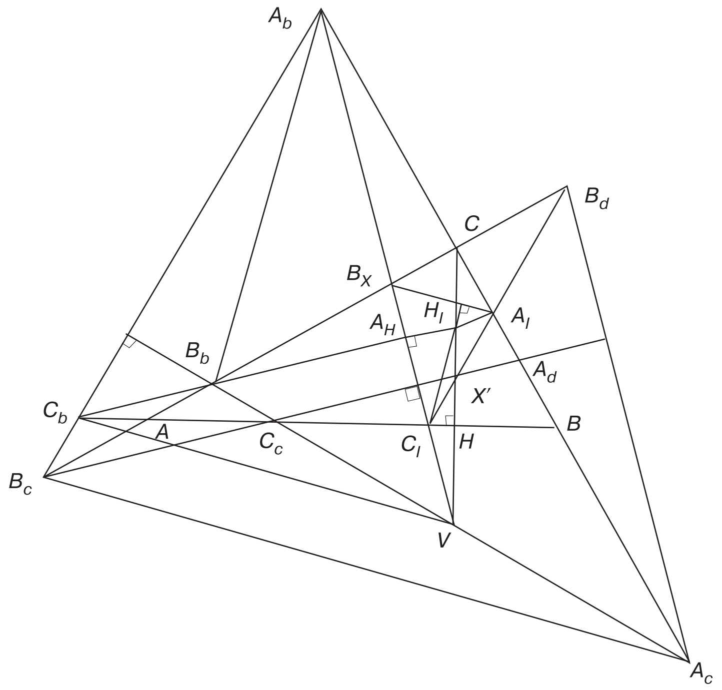


Рис. 2

2. Окружности Эйлера некоторых треугольников, связанных с прямоугольным треугольником, и средняя линия этого прямоугольного треугольника

Предложение 2. *Центры окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы лежат на прямой, содержащей среднюю линию этого треугольника, параллельную его гипотенузе.*

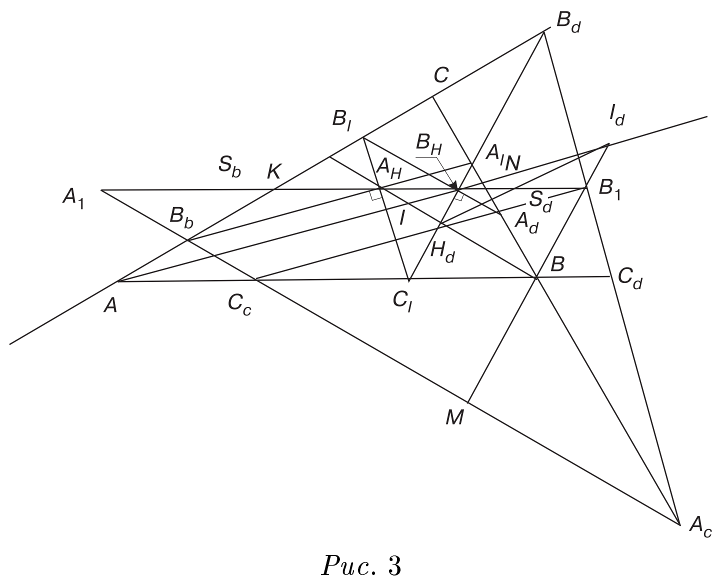


Рис. 3

□ Обозначим через B_1 основание высоты треугольника $A_aB_aC_a$, опущенной из вершины A_a (рис. 3). Поскольку $C_cA_a \perp B_aC_a$, а $\angle B_1A_cC_c = 45°$, то прямоугольный треугольник $A_cB_1C_c$ является равнобедренным и его вершина B_1 лежит на серединном перпендикуляре MB отрезка A_cC_c, совпадающем с биссектрисой внешнего угла при вершине B прямоугольного треугольника ABC. Отсюда вытекает, что центр вневписанной окружности I_a лежит на прямой BB_1.

С другой стороны, точка I_a лежит на биссектрисе AI угла BAC, которая проходит через основание B_H высоты B_IB_H треугольника $A_IB_IC_I$ (см. доказательство предложения 2 из [1]).

Ортоцентр H_a треугольника $A_aB_aC_a$ совпадает с точкой пересечения отрезков C_cB_1 и A_IC_I, поэтому $B_HI_a||H_aB_1$ как перпендикуляры к одной и той же прямой B_aC_a и $H_aA_I||B_1I_a$ как перпендикуляры к биссектрисе BI.

Так как I_a — центр описанной окружности треугольника $A_aB_aC_a$, а H_a — его ортоцентр, то центром окружности Эйлера треугольника $A_aB_aC_a$ является середина отрезка I_aH_a, которая совпадает с серединой отрезка B_HB_1. Но согласно предложениям 2 и 5 из [1] точки B_H и B_1 лежат на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC, параллельную его гипотенузе (напомним, что B_1 совпадает с основанием высоты треугольника $A_cB_cH_c$, опущенной из вершины B_c в силу того, что точки B_c, C_c, H_a, A_a лежат на одной прямой), поэтому и середина S_a отрезка B_HB_1 лежит на этой же прямой. Для треугольника $A_bB_bC_b$ доказательство аналогично. □

Из следствий 1 и 2 из [1] и предложения 2 вытекает

Теорема 3. *Центры окружностей Эйлера четырех треугольников с вершинами в точках касания соответственно вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон лежат на прямой, содержащей среднюю линию этого прямоугольного треугольника, параллельную его гипотенузе.*

Предложение 3. *Расстояние между центрами окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы равно полусумме катетов этого прямоугольного треугольника.*

□ Обозначим через K и N середины катетов AC и BC треугольника ABC (рис. 3). Так как $NB_1||BC_a$, то $\angle NB_1B = \angle B_1BC_a = \angle NBB_1$ и в треугольнике NB_1B имеем $NB_1 = NB = a/2$.

Учитывая то, что $\angle A_aB_HA_I = 90°$, а N — середина A_aA_I, получим, что

$$NB_H = 1/2A_aA_I = 1/2(BC - BA_a - CA_I) = 1/2(a - 2r) = a/2 - r.$$

Аналогично $KA_H = b/2 - r$, поэтому

$$NA_H = KN - KA_H = c/2-(b/2-r) = r+(c-b)/2 = p-c+(c-b)/2 = (a+b-c)/2+(c-b)/2 = a/2.$$

Точно так же выводится, что и $KB_H = b/2 = KA_1$. Отсюда следует, что

$$B_1A_H = B_1N + NA_H = a/2 + a/2 = a \quad \text{и} \quad A_1B_H = A_1K + KB_H = b/2 + b/2 = b.$$

Окончательно находим, что расстояние между центрами окружностей Эйлера треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$, совпадающими с серединами отрезков B_1B_H и A_1A_H (см. доказательство предложения 3), равно

$$\begin{aligned} S_aB_H + B_HA_H + A_HS_b = 1/2B_1B_H + 1/2A_1A_H + B_HA_H = \\ = 1/2(B_1A_H - A_HB_H) + 1/2(A_1B_H - A_HB_H) + A_HB_H = \\ = 1/2(B_1A_H + A_1B_H) = 1/2(a+b). \ \square \end{aligned}$$

Упражнение 1. *Докажите, что длина отрезка A_HB_H равна радиусу вписанной окружности треугольника ABC.*

Следствие 2. *Расстояние между центрами окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы равно сумме радиусов описанной и вписанной окружностей этого прямоугольного треугольника.*

□ Согласно предложению 3 данное расстояние равно

$$\begin{aligned} 1/2(AC + BC) = 1/2(AB_I + B_IC + CA_I + A_IB) = 1/2(AC_I + C_IB + 2r) = \\ = 1/2(AB + 2r) = 1/2(2R + 2r) = R + r. \ \square \end{aligned}$$

3. Окружности шести точек прямоугольного треугольника

Теорема 4. *Точка касания A_I вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC с его катетом BC, точка касания A_a его вневписанной окружности с катетом BC, внешняя и внутренняя точки Фейербаха F_a и F того же треугольника, ортоцентры H_I и H_a треугольников $A_IB_IC_I$ и $A_aB_aC_a$ лежат на одной окружности S_a.*

Точка касания B_I вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC с его катетом AC, точка касания B_b его вневписанной окружности с катетом AC, внешняя и внутренняя точки Фейербаха F_b и F, ортоцентры H_I и H_b треугольников $A_IB_IC_I$ и $A_bB_bC_b$ также лежат на одной окружности S_b.

□ Так как прямая B_IA_a параллельна биссектрисе угла ABC прямоугольного треугольника ABC (рис. 4), то $\angle H_IA_aA_I = \beta/2$. С другой стороны, учитывая то, что согласно предложению 1 из [1] ортоцентр H_I треугольника $A_IB_IC_I$ лежит на высоте CH, получим, что $\angle H_IH_aA_I = \angle C_IBI = \beta/2$ ($H_IH \perp C_IB$, $A_IH_a \perp BI$).

Таким образом, $\angle H_IH_aA_I = \angle H_IA_aA_I$, откуда следует, что точки A_I, H_I, H_a, A_a лежат на одной окружности S_a. Аналогично можно показать, что и точки B_I, H_I, H_b, B_b лежат на одной окружности S_b.

Обозначим теперь через P вторую точку пересечения окружностей S_a и S_b. Тогда $\angle B_IPH_I = \angle B_IB_bH_I = \alpha/2$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу B_IH_I окружности S_b, а $\angle H_IPA_I = \angle H_IA_aA_I = \beta/2$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу H_IA_I окружности S_a, поэтому

$$\begin{aligned}\angle B_IPA_I = \angle B_IPH_I + \angle H_IPA_I = \angle B_IB_bH_I + \angle H_IA_aA_I = \alpha/2 + \beta/2 = (\alpha+\beta)/2 = \\ = 90^\circ/2 = 45^\circ = \angle B_IC_IA_I,\end{aligned}$$

т. е. $\angle B_IPA_I = \angle B_IC_IA_I$. Последнее равенство означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника $A_IB_IC_I$, совпадающей с вписанной окружностью треугольника ABC.

Поскольку прямые B_bA_I и A_aB_I параллельны соответственно биссектрисам углов A и B треугольника ABC, то $\angle B_IH_IB_b = \angle A_IH_IA_a = 45^\circ$. Теперь мы можем найти угол B_bPA_a, учитывая то, что P — общая точка окружностей S_a, S_b и вписанной окружности треугольника ABC:

$$\begin{aligned}\angle B_bPA_a = \angle B_bPB_I + \angle B_IPA_I + \angle A_IPA_a = \\ = \angle B_bH_IB_I + \angle B_IC_IA_I + A_IH_IA_a = \\ = 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 135^\circ.\end{aligned}$$

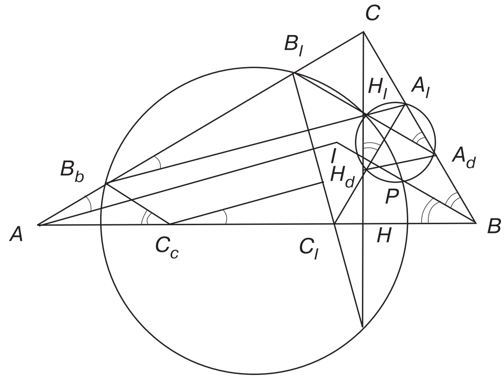


Рис. 4.

Таким образом, $\angle B_bPA_a = \angle B_bC_cA_a$, откуда следует, что точка P лежит на описанной окружности треугольника $B_bC_cA_a$. Но, как мы уже знаем (см. теорему 2 из [2]), описанная окружность треугольника $B_bC_cA_a$ является одной из окружностей восьми точек прямоугольного треугольника ABC.

Эта окружность восьми точек пересекает вписанную окружность треугольника ABC в двух точках: точке касания с гипотенузой C_I и внутренней точке Фейербаха F. Тогда точка P должна совпадать либо с точкой C_I, либо с точкой F.

Первая возможность исключается, поскольку окружность S_a пересекает прямую A_IC_I в двух точках A_I и H_a, отличных от C_I. Таким образом, точка P совпадает с внутренней точкой Фейербаха F треугольника ABC.

Мы получили, что окружность S_a проходит через точки A_I, F, A_a, а окружность S_b — через точки B_I, F, B_b. Но согласно утверждению в самом конце статьи [2] каждая из двух четверок точек A_I, F, A_a, F_a; B_I, F, B_b, F_b лежит на одной окружности (т. е. указанные точки лежат на двух окружностях), поэтому окружность S_a проходит также через точку F_a, а окружность S_b — через точку F_b. □

Будем называть окружности S_a и S_b окружностями шести точек прямоугольного треугольника ABC.

Упражнение 2. *Докажите, что описанная окружность прямоугольного треугольника с острыми углами 30° и 60° концентрична с одной из окружностей шести точек этого треугольника.*

Следствие 3. *Окружности шести точек S_a и S_b прямоугольного треугольника ABC касаются прямой A_IB_I, проходящей через точки касания A_I и B_I вписанной окружности с катетами BC и AC, в точках A_I и B_I соответственно.*

□ Обозначим центры окружностей S_a и S_b теми же буквами S_a и S_b. Тогда

$$\angle A_IS_aA_a = 2\angle A_IH_IA_a = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ,$$

т. е. $A_IS_aA_a$ — равнобедренный прямоугольный треугольник и $\angle\, S_aA_IA_a = 45^\circ$.

Теперь можно найти угол $B_IA_IS_a$:

$$\angle B_IA_IS_a\ = 180^\circ - \angle B_IA_IC - \angle S_aA_IA_a = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

но это и означает, что окружность S_a касается прямой A_IB_I в точке A_I. Аналогично, окружность S_b касается прямой A_IB_I в точке B_I. □

Следствие 4. *Прямая, проходящая через внутреннюю точку Фейербаха прямоугольного треугольника и ортоцентр треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности этого прямоугольного треугольника с его сторонами, делит пополам отрезок, концы которого совпадают с точками касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его катетами.*

□ Поскольку прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, является радикальной осью этих окружностей (см. [3]), то она проходит через середину отрезка, концы которого совпадают с точками касания с этими окружностями их общей внешней касательной.

Осталось заметить, что согласно теореме 1 окружности S_a и S_b пересекаются в точках H_I и F, а согласно следствию 1 общая внешняя касательная окружностей S_a и S_b касается их в точках A_I и B_I. □

Предложение 4. *Пусть A_H и B_H — основания высот треугольника $A_IB_IC_I$, опущенных из вершин A_I и B_I. Тогда центр описанной окружности треугольника A_HCB_H совпадает с серединой отрезка A_IB_I, а его ортоцентр — с ортоцентром H_I треугольника $A_IB_IC_I$.*

□ Так как $\angle A_IA_HB_I = \angle B_IB_HA_I = \angle A_ICB_I = 90^\circ$, то точки A_H, B_H, C лежат на окружности, построенной на A_IB_I как на диаметре. В доказательстве предложения 3 показано, что $A_HN = NB_1 = CN = NB = a/2$ (рис. 5), поэтому четырехугольник A_HCB_1B является прямоугольником и $CA_H \perp A_HB$, но $B_IB_H || A_H$B, откуда $B_HB_I \perp CA_H$. Аналогично $A_HA_I \perp CB_H$. □

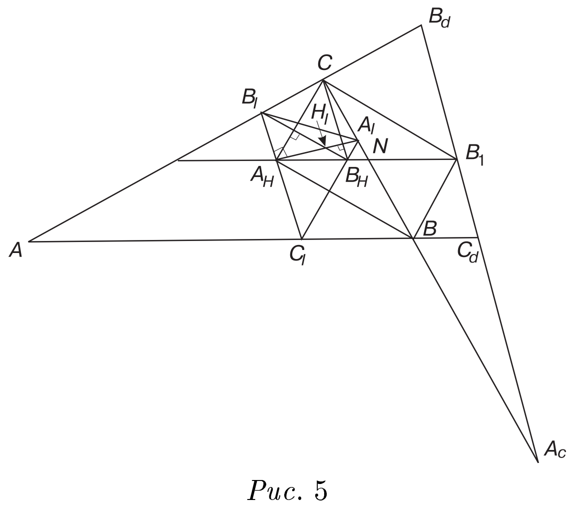


Рис. 5

Теорема 5. *Прямая Эйлера треугольника, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а две другие — с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой вершины на биссектрисы острых углов этого прямоугольного треугольника, проходит через внутреннюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника.*

□ Согласно следствию 4 середина отрезка A_IB_I, ортоцентр H_I треугольника $A_IB_IC_I$ и внутренняя точка Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC лежат на одной прямой, но согласно предложению 4 центр описанной окружности треугольника A_HCB_H совпадает с серединой отрезка A_IB_I, а ортоцентр — с ортоцентром H_I треугольника $A_IB_IC_I$.

Таким образом, прямая, проходящая через середину A_IB_I и точку H_I, является прямой Эйлера треугольника A_HCB_H. Осталось показать то, что точки A_H и B_H совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины C на биссектрисы AI и BI треугольника ABC.

Это следует из того, что $CA_H \perp BA_H$, $CB_H \perp AB_H$ (см. доказательство предложения 4) и того, что точки A_H и B_H лежат на биссектрисах BI и AI треугольника ABC (см. доказательство предложения 2 в [1]). □

Следствие 5. *Описанные окружности каждого из двух прямоугольных треугольников, вершины прямых углов которых совпадают с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а вершины острых углов — с точками касания вписанной и вневписанной окружностей данного прямоугольного треугольника с его катетами, проходят через внутреннюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника.*

□ Поскольку по теореме 4 внутренняя точка Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC лежит на окружности шести точек S_a этого прямоугольного треугольника, то $\angle A_IFA_a = \angle A_IH_IA_a = 45^\circ$ (рис. 6). Но точка F лежит также на вписанной окружности треугольника ABC, поэтому $\angle B_IFA_I = \angle B_IC_IA_I = 45^\circ$.

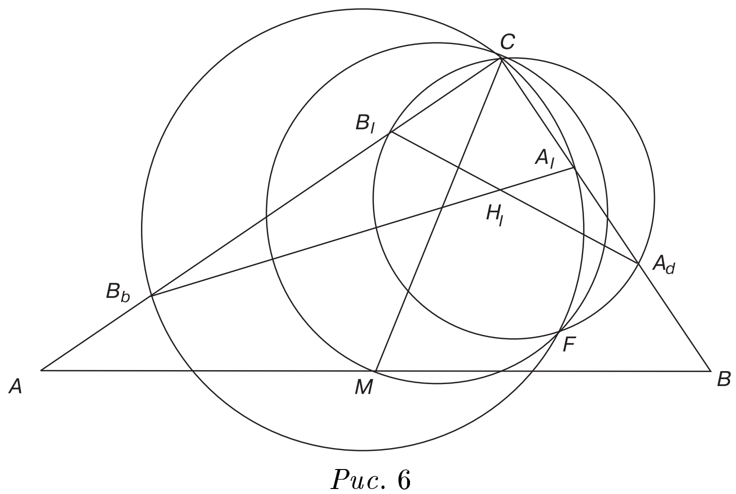


Рис. 6

Отсюда получаем, что

$$\angle B_IFA_a = \angle B_IFA_I + \angle A_IFA_a = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

и, таким образом, точка F лежит на описанной окружности прямоугольного треугольника A_aB_IC. Аналогично доказывается, что точка F лежит также на описанной окружности прямоугольного треугольника A_IB_bC. □

Теорема 6. *Точки касания A_b и A_c вневписанных окружностей I_b и I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжениями его катета BC, внешние точки Фейербаха F_b и F_c того же треугольника, ортоцентры H_a и H_c треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_cB_cC_c$ лежат на одной окружности S'_a.*

Точки касания B_a и B_c вневписанных окружностей I_a и I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжениями его катета AC, внешние точки Фейербаха F_a и F_c, ортоцентры H_b и H_c треугольников $A_bB_bC_b$ и $A_cB_cC_c$ также лежат на одной окружности S'_b.

Упражнение 3. *Докажите теорему 6.*

Следствие 6. *Вторая точка пересечения описанных окружностей прямоугольных треугольников A_bB_cC и A_cB_aC совпадает с внешней точкой Фейербаха F_c прямоугольного треугольника ABC (рис. 7).*

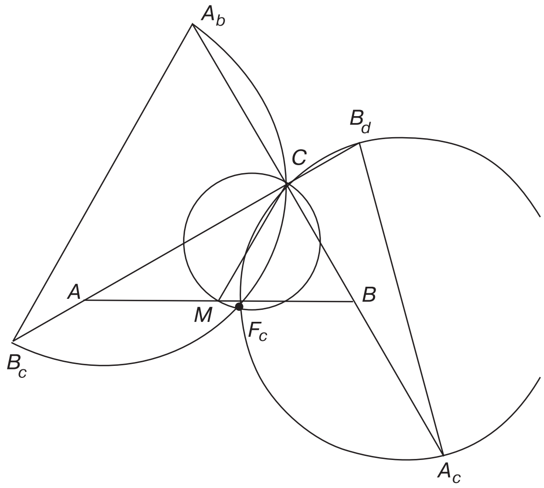


Рис. 7

Упражнение 4. *Докажите следствие 6.*

Следствие 7. *Вторые точки пересечения описанных окружностей прямоугольных треугольников A_aB_cC и A_IB_aC, A_cB_bC и A_bB_IC совпадают соответственно с внешними точками Фейербаха F_a и F_b прямоугольного треугольника ABC (рис. 8 и 9).*

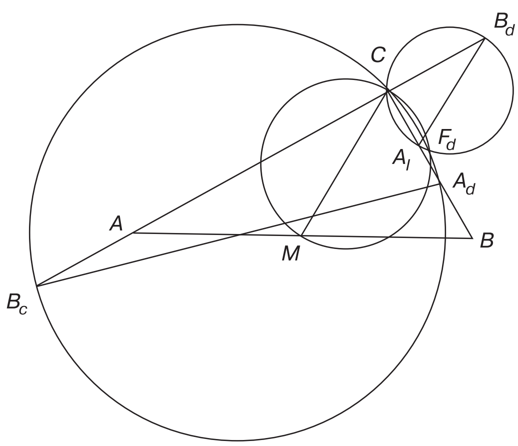


Рис. 8.

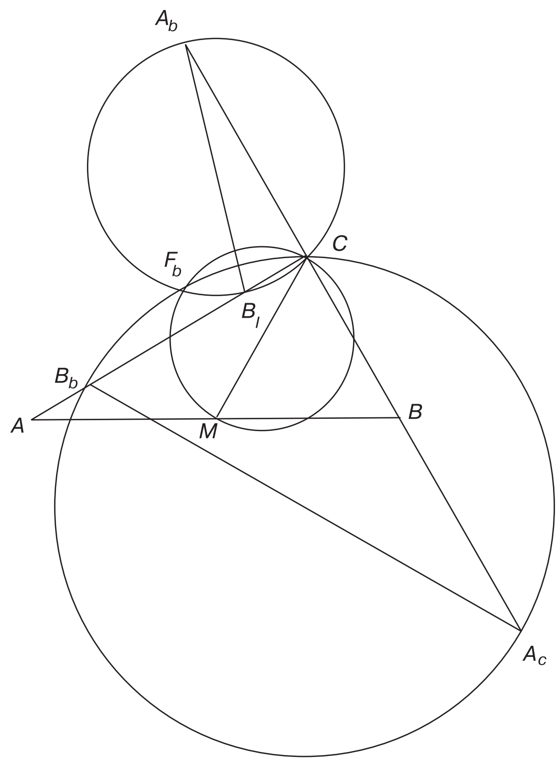


Рис. 9.

Упражнение 5. *Докажите следствие 7.*

Следствие 8. *Окружности шести точек S'_a и S'_b прямоугольного треугольника ABC касаются прямой A_cB_c в точках A_c и B_c соответственно.*

Упражнение 6. *Докажите следствие 8.*

Следствие 9. *Прямая H_cF_c делит пополам отрезок A_cB_c.*

Упражнение 7. *Докажите следствие 9.*

Теорема 7. *Прямая Эйлера треугольника, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а две другие — с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой вершины на биссектрисы углов, смежных с острыми углами этого прямоугольного треугольника, проходит через ту внешнюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника, которая лежит на вневписанной окружности, касающейся гипотенузы.*

Упражнение 8. *Докажите теорему 7.*

Литература

[1] *Е. Д. Куланин.* Прямоугольный треугольник. Журнал «Математическое образование», № 1(41), 2007.

[2] *Е. Д. Куланин.* О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника. Журнал «Математическое образование», № 4(39), 2006.

[3] *Л. С. Атанасян и др.* Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса. М., «Просвещение», 1996.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник.

E-mail: lucas03@mail.ru

Листки по математическому анализу, 10 класс

Н. Н. Константинов

Продолжаем публикацию листков для математических классов Н. Н. Константинова. В настоящем выпуске предлагаем вниманию читателей листки по математическому анализу. По этим листкам проводились занятия в 10-м классе школы №179 г. Москвы.

Листок 1, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 1 — ограниченность

Цель первых пяти листков — выяснить, какая часть курса математического анализа вам знакома. Те задачи, которые вы можете решить, решите и сдайте. Если сейчас не можете — в ваших интересах, чтобы преподаватели знали это, так как это позволит нам подготовить для вас подходящее задание.

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x \geq -1$, n — целое положительное число).

Задача 2. Найдите хотя бы одно такое $n > 1$, что $2^n > n^{100}$.

Задача 3. Найдите хотя бы одно такое k, что $1,0001^k > 1000000$.

Задача 4. Найдите хотя бы одно такое k, что $0,999^k < 0,000001$.

Задача 5. Существует ли такое n, что

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)} > 100?$$

Задача 6. Существует ли такое n, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} > 100?$$

Задача 7. Существует ли такое n, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} > 100?$$

Задача 8. Сформулируйте хотя бы одно определение ограниченного множества.

Задача 9. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что множество не ограничено.

Задача 10. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.

Задача 12. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что число C не является точной верхней гранью ограниченного множества.

Задача 13. Пусть M — множество сумм $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$ при всевозможных целых неотрицательных n. Найдите точную верхнюю грань этого множества (и докажите, что найденное число удовлетворяет определению точной верхней грани).

Задача 14. Аналогичная задача для множества сумм

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Листок 2, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 2 — множества

Задача 1. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача 2. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Задача 3. Множество всевозможных бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.

Задача 4. Множество действительных чисел интервала (0,1) несчетно.

Докажите эквивалентность:

Задача 5. Интервала и отрезка.

Задача 6. Интервала и квадрата.

Более слабая задача:

Задача 6′. Найдите в интервале подмножество, эквивалентное квадрату.

Определение. Мощность отрезка называется мощностью континуума (непрерывности).

Задача 7 (трудная). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

Задача 8. **Теорема Кантора-Бернштейна**. Если A эквивалентно подмножеству B, а B эквивалентно подмножеству A, то A и B эквивалентны.

В задачах 9-14 найдите мощность указанного множества; если множество определено не однозначно, то укажите все возможные ответы.

Задача 9. Множество рациональных точек плоскости (точка плоскости рациональная, если у нее обе координаты рациональные).

Задача 10. Некоторое множество непересекающихся шаров в пространстве.

Задача 11. Некоторое множество непересекающихся сфер в пространстве.

Задача 12. Множество бесконечных последовательностей действительных чисел (действительное число определено как бесконечная десятичная дробь с обычными договоренностями о том, какие дроби изображают одно и то же число).

Задача 13. Некоторое множество восьмерок на плоскости, такое что никакие две восьмерки не имеют общих точек (восьмеркой в этой задаче называется множество, которое есть объединение двух касающихся окружностей).

Задача 14. Пусть f — числовая функция, определенная при всех действительных x. Число x_0 называется точкой локального минимума функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что для любого x из U, отличного от x_0, верно неравенство: $f(x) > f(x_0)$. Какова мощность множества точек локального минимума?

Задача 15. **Теорема.** Множество всех подмножеств множества M более мощно, чем M (Множество A называется более мощным, чем множество B, если существует биекция B и подмножества A, но не существует биекции A и B).

Листок 3, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 3 — полнота и ее следствия

Задача 1. Сформулируйте определение действительного числа через бесконечные десятичные дроби, включая определение неравенства для действительных чисел.

Задача 2. Если M — непустое ограниченное сверху числовое множество, то существует $\operatorname{Sup} M$.

Задача 3. Найдите точную верхнюю грань следующего множества чисел: $0,3$, $0,33$, $0,333$, ... , $0,333...3$ (цифра 3 стоит n раз), ... Входит ли точная верхняя грань этого множества в само это множество?

Задача 4. Аналогичная задача для множества: 0, 0,1, 0,12, 0,123, ... (после запятой выписываются подряд все натуральные числа, так что дальше появятся дроби $0,12345678910111213$ и т.п.).

Задача 5. Докажите, что дробь из предыдущей задачи непериодическая.

Задача 6. Определите сумму двух положительных действительных чисел.

Задача 7. Определите произведение действительных чисел (с доказательством существования).

Задача 8. Докажите равенство $(A + B) + C = A + (B + C)$ (свойство ассоциативности сложения).

Задача 9. Докажите равенство $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (свойство дистрибутивности умножения по отношению к сложению).

Связь новых чисел со старыми. Бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся всеми нулями, отождествляется с конечной дробью, которая получается, если эти нули отбросить.

Задача 10. Пусть $A = a, a_1a_2a_3 \dots a_nb_1b_2b_3 \dots b_kb_1b_2b_3 \dots b_k \dots$ — бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом длины k. Рассмотрим те ее конечные приближения, которые не режут группы цифр, составляющих период. A есть Sup этих приближений. Выпишите бесконечную геометрическую прогрессию, суммой которой является число A, докажите, что A есть ее сумма (и тем самым выведите формулу перевода периодической дроби в простую).

Листок 4, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 4 — предел и предельная точка

Задача 1. Сформулируйте известные вам определения окрестности точки на прямой и на плоскости, в частности, определение ε-окрестности.

Задача 2. Сформулируйте различные определения последовательности, стремящейся к плюс бесконечности, к бесконечности без знака.

Задача 3. Сформулируйте известные вам определения предела числовой последовательности (в случае, если пределом является число).

Задача 4. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A и последовательность $\{y_n\}$ имеет предел B, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ также имеет предел, и он равен $A + B$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения последовательностей.

Задача 6. Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

Задача 7. Теорема. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Задача 8. Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Задача 9. Аналогичная задача для бесконечно малой последовательности, не принимающей значение 0.

Задача 10. Сформулируйте определения всех видов монотонных последовательностей (убывающей, неубывающей, возрастающей, невозрастающей, монотонной и, возможно, еще какие-нибудь).

Задача 11. Теорема. Неубывающая ограниченная последовательность имеет предел.

Задача 12. Если последовательность неубывающая и неограниченная, то ее пределом является плюс бесконечность.

Задача 13. Сформулируйте определение вложенной последовательности множеств.

Задача 14. Если $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $\dots$, $I_k = [a_k, b_k]$, $\dots$ — вложенная последовательность отрезков числовой оси, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 15. Сформулируйте определение предельной точки множества и предельной точки последовательности.

Задача 16. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все целые числа и только они?

Задача 17. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все числа вида $1/n$ (n — натуральное) и только они?

Задача 18. Если числовое множество бесконечно и ограничено, то для него найдется предельная точка.

Линия Б. Листок 1Б, 06.09.2001

Принцип математической индукции

Если какое-либо утверждение, в формулировке которого содержится обозначение натурального числа N (обозначим это утверждение через $T(N)$), верно при $N = 1$, и из $T(N)$ следует $T(N + 1)$, то это утверждение верно. (Иначе говоря, это утверждение верно при любом натуральном N). Вот схематическое изображение принципа математической индукции:

$$\frac{T(1), T(N) \to T(N+1)}{T(N)}$$

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

верное, если x — действительное число, n — целое, причем $x \geq -1$, $n > 0$.

Задача 2. С помощью математической индукции докажите формулу:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

(проверьте, что она верна для $n = 1$, и что из того, что она верна для n, следует, что она верна для $n+1$).

Задача 3. На шоколадке 4 продольных борозды и 5 поперечных. Сколько нужно прямолинейных разломов по бороздам, чтобы разломать шоколадку на кусочки без бороздок? (Сложить два куска и разломить их одним разломом не разрешается).

Задача 4. Докажите, что коэффициенты многочлена $(1+x)^n$ (если раскрыть скобки, привести подобные и расположить слагаемые в порядке убывания степени x) совпадают с элементами n-й строки треугольника Паскаля:

номер строки									
0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4	1		4		6		4		1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(по краям единицы, а каждый из остальных элементов равен сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 5. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

Не очень научная формулировка принципа математической индукции:

Если первой в очереди стоит женщина, и за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди женщины.

Задача 6. Какой может быть очередь, удовлетворяющая условию: “за каждой женщиной стоит женщина”? Дайте полное описание.

Листок 2Б, 01.10.2001

Пробная контрольная работа, линия Б

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы верно решены хотя бы две задачи.

Задача 1. Докажите, что в последовательности степеней двойки

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ ...$$

каждое четвертое число оканчивается на 8 (в десятеричной системе счисления).

Задача 2. Докажите с помощью математической индукции, что в последовательности

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ ...$$

(первые два числа - единицы, а дальше каждое число есть сумма двух чисел, которые стоят перед ним) каждое третье число четное, а все остальные числа - нечетные.

Задача 3. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Теорема. Все монеты имеют одинаковое достоинство.

Доказательство (методом математической индукции). Если монета одна, то утверждение очевидно. Пусть теорема верна для n монет, что означает, что в любой группе из n монет все монеты имеют одинаковое достоинство. Докажем, что и в каждой группе из $n+1$ монеты все монеты имеют одинаковое достоинство. Пусть дана группа из $n+1$ монеты. Заберем из этой группы одну монету, останется n монет. По предположению индукции, все эти n монет имеют одинаковое достоинство. Теперь заберем из этой группы еще одну монету, а ту монету, которую забрали в первый раз, положим обратно. Опять получилась группа из n монет. В ней, по предположению индукции, все монеты имеют одинаковое достоинство, тем самым первая монета имеет то же достоинство, что и все монеты, оставшиеся из первой группы, когда из нее забрали вторую монету. Итак, в группе из $n+1$ монеты все монеты имеют одинаковое достоинство.

Листок 6, 01.10.2001

Пробная контрольная работа, линия А.

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы из темы 1 *верно решены хотя бы две задачи,* а из *темы 2 хотя бы одна задача. Задача* 7 *дополнительная.*

Тема 1.

Задача 1. Найдите хотя бы одно такое число C, что при любом действительном x выполняется неравенство:

$$\frac{x}{x^2+1} < C.$$

Задача 2. Дано: последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. Последовательность $\{b_n\}$ определена формулой: $b_n = a_n^2 + a_n$. Можно ли утверждать, что последовательность $\{b_n\}$ ограничена сверху?

Задача 3. Последовательность $\{c_n\}$ определена формулой:

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} ... + \frac{n}{2^n}.$$

Докажите, что эта последовательность ограничена.

Задача 4. Найдите точную верхнюю грань последовательности $\{c_n\}$ из задачи 3.

Тема 2.

Задача 5. Докажите, что множество различных многочленов с целыми коэффициентами счетно.

Задача 6. Можно ли утверждать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно?

Задача 7 *(дополнительная).* A — счетное множество. Множество $\{M\}$ подмножеств A таково, что из любых двух элементов M один есть подмножество другого. Можно ли утверждать, что множество M конечно или счетно?

Листок 7, 01.11.2001

Пробная контрольная работа №2

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы из линии А верно решены хотя бы три задачи, а из линии Б хотя бы две задачи.

Линии А и Б.

Задача 1. Эквивалентны ли следующие два определения предела последовательности:

1) Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности U числа a найдется такое число N, что при всех $n > N$ $x_n \in U$.

2) Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой имеющей рациональные концы окрестности U числа a найдется такое число N, что при всех $n > N \quad x_n \in U$.

(Если эквивалентны, то доказать, а если не эквивалентны, то привести пример последовательности, для которой число a является пределом в смысле одного определения и не является пределом в смысле другого.)

Верны ли следующие теоремы:

Задача 2. *Обозначение*: для действительного числа x через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, которое не больше x (примеры: [4,3] = 4, [5] = 5, [-1,5] = -2).

Теорема: Если предел последовательности x_n равен a, то предел последовательности $[x_n]$ равен $[a]$.

Задача 3. *Обозначение:* для действительных чисел x и y через $\max(x, y)$ обозначается наибольшее из чисел x и y.

Теорема: Если предел последовательности x_n равен a и предел последовательности y_n равен b, то предел последовательности $\max(x_n, y_n)$ равен $\max(a, b)$.

Линия А.

Задача 4. Рассматривается последовательность квадратов на плоскости, сторона квадрата с номером n равна $3/2 + \frac{(-1)^n}{n}$. Найдите предел последовательности площадей квадратов (дайте ответ и запишите явно правило нахождения N по ε).

Линия Б.

Задача 5. Найдите предел последовательности $a_n = 3/2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (дайте ответ и запишите явно правило нахождения N по ε).

Листок 8, 19.11.2001

Предельное поведение последовательностей

В задачах 1-6 требуется выяснить, ограничена ли последовательность, ограничена ли она сверху, снизу, имеет ли пределом бесконечность со знаком или без знака, имеет ли пределом число, какие имеет предельные точки, и т.п. Во всех случаях требуется подтвердить, утверждение явным алгоритмом нахождения N по ε (в случае предела), n по C (в случае неограниченности) и т.п., используя соответствующее определение.

Задача 1. $a_n = n^3 - 3n + 1$.

Задача 2. $a_n = \dfrac{n^5}{n^5 - 1}$.

Задача 3. $a_n = \dfrac{10n^3 - 3n + 5}{n^5 - 20,5 \times n^2 + 2}$.

Задача 4. $a_n = n!$.

Задача 5. $a_n = \dfrac{n!}{n^5}$.

Задача 6. $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$.

Задача 7 (вспомогательная). Докажите, что при любых натуральных n и k верно неравенство: $\dfrac{1}{n!} > \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + ... + \dfrac{1}{(n+k)!}$.

Задача 8. Найдите три первых десятичных знака предела последовательности из задачи 6. (Это число называется числом Эйлера и имеет стандартное обозначение: e).

Задача 9. Докажите, что e — число иррациональное.

Задача 10. Докажите, что последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ возрастающая и ограниченная.

Задача 11. Докажите, что предел последовательности из предыдущей задачи не больше e.

Задача 12. Докажите, что он равен e.

Листок 9, 22.11.2001

Предельное поведение последовательностей, продолжение

Задача 1. Докажите, что ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится. (Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$,

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ имеет пределом некоторое число; это число называется суммой ряда.)

Задача 2. Может ли измениться сумма ряда из предыдущей задачи, если как-то переставить его члены? (В переставленном ряде все члены первоначального ряда должны встретиться по одному разу.)

Задача 3. Рассматривается последовательность: $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (x — произвольное фиксированное действительное число). Найдите убывающую геометрическую прогрессию b_n, такую что начиная с некоторого n выполняется неравенство: $a_n < b_n$.

Задача 4. А можно ли добиться того, чтобы условие предыдущей задачи выполнялось при всех n?

Задача 5. Докажите, что ряд $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ сходится при любых положительных действительных x.

Задача 6. Докажите, что этот ряд сходится и при любых отрицательных действительных x.

Задача 7 (дополнительная). Двое играют в такую игру. Они строят вложенную последовательность отрезков, причем они ходят по очереди, и каждый в свой ход выбирает отрезок внутри предыдущего. Первый выигрывает, если полученная вложенная система отрезков имеет ровно одну общую точку, и эта точка — рациональная. Второй выигрывает, если полученная вложенная система отрезков имеет ровно одну общую точку, и эта точка — иррациональная. Имеется ли у кого-либо них выигрышная стратегия?

Листок 10, 29.11.2001

Предел последовательности и предел функции.

Задача 1. Дано:

1. $\lim\limits_{n\Rightarrow\infty} x_n = a$; пусть $N_a(\varepsilon)$ — функция, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие такое число $N_a(\varepsilon)$, что из неравенства $n > N_a(\varepsilon)$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{n\Rightarrow\infty} y_n = b$; пусть $N_b(\varepsilon)$ — аналогичная функция для последовательности $\{y_n\}$.

Докажите, что $\lim\limits_{n\Rightarrow\infty}(x_n + y_n) = a + b$; найдите какую-нибудь функцию $M(\varepsilon)$ такую, что из неравенства $n > M(\varepsilon)$ следует неравенство

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon.$$

Задача 2. Аналогичная задача для произведения двух последовательностей.

Задача 3. $\lim\limits_{n\Rightarrow\infty} x_n = a$, $a \neq 0$, $N(\varepsilon)$ — функция, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие такое число $N(\varepsilon)$, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Докажите, что последовательность $y_n = 1/x_n$ (которая определена, начиная с некоторого n) имеет пределом число $1/a$; найдите какую-нибудь функцию $M(\varepsilon)$ такую, что из неравенства $n > M(\varepsilon)$, следует неравенство

$$|y_n - \frac{1}{a}| < \varepsilon.$$

Определение 1. Функция f определена на некотором множестве G числовой оси (можете для начала считать, что G — вся числовая ось). Говорят, что число A является пределом $f(x)$ при x стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (x берется из множества G). Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Определение 2. (В тех же условиях, что и в определении 1). Говорят, что число A является пределом $f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к a и не принимающей значение a, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел A.

Задача 4. Докажите эквивалентность этих двух определений.

Задача 5. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике гипотенуза постоянна, то длина катета стремится к длине гипотенузы при стремлении длины второго катета к нулю.

Задача 6. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один катет постоянен, то длина гипотенузы стремится к длине этого катета при стремлении длины второго катета к нулю.

Листок 11, 06.12.2001

Подготовительные задачи к контрольной работе

Задача 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} x^2$. Укажите какую-нибудь зависимость $\delta(\varepsilon)$ (исходя из 1-го определения предела функции, где требуется существование такой зависимости).

Задача 2. Тот же вопрос о $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$. (Область определения $\sqrt{x}$ — полупрямая $x \geq 0$.)

Задача 3. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$ неограниченна сверху (укажите какое-нибудь правило, как по числу C найти такое n, что $a_n > C$)

Задача 4. Тот же вопрос о последовательности $a_n = \dfrac{n!}{n^5}$.

Задача 5. Найдите предел последовательности $a_n = \dfrac{n^3 - 3n - 1}{n^5 + 2n^2 + 3}$ и укажите какое-нибудь правило, как по ε найти N (исходя из определения предела последовательности: для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что из неравенства $n > N$ следует неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, где A — искомый предел).

Задача 6. Тот же вопрос для последовательности $a_n = \dfrac{n^3 + 3n + 1}{n^5 - 2n^2 - 3}$.

Задача 7. Имеется два непустых множества A и B, все элементы которых — положительные числа. Известно, что любой элемент множества A меньше любого элемента множества B. Известно также, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара чисел $a \in A$ и $b \in B$ такая, что $b/a - 1 < \varepsilon$. Докажите, что для любого $\delta > 0$ найдется пара чисел $c \in A$ и $d \in B$ такая, что $d - c < \varepsilon$.

Листок 12, 10.12.2001

Контрольная работа по пределам

Для положительной оценки (тройки) по линии Б достаточно решить во время контрольной работы две задачи. Для четверки по линии Б достаточно решить три задачи, для пятерки — четыре. Для пятерки по линии А необходимо получить хотя бы четверку по линии Б и, кроме того, решить хотя бы дома дополнительную задачу 6.

Задача 1. $a_n = \dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{2\times 4} + \dfrac{1}{4\times 6} + \ldots \dfrac{1}{n\times(n+2)}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел и найдите его.

Задача 2. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{2n+1}$ стремится к плюс бесконечности. Явно укажите какое-нибудь правило, как по данному числу C найти такое число $N(C)$, что для любого n, большего $N(C)$ выполняется неравенство: $a_n > C$.

Задача 3. Дано: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$. Функция определяется через функцию f формулой: $g(x) = f\left(\frac{2x}{3}\right)$. Найдите $\lim\limits_{x\to 3a/2} g(x)$ (с доказательством, использующим определение предела через ε и δ).

Задача 4. Докажите, что площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны постоянны, стремится к нулю при стремлении к нулю длины основания.

Задача 5. Постройте график функции $f(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2} - x^2$, определенной на отрезке $-r \leq x \leq r$ (r — постоянное число, параметр, определяющий конкретную функцию из всего семейства таких функций), при $r = 1/4,\ 1/2,\ 1$.

Задача 6 (дополнительная). При каких r верны формулы для функции f из предыдущей задачи: а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$?

Листок 13, 14.01.2002

Непрерывность

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором множестве G числовой оси, и точка a принадлежит G (можете для начала считать, что G — вся числовая ось). Говорят, что функция f непрерывна в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (x берется из множества G).

Определение 2. Говорят, что функция f непрерывна на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Задача 1. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что функция f разрывна (то есть не является непрерывной) в точке a (принадлежащей области определения функции).

В задачах 2-5 сформулированы теоремы, в некоторых случаях верные. Докажите верные теоремы и опровергните неверные.

Задача 2. Если функция f непрерывна в точке a, то существует окрестность точки a, в которой f ограничена.

Задача 3. Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность точки a, в которой f отлична от 0 и имеет тот же знак, что и в точке a (теорема об инерции знака).

Задача 4. Определяем функцию s:

$$s(x) = 0, \ \text{если} \quad x \leq 0,$$

$$s(x) = 1, \ \text{если} \quad x > 0.$$

В точке 0 функция s разрывна, а в остальных точках непрерывна.

Задача 5. Если функция f (определенная на всей числовой прямой) разрывна во всех точках вида $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то она разрывна и в точке 0.

Функции-монстры. Эти функции не встречаются в практических задачах, но они помогают находить ошибки в доказательствах.

Задача 6. Приведите пример функции, разрывной во всех точках числовой оси (с доказательством).

Задача 7. Приведите пример функции (определенной на всей числовой оси), разрывной во всех точках, кроме одной, а в этой единственной точке непрерывной (с доказательством).

Задача 8. Приведите пример функции (определенной на всей числовой оси), разрывной в точках заданного счетного множества, а в остальных точках непрерывной.

Логические задачи.

Задача 9. Какие функции окажутся “непрерывными”, если в определении 1 забыть написать, что $\varepsilon > 0$?

Задача 10. А если забыть написать, что $\delta > 0$?

Листок 15, 31.01.2002

Теоремы о непрерывных функциях

В задачах 1-3 сформулированы теоремы, которые требуется доказать. При этом желательно использовать ранее сформулированные леммы об отрезке.

Задача 1. Если f — функция, непрерывная во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то существует точка с отрезка $[a, b]$ такая, что $f(c) = 0$.

Рекомендация 1: используйте лемму о том, что вложенная система отрезков имеет хотя бы одну общую точку.

Задача 1$'$. Та же теорема, но

Рекомендация 2: используйте лемму о том, что непустое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань.

Задача 1$''$. Та же теорема, но

Рекомендация 3: используйте лемму о том, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 2. Если функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, то она ограничена на этом отрезке.

Рекомендация 1 (см. выше).

Задача 2$'$. Та же теорема, но используйте *рекомендацию 2* (см. выше).

Задача 2$''$. Та же теорема, но используйте *рекомендацию* 3 (см. выше).

Задача 2$'''$. Та же теорема, но

Рекомендация 4: используйте лемму о том, что из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Задача 3. Если функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, то она достигает своего максимального значения (то есть существует точка $c \in [a, b]$ такая, что для всякой точки $x \in [a, b] \quad f(x) \leq f(c)$.

Рекомендация 1 (см. выше).

Задача 3$'$. Та же теорема, но используйте *рекомендацию* 4 (см. выше).

Задача 3$''$. Та же теорема, но

Рекомендация 5: используйте тот факт, что обратная величина к непрерывной функции f непрерывна во всех точках, где $f \neq 0$.

Задача 4. Верна ли теорема задачи 3, если заменить отрезок каким-либо другим множеством, например интервалом?

Листок 16, 04.02.2002

Подготовка к контрольной о непрерывности.

Задача 1. На отрезке [1;5] числовой прямой рассматривается функция $f(x) = 1/x$. Найдите такое положительное число δ (хотя бы одно), что для любых двух точек a и b этого отрезка, для которых $|a - b| < \delta$, выполняется условие: $|f(a) - f(b)| < 0,001$.

Задача 2. Заменим в предыдущей задаче отрезок [1;5] на интервал (0;5). Найдется ли в этом случае такое δ, о котором говорится в задаче 1?

Задача 3. Докажите, что функция sin во всех точках числовой оси непрерывна. (Можно пользоваться или геометрическим определением функции sin, или формулами, которые выведены из этого определения.)

Задача 4. Докажите, что если функция f непрерывна в точке a, то функция $|f|$ также непрерывна в этой точке.

Задача 5. Дано: функция f, определенная на отрезке $[a, b]$ числовой оси, непрерывна во всех точках этого отрезка. Функция g определена так: $g(x) = f(x)$,если $f(x) \leq C, g(x) = C$ если $f(x) > C$ (C — некоторая фиксированная константа). Докажите, что g непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. (Функцию g называют срезкой функции f).

Задача 6. Функция f разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что функция f^2 разрывна в точке x_0?

Задача 7. Найдите такое положительное δ, чтобы из неравенства $|x| < \delta$ следовало неравенство

$$\left| \frac{1 + x^2 \cos x}{1 - x \sin x} \right| < 10.$$

Задача 8. Докажите, что многочлен $x^3 + x - 1$ имеет корень.

Задача 9. Докажите, что если у монотонной функции предел справа в некоторой точке равен пределу слева, то функция в этой точке непрерывна.

Дополнительные задачи.

Задача 10. Приведите пример функции, определенной на всей числовой прямой, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных точках, и притом монотонной.

Задача 11. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции конечно или счетно.

Листок 17, 11.02.2002

Контрольная работа по непрерывности.

Линия Б включает задачи 1-6, линия А включает все задачи. Для тройки по линии Б необходимо решить в классе три задачи этой линии, для четверки — четыре задачи, для пятерки — пять. Для четверки по линии А необходимо заработать четверку по линии Б и решить еще хотя бы одну, из задач 7-9. Для пятерки по линии А необходимо заработать пятерку по линии Б и решить хотя бы две из задач 7-9. Тройки и двойки за линию А не ставятся. Решая задачи дома после контрольной, можно повышать оценку.

Задала 1. $f(x) = p(x) + q(x)$; p и q разрывны в точке x_0. Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0?

Задача 2.$f(x) = p(x) + q(x)$;p непрерывна в точке x_0, q разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0?

Задача 3. $f(x) = p(x) \times q(x)$; p непрерывна в точке x_0, q разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0?

Задача 4. $f(x) = p(x) \times q(x)$; p и q разрывны в точке x_0. Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0?

Определение 1$'$. Говорят, что функция f непрерывна в точке a (принадлежащей области определения f), если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдется такое рациональное число $\delta > 0$, что из неравенства $|x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ (x берется из множества определения f). (Это определение отличается от определения 1, см. листок 13, тем, что ε и δ берутся только рациональные).

Задача 5. Эквивалентно ли приведенное определение непрерывности определению 1 листка 13? (Эквивалентность требуется доказать в обе стороны, а неэквивалентность подтвердить противоречащим примером.)

Задача 6. Верно ли, что функция $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой прямой?

Задача 7. Если монотонная функция принимает все действительные значения, то она непрерывна в каждой точке.

Задача 8. Верно ли, что функция f задачи 6 равномерно непрерывна на всей числовой прямой, то есть верно ли, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(иначе говоря, в обычном определении непрерывности добавлено требование, чтобы δ, выбранное для заданного ε, действовало на всей области задания)?

Задача 9. Даны прямая l и выпуклый многоугольник M, лежащий по одну сторону от l. Проводятся всевозможные прямые k, лежащие по ту же сторону от l, что и M; расстояние от l до k обозначено через h и считается независимой переменной. Докажите, что площадь той части многоугольника U, которая лежит между k и l, есть непрерывная функция h.

Листок 18, 21.02.2002

Определение определенного интеграла.

Рассматриваются ограниченные функции, определенные на отрезке $[a, b]$ числовой оси.

Определение 1. Функция g называется ступенчатой, если отрезок $[a, b]$ разбит конечным числом точек $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ на интервалы, на каждом из которых g является константой; через g_i обозначим эту константу на интервале (a_{i-1}, a_i) (значения g в точках a_i нас не интересуют).

Определение 2. Интегралом от ступенчатой функции называется сумма

$$S = (a_1 - a_0) \times g_1 + (a_2 - a_1) \times g_2 + ... + (a_n - a_{n-1}) \times g_n.$$

Определение 3. Нижней ступенчатой функцией для функции f называется всякая ступенчатая функция, для которой на каждом из интервалов, на которых она является константой, выполняется неравенство: $g(x) \le f(x)$.

Аналогично определяется верхняя ступенчатая функция (вместо "$\le$" — "$\ge$").

Определение 4. Нижним интегралом функции fот a до b называется точная верхняя грань интегралов от всевозможных нижних ступенчатых функций для функции f.

Верхним интегралом функции f от a до b называется точная нижняя грань интегралов от всевозможных верхних ступенчатых функций для функции f. Нижний и верхний интегралы обозначаются соответственно через:

$$\int\limits_a^b \underset{H}{f(x)dx} \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \underset{B}{f(x)dx}$$

Задача 1. Докажите, что интеграл от всякой нижней ступенчатой функции не превышает интеграла от всякой верхней ступенчатой функции.

Задача 2. Докажите, что для ограниченной функции нижний и верхний интегралы всегда существуют, и нижний не превышает верхнего.

Определение 6. Функция называется интегрируемой, если ее нижний и верхний интегралы совпадают. Это совпадающее значение нижнего и верхнего интегралов функции называется интегралом этой функции.

Задача 3. Докажите, что функция $f(x) = x$ интегрируема на отрезке [0,1] и найдите ее интеграл.

Задача 4. Приведите пример функции, не интегрируемой на отрезке.

Задача 5 (дополнительная). Изменится ли значение нижнего интеграла, если при определении ступенчатых функций ограничиться разбиениями отрезка на равные промежутки?

Листок 19, 28.02.2002

Второе определение определенного интеграла

Определение 1. Пусть имеются:

1) ограниченная функция f, заданная на отрезке $[a, b]$ числовой оси;

2) разбиение R отрезка $[a, b]$ конечным числом точек $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$ на n интервалов;

3) выбор множества V, состоящего из n точек $\xi_1 \in (a, a_1)$, $\xi_2 \in (a_1, a_2)$, $\ldots$, $\xi_n \in (a_{n-1}, b)$.

Выражение $S = (a_1 - a)f(\xi_1) + ...(a_2 - a_1)f(\xi_2) + ... + (b - a_{n-1})f(\xi_n)$ называется интегральной суммой функции f при данном разбиении отрезка $[a, b]$ и данном выборе точек ξ_i (чтобы подчеркнуть зависимость S от трех вещей: функции, разбиения и выбора точек, мы будем обозначать интегральную сумму через $S(f, R, V)$).

Определение 2. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ числовой оси. Рассматриваются интегральные суммы $S(f, R, V)$ функции f при всевозможных разбиениях R отрезка $[a, b]$ и всевозможных выборах V точек ξ на интервалах этих разбиений.

Число A называется пределом интегральных сумм $S(f, R, V)$ при измельчении разбиений, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения R отрезка $[a, b]$, при котором длина каждого интервала разбиения меньше δ, и при любом выборе V точек ξ_i выполняется неравенство: $|A - S(f, R, V)| < \varepsilon$.

Определение 3. Функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$ (в смысле второго определения интеграла), если предел ее интегральных сумм при измельчении разбиений существует; этот предел называется интегралом (во 2-м смысле) функции f от a до b.

Задача 1. Покажите, что неограниченная функция не имеет интеграла (во 2-м смысле).

Задача 2. Докажите, что функция f, непрерывная в каждой точке отрезка $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Задача 3 (Критерий Коши для последовательностей). Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что из одновременного выполнения условий $n > N, m > N$ следует неравенство: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Задача 4 (Критерий Коши для функций). $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из одновременного выполнения условий $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$ следует неравенство: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите критерий Коши для интегральных сумм.

Листок 20, 04.03.2002

Следствия двух определений определенного интеграла.

Задача 1. Пусть точка с принадлежит интервалу (a, b); функция f определена так: $f(x) = K$, если $x \neq c$, и $f(c) = 10$. Докажите, что функция f интегрируема на (a, b) в смысле второго определения.

Задача 2. Если функция f интегрируема на интервале (a, b) в смысле второго определения интегрируемости, и мы изменили функцию в одной точке, то новая функция (обозначим ее через g) тоже интегрируема на (a, b) в том же смысле.

Задача 3. Докажите, что функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем в смысле второго определения.

Рекомендация: для доказательства можно воспользоваться задачей 2 предыдущего листка (теоремой о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке) или задачей 12 листка 5 (теоремой о том, что из покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие).

Задача 4. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле второго определения интегрируемости, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле первого определения интегрируемости, и интегралы этой функции, найденные по этим двум определениям, совпадают.

Задача 5. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле первого определения интегрируемости, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле второго определения интегрируемости.

Свойства определенного интеграла.

При доказательстве свойств определенного интеграла можно пользоваться любым из двух определений определенного интеграла, а *также фактом эквивалентности этих определений.*

Задача 6. Константу можно вынести за знак интеграла.

Задача 7. Если две функции интегрируемы, то и их сумма интегрируема, и интеграл от их суммы равен сумме их интегралов.

Задача 8. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на всяком отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

Задача 9. Пусть $a < b < c$, и функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$$

Задача 10 (Первая теорема о среднем). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое число ξ $(a < \xi < b)$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Листок 21, 18.04.2002

Первые свойства производной

Будем предполагать для простоты, что рассматриваемые функции определены на связном подмножестве числовой оси (отрезке, интервале, луче, полуинтервале или на всей числовой прямой).

Определение 1. Пусть точка a входит в область определения функции f, и некоторая окрестность точки a тоже входит в эту область. Производной функции f в точке a называется

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

производная обозначается через $f'(a)$.

Задача 1. Найдите производную функции $f(x)=x^2$ (задание "найти производную" предполагает и доказательство, что производная существует, а не только утверждение, что она равна такому-то выражению, если существует). Нарисуйте графики функций $y=f(x)$ и $y=f'(x)$ на одном чертеже.

Задача 2. Найдите производную функции $f(x)=x^n$ (n натуральное).

Верны ли теоремы, сформулированные в задачах 3-6?

Задача 3. Если функция f имеет производную в точке a, то она в этой точке непрерывна.

Задача 4. Если $f'(a)>0$ (такая запись молчаливо предполагает также утверждение, что $f'(a)$ существует), то найдется такая окрестность U точки a, что для всякой точки $x\in U$ из $x>a$ следует, что $f(x)>f(a)$, а из $x<a$ следует, что $f(x)<f(a)$.

Задача 5. Если $f'(a)>0$, то в некоторой окрестности точки a функция f возрастает.

Задача 6. Если в некоторой окрестности U точки a функция f непрерывна и возрастает, то в некоторой окрестности V точки $f(a)$ существует (однозначная) обратная функция g, то есть такая функция, что для всех $x\in U$ верно равенство $g(f(x))=x$.

Задача 7. Дайте определения: левого предела функции, правого предела функции, левой производной, правой производной.

Задача 8. Дайте определение функции, производная которой равна плюс бесконечности, и приведите пример такой функции.

Задача 9. Приведите пример функции, заданной всюду и не имеющей правой производной в некоторой точке (в том числе не имеющей также и бесконечной производной).

Задача 10. Докажите теорему: производные взаимно-обратных функций обратны как числа. (Теорему нужно аккуратно сформулировать: какие должны быть функции, в каких точках брать производные, могут ли эти производные быть любые или нужны ограничения?)

Листок 22, 29.04.2002

Зачетное задание по непрерывности и производной

Для получения зачета по темам "непрерывность" и "производная" необходимо письменно сдать следующие задачи о непрерывных функциях и производных (некоторые из них формулировались в прошлых листках; ранее принятые задачи можно не сдавать):

Непрерывность.

Задача 1. Докажите, что сумма двух функций, непрерывных в некоторой точке, непрерывна в этой точке.

Задача 2. Аналогичная задача о произведении двух функций.

Задача 3. Если функция f непрерывна в точке x_0, и $f(x_0)\neq 0$, то функция $g(x)=1/f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Задача 4. Докажите, что функции sin и cos всюду непрерывны.

Задача 5. Рассматривается функция $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены степени m и n соответственно. Докажите, что $\lim f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, равен 0, если $m<n$, бесконечности, если $m>n$, и отношению старших коэффициентов, если $m=n$.

Задача 6. Если в некоторой окрестности U точки a функция f непрерывна и возрастает, то в некоторой окрестности V точки $f(a)$ существует (однозначная) обратная функция g, то есть такая функция, что для всех $x \in U$ верно равенство $g(f(x)) = x$.

Производная.

Задача 7. Найдите производную функции $f(x) = x^n$ (задание "найти производную" предполагает и доказательство, что производная существует); x — любое действительное число, n — натуральное.

Задача 8. Если функция f имеет производную в точке a, то она в этой точке непрерывна.

Задача 9. Если $f'(a) > 0$, то найдется такая окрестность U точки a, что для всякой точки $x \in U$ из $x > a$ следует, что $f(x) > f(a)$, а из $x < a$ следует, что $f(x) < f(a)$.

Задача 10. Если f и g — взаимно-обратные функции, и $f'(x_0)$ существует и отлична от 0, то $g'(f(x_0))$ существует и равна $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Листок 23, 29.04.2002

Продолжение зачетного задания по непрерывности и производной

Задача 11. Если g непрерывна в точке x_0, и f непрерывна в точке $g(x_0)$, то функция, определяемая как $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Задача 12. Если g дифференцируема в точке x_0, и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то функция $H(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $H'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0)$.

Задача 13. Докажите, что $(Cf(x))' = Cf'(x)$ (константа выносится за знак производной).

Задача 14. Докажите, что если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f(x) + g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Задача 15. Докажите, что если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемы в точке x_0 то их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Задача 16. Докажите, что если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = 1/f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 дифференцируема в точке x_0 $\quad g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Задача 17. Докажите, что $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$.

Задача 18. Найдите формулы для производных tg и ctg.

Задача 19. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и ее значение в точке x_0 максимально по отношению к другим значениям в этой окрестности, $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = 0$.

Задача 20. Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а во внутренних точках дифференцируема, и $f(a) = f(b)$,то внутри отрезка найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Задача 21. Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а во внутренних точках дифференцируема, то внутри отрезка найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (теорема *Лагранжа)*.

Константинов Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный руководитель Экспериментальной
школы №179 г. Москвы,
преподаватель математического анализа.

Конические сечения — космические орбиты

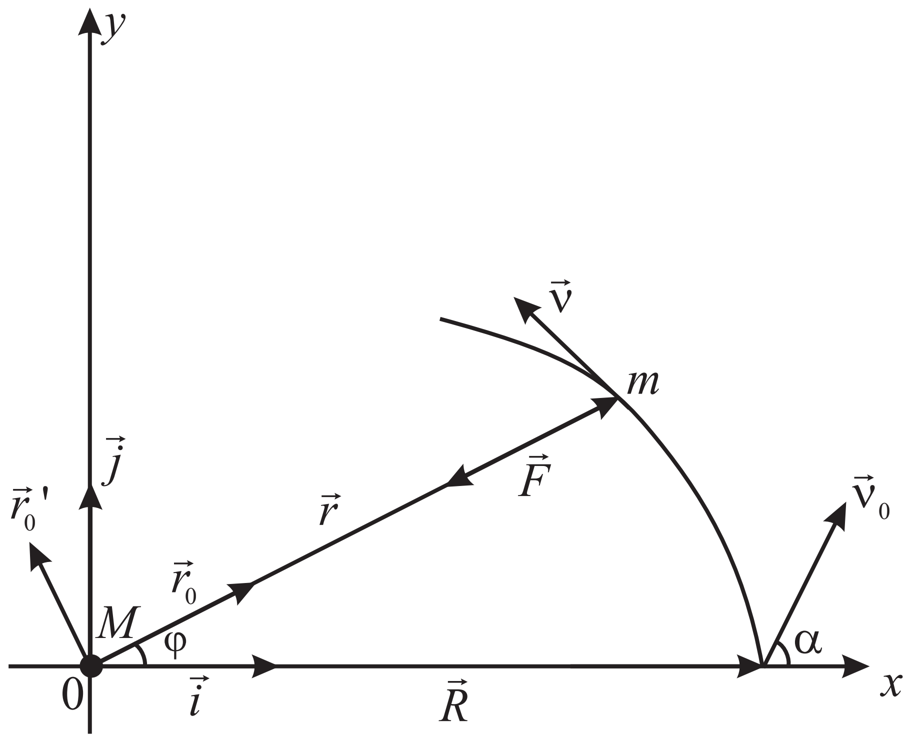
В. Б. Дроздов

В предназначенной школьникам лекции Н. Н. Константинова “Как люди догадались, что из законов механики следуют законы Кеплера” (см. Математическое образование, №40, 2007 г.) приведена реконструкция рассуждений Гука по выводу законов Кеплера без использования законов Ньютона. В настоящей статье рассказано, как из законов сохранения — следствий законов Ньютона — выводятся формы орбит движения планет, а также остальные законы Кеплера.

Немного есть в классической механике столь красивых, и физически и математически, вопросов, как определение траекторий движения тела в поле гравитационного центра. Еще Ньютон установил, что такие траектории исчерпываются коническими сечениями: эллипсом (в частности, окружностью), параболой и гиперболой. Этот вопрос, находившийся три века назад на переднем крае науки, давно уже перешел в вузовские учебники физики, астрономии, теоретической механики.

Ниже приведен вариант изложения, понятного школьнику, владеющему углубленным курсом физики и математики. Единственное, что выходит (по сути, формально) за пределы школьной программы — дифференцирование векторной функции. Но оно осуществляется по тем же правилам, как и обычной — скалярной. Правда, дифференцировать придется много. Для облегчения восприятия разобьем статью на озаглавленные части.

Итак, пусть планета или комета массой m в начальный момент времени $t = 0$ имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную под углом α к радиус-вектору $\vec{R}$, см. рисунок. Гравитационным полем планет пренебрегаем, ибо их суммарная масса в 750 раз меньше массы Солнца M, которое условно считаем неподвижным.



1. Законы сохранения

Естественно применять законы сохранения (энергии и момента импульса), что дает возможность упростить вычисления, в частности, обойтись дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} - G\dfrac{mM}{r} = E_0, & (1)\\ mvr \cdot \sin(\vec{v},^\wedge \vec{r}) = L_0, & (2) \end{cases}$$

где $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R}$ и $L_0 = mv_0 R\sin\alpha$ — соответственно начальные значения механической энергии и момента импульса небесного тела. Не умаляя общности, считаем, что $\alpha \neq 0$, ибо в противном случае уравнение (2) будет излишним. Ввиду постоянства вектора $\vec{L}_0$ движение будет происходить в плоскости, определяемой векторами $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$.

Уравнения (1) и (2) содержат три переменные величины: модуль скорости тела V, его расстояние от Солнца r и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

Преобразуем систему уравнений (1)-(2) так, чтобы неизвестных тоже было два. Из формулы скалярного произведения векторов имеем:

$$\cos\angle(\vec{v},\vec{r}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{v\cdot r}.$$

Но как развернуть выражение? Декартовой системой координат пользоваться крайне невыгодно: утрачивается величина r, входящая в закон всемирного тяготения и появляется иррациональность $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

2. От единичных векторов к полярной системе координат

Ничего не остается делать, как ввести единичный вектор $\vec{r}_0$ радиус-вектора $\vec{r}$ и “привязать” его к системе координат XOY:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы координатных осей OX и OY соответственно. Тогда

$$\vec{r} = r\left(\cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j}\right) \tag{3}$$

и

$$\vec{v} = (\vec{r})' = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} = \left(r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi\right)\vec{j}. \tag{4}$$

Из формулы (4) получим, что $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{(r')^2 + r^2(\varphi')^2}$, а из формул (3) и (4) — $\cos\angle(\vec{v},\vec{r}) = \frac{r'}{v}$.

Следовательно, $\sin\angle(\vec{v},\vec{r}) = \frac{r\varphi'}{v}$ и постоянный момент импульса тела равен $mr^2\varphi'$.

Теперь система уравнений (1) и (2) запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{m((r')^2 + r^2(\varphi')^2)}{2} - G\dfrac{mM}{r} = E_0, & (5)\\[2ex] mr^2\varphi' = L_0. & (6) \end{cases}$$

Естественно, как бы сама собой, появилась полярная система координат.

3. Введем безразмерную величину

Систему дифференциальных уравнений (5)-(6) удобнее решать, если провести чисто алгебраическое упрощение, а именно ввести величину q, определяемую равенством:

$$\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}} = q.$$

Чем это вызвано? Начальная энергия тела E_0 положительна при $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ и отрицательна при $v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. А по знаку величины E_0 можно сделать практически без вычислений важное заключение о траектории тела.

В самом деле, из равенства $E_0 = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}$ следует, что $G\frac{mM}{r} > -E_0$. Если $E_0 < 0$, то последнее неравенство выполняется при $0 < r < -\frac{GmM}{E_0}$, то есть траектория будет замкнутой. Если $E_0 \geq 0$, то оно верно при любом r, значит, кривая будет разомкнутой, и тело уйдет в бесконечность.

При "расшифровке" величин E_0 и L_0 система (5)-(6) упростится и масса тела m исчезнет:

$$\begin{cases} r^2(\varphi')^2 + (r')^2 = v_0^2, & (7) \\ r^2\varphi' = v_0 R \sin\alpha. & (8) \end{cases}$$

4. Форма траектории

Естественно выразить из уравнения (8) величину φ' и подставить ее в уравнение (7). В результате получим одно уравнение, не содержащее угла φ:

$$(r')^2 = v_0^2\left(1 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{R}{r} - 1\right) - \sin^2\alpha \cdot \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Поскольку уравнение траектории времени не содержит (а в последнем уравнении оно неявно присутствует: $r' = \frac{dr}{dt}$), то преобразуем с учетом формулы (8) величину r':

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{v_0 R \sin\alpha}{r^2}.$$

В итоге имеем:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}{R^2\sin^2\alpha} + \frac{1}{Rq^2\sin^2\alpha} r^3 - r^2. \tag{9}$$

Видим, что исчезла и начальная скорость тела v_0.

Равенство (9) можно интегрировать, но лучше заменой переменной $r = \frac{1}{Z}$ упростить вычисления. Действительно,

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{Z^2} \cdot \frac{dZ}{d\varphi}$$

и из формулы (9) вытекает:

$$\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}{R^2\sin^2\alpha} + \frac{1}{Rq^2\sin^2\alpha} Z - Z^2 \tag{10}$$

Итак, вместо многочлена четвертой степени в формуле (9) мы получили хорошо знакомый квадратный трехчлен в формуле (10). Выделим в нем квадрат двучлена:

$$\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1 + 4q^2(q^2-1)\sin^2\alpha}{R^2\sin^2\alpha} - \left(Z - \frac{1}{2Rq^2\sin^2\alpha}\right)^2. \tag{11}$$

Обозначив для краткости

$$2Rq^2\sin^2\alpha = P, \quad 1 + 4q^2(q^2-1)\sin^2\alpha = \varepsilon^2, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{P} = \lambda$$

и учтя, что $\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\varphi}$, находим из формулы (11):

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{P}{\varepsilon}\lambda\right)^2 = 1. \qquad (12)$$

Уравнение (12) легко интегрируется, так как переменные λ и φ сразу разделяются. Все его решения задаются формулами

$$\lambda = \pm\frac{\varepsilon}{P}\cos(\varphi+\varphi_0) \quad \text{либо} \quad \lambda = \pm\frac{\varepsilon}{P}\sin(\varphi+\varphi_0) = 1$$

где φ_0 — постоянная величина. Это очевидно, если сравнить уравнение (12) с основным тригонометрическим тождеством, записанным в виде:

$$(\cos'(\varphi+\varphi_0))^2 + \cos^2(\varphi+\varphi_0) = 1 \quad \text{или} \quad (\sin'(\varphi+\varphi_0))^2 + \sin^2(\varphi+\varphi_0) = 1.$$

Имеет смысл взять решение в наиболее простом виде, соответствующем рациональному расположению траектории в системе координат:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{P}\cos\varphi.$$

Тогда получим уравнение конического сечения с эксцентриситетом ε и фокальным параметром P:

$$r = \frac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (13)$$

Исследуем вид этого сечения в зависимости от эксцентриситета ε, который легко преобразовать к виду:

$$\varepsilon = \sqrt{4\sin^2\alpha\left(q^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha}.$$

Наименьшее значение $\varepsilon_{\min} = |\cos\alpha|$ достигается при $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть при $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Ясно, что при $\alpha = 90^\circ$ будет "наименьшее из наименьшего" значение $\varepsilon = 0$, чему соответствует окружность. Понятно и то, что при $\alpha \neq 90^\circ$ при любой начальной скорости движения по окружности не получится. Решив уравнение $\varepsilon = 1$, найдем, что это будет только при $q = 1$, а значит, при $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Тело движется по параболе.

Проверьте, что $\varepsilon > 1$ при $q < 1$ $\left(0 < v_0 < \sqrt{\frac{GM}{R}},\ \sqrt{\frac{GM}{R}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)$ и в этом случае траекторией будет эллипс. Аналогично установите, что $\varepsilon > 1$ при $q > 1$ $\left(v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)$. Тогда тело движется по гиперболе.

Крайне интересен тот факт, что вид траектории (эллипс, парабола, гипербола) совершенно не зависит от угла α, хотя эксцентриситет ε от величины α зависит.

5. Основная задача механики

Попробуем определить координаты тела в любой момент времени движения, то есть решить основную задачу механики. Для этого в уравнение (6) подставим формулу (13) и найдем:

Последний интеграл берется громоздко, поэтому воспользуемся таблицами интегралов:

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\varphi)} + \frac{2}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

Формула верна при $0 \le \varepsilon < 1$.

Ввиду того, что $\varphi = 0$ при $t = 0$, окончательно получим:

$$t = \frac{P^2}{(1-\varepsilon^2)v_0 R\sin\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right). \tag{14}$$

Основная задача механики оказалась решенной наоборот: время t выражено через угол φ. Ясно, что в общем случае выразить φ через t в элементарных функциях невозможно. Проверим формулу (14) в хорошо известном частном случае движения по окружности, когда

$$\varepsilon = 0, \quad \alpha = 90^\circ, \quad P = R.$$

Эта формула радикально упрощается:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R}}}{R}t, \quad \text{как и должно быть.}$$

Понятно, что выразить r через t в элементарных функциях тоже невозможно.

6. Ускорение и скорость тела

Проще определить ускорение, чем скорость. Из закона всемирного тяготения следует, что

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

С учетом формулы (13) находим:

$$a = G\frac{M}{P^2}(1+\varepsilon\cos\varphi)^2.$$

Вспомним формулу скорости тела, полученную в начале статьи:

$$v = \sqrt{(r')^2 + r^2(\varphi')^2}.$$

Формулы (6) и (13) дают возможность преобразовать величины r' и $r\varphi'$:

$$r' = \frac{v_0 R\varepsilon}{P}\sin\alpha\sin\varphi, \;\; r\varphi' = \frac{v_0 R\sin\alpha}{P}(1+\varepsilon\cos\varphi).$$

Тогда скорость небесного тела

$$v = \frac{v_0 R\sin\alpha}{P}\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}. \tag{15}$$

Проверьте, что для движения по окружности формула (15) дает $V = V_0$. В этом единственном случае модуль скорости тела постоянен.

7. Законы Кеплера

Исторически законы Кеплера предшествовали законам классической механики Ньютона. Установленные эмпирически на основании астрономических наблюдений, они открыли путь к закону всемирного тяготения. Однако, логически законы Кеплера вытекают из законов Ньютона, которые обладают неизмеримо большей общностью.

Первый закон. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого оно находится. Справедливость закона прямо следует из формулы (13).

Второй закон. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

За весьма малое время dt радиус-вектор планеты повернется на очень малый угол $d\varphi$, описав площадь $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Применив формулу (6), запишем эту величину так: $dS = \frac{1}{2}v_0 R\sin\alpha \cdot dt$. Тогда за время t_1 будет описана площадь

$$S_1 = \int\limits_{t_0}^{t_0+t_1} \frac{1}{2}v_0 R\sin\alpha \cdot dt = \frac{1}{2}v_0 R\sin\alpha \cdot t_1, \tag{16}$$

что и доказывает закон.

Третий закон. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Прежде всего выразим период обращения планеты T. Из формулы (16) очевидно, что $S_{\text{элл.}} = \frac{1}{2}v_0 R\sin\alpha \cdot T$, где $S_{\text{элл.}}$ — площадь эллипса, ограниченного орбитой планеты. Площадь эллипса, как известно, равна πab, где a и b — большая и малая полуоси эллипса соответственно. Из геометрии вспомним, что $a = \frac{P}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Следовательно,

$$\frac{2\pi P^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} v_0 R\sin\alpha \cdot T,$$

откуда после несложных преобразований получим:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G \cdot M}},$$

что равносильно формуле $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = const$, из которой следует третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Задачи на клетчатой бумаге (окончание)

В. В. Вавилов, А. В. Устинов

Завершаем публикацию учебного пособия преподавателей СУНЦ МГУ В. В. Вавилова и А. В. Устинова "Задачи на клетчатой бумаге". Начало пособия опубликовано в номере 4(39), 2006 г. Отметим, что близкие вопросы рассмотрены в книге тех же авторов "Многоугольники на решетках", Москва, Издательство МЦНМО, 2006.

Формула Пика

Примитивные треугольники

Будем говорить, что некоторый многоугольник *расположен на какой–либо решетке*, если все его вершины являются узлами этой решетки.

Примитивным называется треугольник, который на своей границе и внутри не содержит узлов решетки, отличных от вершин треугольника.

4.1. Докажите, что параллелограмм является фундаментальным тогда и только тогда, когда каждый из треугольников, на которые его делит диагональ — примитивный.

4.2. Докажите, что площадь любого треугольника на решетке не меньше $\Delta(\mathrm{Ł})/2$.

4.3. Докажите, что треугольник является примитивным тогда и только тогда, когда его площадь равна $\Delta(\mathrm{Ł})/2$.

4.4. Докажите, что треугольник ABC — примитивный тогда и только тогда, когда всевозможные треугольники, полученные из ABC параллельными переносами, переводящими узел A в различные узлы решетки, не накладываются друг на друга.

4.5. Докажите, что для любого достаточно большого числа M на решетке $\mathbb{Z}^2$ существует примитивный треугольник, все стороны которого больше этого числа M.

4.6. Докажите, что для любых узлов A и B решетки $\mathbb{Z}^2$, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC — примитивный. При этом узел C можно выбрать так, что угол ACB будем тупым или прямым.

Будет ли аналогичное утверждение справедливо на произвольной решетке Ł?

4.7. (Киев, [5]). На решетке $\mathbb{Z}^2$ расположен треугольник со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R. Докажите, что $abc \geq 2R$.

4.8. (Москва, [7]). На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то внутри или на сторонах его есть по крайней мере одна вершина клетки.

4.9. Пусть A и B — два узла решетки $\mathbb{Z}^2$, из которых второй на p клеток правее и на q выше первого, то есть расстояние между узлами равно $\sqrt{p^2+q^2}$. Вычислите расстояние от ближайшего к прямой AB узла решетки, не лежащего на этой прямой.

4.10. (Материалы жюри ВМО). Любую вершину треугольника разрешается симметрично отразить относительно другой и заменить ее полученной точкой. Можно ли такими операциями любой треугольник превратить в прямоугольный или остроугольный?

4.11. (Венгрия, [18]). Вершины треугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$ и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то он является центром тяжести (точкой пересечения медиан) этого треугольника.

4.12. (А. В. Устинов). На плоскости расположен треугольник так, что его вершины являются узлами целочисленной решетки, а других точек решётки (кроме вершин) на его сторонах нет. Докажите, что если внутри такого треугольника находится ровно два узла решётки, то они лежат на одной из медиан треугольника.

4.13. (А. В. Устинов). На плоскости расположен выпуклый четырехугольник так, что его вершины являются узлами целочисленной решетки, а других точек решётки (кроме вершин) на его сторонах нет. Докажите, что если внутри такого треугольника находится ровно один узел решётки, то он является серединой одной из диагоналей четырехугольника.

4.14. (Н. Б. Васильев, [4]). Докажите, что если решетку $\mathbb{Z}^2$ разбить на четыре непересекающихся подрешетки с клетками 2×2, то вершины любого примитивного треугольника решетки $\mathbb{Z}^2$ обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

4.15. (См. [12]). Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

4.16. **Игра “Чехарда”.** (Москва, см. [7]). В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, то есть прыгают друг через друга, причем если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину?

4.17. (Н. Б. Васильев, [4]). Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки решетки $\mathbb{Z}^2$, а затем начинают играть “в чехарду”: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы решетки). В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечники?

4.18. а) В плоскости заданы 5 точек с целыми координатами. Докажите, что имеются три из них, которые являются вершинами треугольника с целой площадью.

б) В пространстве заданы 19 точек с целыми координатами. Докажите, что среди них найдется четыре, которые являются вершинами тетраэдра с целым объемом.

Формула Пика и ее обобщения

Многоугольник называется *простым*, если его граница является замкнутой ломаной, которая не имеет точек самопересечения и к каждой его вершине примыкают ровно две стороны.

Для площади $[P]$ такого многоугольника, расположенного на решетке Ł имеет место формула

$$[P] = \left(N_i + \frac{N_e}{2} - 1\right) \cdot \Delta(\text{Ł}),$$

где N_i и N_e обозначают, соответственно, число узлов решетки, расположенных внутри и на границе многоугольника P, а $\Delta(\text{Ł})$ — площадь фундаментального параллелограмма решетки Ł. Эту формулу обнаружил в 1899 году Дж. А. Пик (см. [37]).

4.19. **Формула Пика I.** (См. [33]). Докажите, что

а) любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну внутреннюю диагональ;

б) любой простой многоугольник можно разрезать внутренними диагоналями на треугольники;

в) любой треугольник на решетке можно разбить на примитивные треугольники этой решетки и, тем самым, любой простой многоугольник на решетке можно разбить на примитивные треугольники;

г) число примитивных треугольников разбиения простого многоугольника на решётке не зависит от манеры разбиения и это число равно

$$2N_i + N_e - 2.$$

д) имеет место Формула Пика.

4.20. **Формула Пика II.** (См. [16]).

а) Установите сначала формулу для треугольника, две стороны которого направлены по линиям решетки.

б) Установите формулу для любого треугольника на решетке.

в) Каждому многоугольнику P с вершинами в узлах решетки $\mathbb{L}$ поставим в соответствие число $f(P) = N_i + N_e/2 - 1$. Пусть P разрезан на многоугольники P_1 и P_2 с вершинами в узлах решетки. Тогда нетрудно установить, что если формула Пика верна для двух из многоугольников P, P_1 и P_2, то она верна и для третьего многоугольника.

г) Докажите формулу Пика.

4.21. Докажите, что для любого простого многоугольника P с n простыми лакунами (которые сами являются простыми многоугольниками; при этом, граница этого многоугольника есть объединение границы исходного с границами лакун) на решетке $\mathbb{L}$, имеет место равенство

$$[P] = (N_i + N_e/2 - 1 + n)\Delta,$$

где $\Delta = \Delta(\mathbb{L})$ — площадь фундаментального праллелограмма, N_i — число узлов решетки, расположенных внутри P, но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e — число узлов решетки, которые принадлежат границе P и границам всех лакун.

4.22. (См. [36]). Пусть $f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c$, где a, b, c — некоторые числа. Предположим, что эта функция, заданная на всех простых многоугольниках и расположенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2 (такие функции называются *аддитивными*). Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

4.23. (Студенческая олимпиада, мехмат МГУ, см. [23]). В пространстве дан параллелепипед с вершинами в узлах целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$. Внутри параллелепипеда расположено a узлов, на внутренней части граней (исключая ребра) — b узлов, на ребрах (исключая вершины) — c узлов. Докажите, что объем параллелепипеда равен $a + b/2 + c/4 + 1$.

4.24. (Всесоюзная студенческая олимпиада, см. [23]). Все вершины выпуклого многогранника M являются узлами решетки $\mathbb{Z}^3$. Обозначим через $N(F)$ число узлов, лежащих в многограннике F или на его поверхности, а через $[M]$ — объем многогранника M. Обозначим через kM многогранник, радиус–векторы точек которого получаются умножением на число k радиус–векторов точек из M. Докажите, что

$$6[M] = N(3M) - 3N(2M) + 3N(M) - 1.$$

4.25. (См. [17]). а) Докажите, что для любого простого многоугольника P на решетке $\mathbb{Z}^2$ имеет место формула

$$2[P] = N(2P) - 2N(P) + 1,$$

где $N(F)$ — обозначает число узлов решетки, попавших внутрь и на границу фигуры F; nF — фигура, получающаяся из F растяжением в n раз относительно начала координат.

б) Для любого простого многоугольника P на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ функция $N(nP)$ является многочленом второй степени от n при целых $n \geq 0$.

в) Если $p(n) = N(nP) = an^2 + bn + c$, то для числа узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, попавших внутрь многоугольника nP имеет место равенство $N_i(nP) = p(-n)$.

г) Для числа узлов $N_e(P)$, попавших на границу простого многоугольника P на решетке $\mathbb{Z}^2$ справедливо равенство

$$N_e(P) = 4N(P) - N(2P) - 3.$$

д) (См. [3], [17]). Пусть P, Q — выпуклые простые многоугольники. Определим их сумму Минковского $mP + nQ$, где m, n — неотрицательные целые числа, следующим образом

$$mP + nQ = \{\mathbf{x} = m\mathbf{p} + n\mathbf{q} : \mathbf{p} \in P, \mathbf{q} \in Q\}.$$

Докажите, что функция $N(mP + nQ)$ является многочленом второй степени от m и n.

Приложения Формулы Пика

4.26. Существует ли на решетке $\mathbb{Z}^2$ квадрат со сторонами не параллельными координатным осям, со стороной, равной а) 2501, б) 103?

4.27. Квадрат со стороной $\sqrt{65}$ расположен на решетке $\mathbb{Z}^2$. Сколько узлов этой решетки он содержит внутри себя? Сколько узлов решетки может содержать квадрат со стороной 5, расположенный на решетке $\mathbb{Z}^2$?

4.28. Стороны параллелограмма площади 1 разделены на n и m равных частей и точки деления соединены, как показано на рис. 1. Докажите, что площади заштрихованных маленьких параллелограммов равны соответственно $1/(mn-1)$ и $1/(nm+1)$.

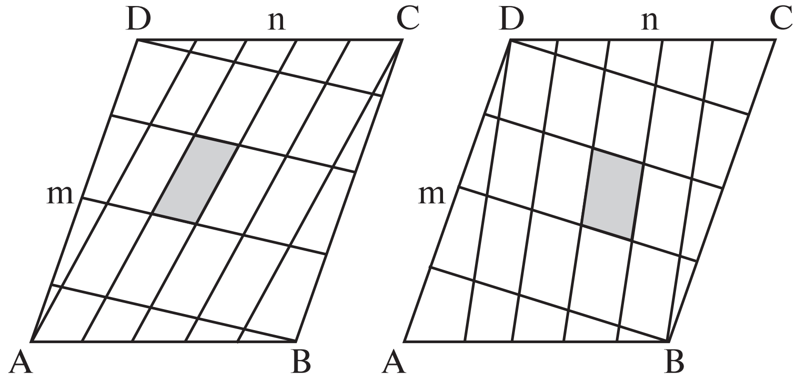


Рис. 1

4.29. Докажите, что площадь восьмиугольника, полученного в результате соединения вершин квадрата площади 1 с серединами его сторон, равна 1/6, см. рис. 2.

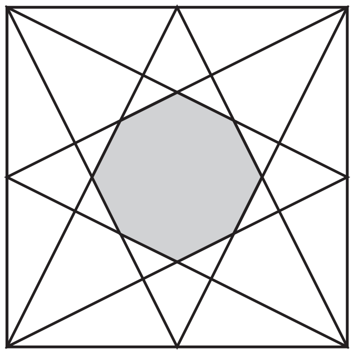


Рис. 2

4.30. Стороны треугольника ABC площади 1 разделены на три равные части и точки деления соединены с вершинами треугольника, как показано на рис. 3. Докажите, что площадь заштрихованного треугольника равна 1/7.

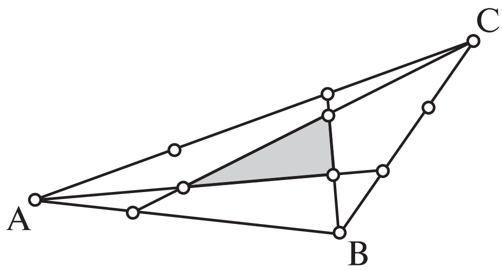


Рис. 3

4.31. (См. [4]). Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, ограничивает простой многоугольник.

а) Какую наибольшую длину может иметь такая ломаная?

б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

4.32. а) Пусть вершины выпуклого n–угольника находятся в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.

б) (Москва, [7]). В пространстве расположен выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целочисленных точках (то есть все три координаты каждой вершины — целые числа). Других целочисленных точек внутри, на гранях и на ребрах многогранника нет. Докажите, что число вершин многогранника не превосходит 8.

4.33. а) (Ленинград, [22]). Все вершины выпуклого пятиугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, а его стороны — целые числа. Докажите, что периметр такого пятиугольника является чётным числом.

б) Докажите аналогичное утверждение для любой замкнутой ломаной с целочисленными длинами звеньев.

4.34. (Россия, [28]). Докажите, что внутри любого выпуклого пятиугольника на решетке $\mathbb{Z}^2$ найдется хотя бы один узел этой решетки. Справедливо ли аналогичное утверждение для невыпуклого пятиугольника?

4.35. Внутри выпуклого многоугольника на решетке имеется ровно 1 узел. Какое наибольшее число вершин он может иметь?

4.36. Произвольный квадрат размером $n \times n$ на плоскости, очевидно, покрывает $(n+1)^2$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, если один из его углов находится в узле решетки, а его стороны параллельны линиям решетки. Докажите, что при любом расположении такого квадрата на плоскости он покрывает не более $(n+1)^2$ точек решетки $\mathbb{Z}^2$.

4.37. Пусть P — выпуклый многоугольник периметра p на решетке $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что

$$N_i(P) \leq [P] + \frac{p}{2} + 1.$$

4.38 (Москва, 1973). На бесконечной шахматной доске с клетками размером 1×1 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная, проходящая по сторонам клеток. Внутри ломаной оказалось k черных клеток. Какую наибольшую площадь может иметь фигура, ограниченная этой ломаной?

4.39. Пусть вершины треугольника ABC являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, а внутри него имеется ровно один узел этой решетки.

а) Какое наибольшее число узлов решетки может быть на границе треугольника ABC?

б) Докажите, что $[ABC] \leq 9/2$.

4.40. (См. [38]). Докажите, что для любого выпуклого многоугольника на решетке, имеющего N_e точек на границе и $N_i \geq 1$ точек внутри, имеет место неравенство $N_e \leq 2N_i + 7$. Опишите все многоугольники, для которых неравенство обращается в равенство.

4.41. (Международная олимпиада, см.[19]). Докажите, что для любого $n \geq 3$, на плоскости можно выбрать n точек так, чтобы:

а) расстояние между двумя любыми точками являлось иррациональным числом;

б) любые три точки образовывали невырожденный треугольник, площадь которого выражалась бы рациональным числом.

4.42. (Студенческая олимпиада, Москва, см. [23]). На целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ расположено p различных треугольников, которые примыкают к общей стороне AB, при этом AB не меньше всех других сторон. Докажите, что сумма площадей треугольников не меньше $p^2/8$.

5. Целые точки в областях

Функции $[x]$ **и** $\{x\}$

Пусть x — действительное число. Через $[x]$ обозначим *целую часть* числа x, то есть такое целое число, которое удовлетворяет неравенствам

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Дробной частью числа x называется величина $\{x\} = x - [x]$. Ясно, что для любого целого числа n имеют место равенства
$$[x+n] = [x] + n, \qquad \{x+n\} = \{x\}\,.$$

5.1. Пусть n — натуральное число, $x > 0$ — действительное. Тогда количество целых чисел a в пределах $0 \le a \le x$, которые делятся на n, равно $[x/n]$.

5.2. Пусть n — натуральное число. Докажите, что для целых x выполняются равенства
$$\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x-1}{n}\right] = \delta_n(x), \quad \left\{\frac{x}{n}\right\} + \left\{-\frac{x}{n}\right\} = 1 - \delta_n(x),$$
где δ_n — дельта-функция Коробова, см. обозначения в №4(39), а для произвольного действительного x
$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

5.3. (Эрмит; [20]). Пусть n — натуральное число. Тогда для всех действительных x выполняется равенство
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

5.4. (См. [24]). Пусть α — действительное число и $f_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\alpha k]$.

а) Найдите $f_\alpha(n)$ для $\alpha = a$, $\alpha = a/2$, $\alpha = a/3$, $\alpha = a/n$ для данных целых a и n. Найдите также $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_\alpha(n)}{n^2}$.

б) Докажите, что
$$f_\alpha(n) = f_{\{\alpha\}}(n) + \frac{1}{2}[\alpha]n(n+1),$$
$$f_\alpha(n) + f_{1/\alpha}([n\alpha]) - \left[\frac{n}{q}\right] = n[n\alpha].$$

5.5. **Закон взаимности для сумм с целыми частями.** Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что для любого действительного x выполняется равенство
$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{nk+x}{m}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{mk+x}{n}\right].$$

5.6. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что
$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

5.7. (Гаусс). Пусть p и q — взаимно простые нечетные числа, $p' = (p-1)/2$, $q' = (q-1)/2$. Путем подсчета целых точек в прямоугольнике $1 \le x \le p'$, $1 \le y \le q'$ проверьте, что
$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{p'q}{p}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{q'p}{q}\right] = p'q'.$$

5.8. (Турнир городов). Докажите, что
$$[n^{1/2}] + [n^{1/3}] + \ldots + [n^{1/n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n].$$

Основные теоретико–числовые функции

Функция $f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, называется *мультипликативной*, если она удовлетворяет двум условиям:

1) $f(1) = 1$; 2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ при $(m,n) = 1$.

Если $f(1) = 1$ и равенство $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ выполненяется для всех пар натуральных чисел m и n, то функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной.*

5.9. Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа m. Тогда

$$\sum_{d|n} f(d) = (1 + f(p_1) + \ldots + f(p_1^{\alpha_1})) \cdot \ldots \cdot (1 + f(p_s) + \ldots + f(p_s^{\alpha_s})),$$

где знак $\sum\limits_{d|n}$ означает, что суммирование идет по всем делителям числа n.

5.10. Докажите, что функции $f(n)$ и $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$ могут быть мультипликативными только одновременно.

5.11. Через $\tau(n)$ — обозначается количество положительных делителей натурального числа n. Докажите, что при $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1),$$

и получите из этого мультипликативность функции $\tau(n)$.

С геометрической точки зрения функцию $\tau(n)$ можно трактовать как число точек решетки $\mathbb{Z}^2$ с положительными координатами, лежащих на гиперболе $xy = n$.

Первые значения функции $\tau(n)$ выглядят следующим образом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

С геометрической точки зрения Функцию Эйлера $\varphi(n)$ можно трактовать как число точек решетки $\mathbb{Z}^2$ лежащих на отрезке $1 \le x \le n$, $y = n$ и видимых из начала координат (примитивных).

В частности,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

5.12. **Тождество Гаусса.** Докажите равенство

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

5.13. Пусть $x > 0$ — действительное число, p_1, p_2, …, p_n — различные простые числа. Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих x и не делящихся ни на одно из простых p_1, p_2, …, p_n, равно

$$[x] - \left[\frac{x}{p_1}\right] - \ldots - \left[\frac{x}{p_n}\right] + \left[\frac{x}{p_1 p_2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_{n-1} p_n}\right] - \ldots + (-1)^n \left[\frac{x}{p_1 \dots p_n}\right].$$

5.14. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Докажите равенство

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ определяется условиями: $\mu(1) = 1$; если n делится на квадрат, отличный от единицы, то $\mu(n) = 0$; если же $n = p_1 \dots p_k$, где p_1, …, p_k — различные простые числа, то $\mu(n) = (-1)^k$.

Первые значения функции $\mu(n)$ выглядят следующим образом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

5.15. Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа m. Тогда

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_s)).$$

5.16. Проверьте равенства:

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}; \qquad \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

5.17. *Дзета-функцией Римана* $\zeta(s)$ называется функция, которая при $s > 1$ задается как сумма абсолютно сходящегося ряда

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

Докажите, что

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \frac{\mu(1)}{1^s} + \frac{\mu(2)}{2^s} + \dots + \frac{\mu(n)}{n^s} + \dots$$

5.18. **Формулы обращения Мёбиуса.** а) Докажите равносильность равенств

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \text{и} \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

б) Докажите, что если для любого действительного $x \geq 1$

$$f(x) = \sum_{n \leq x} g\left(\frac{x}{n}\right),$$

то при $x \geq 1$

$$g(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Проверьте также справедливость обратного утверждения.

Целые точки в областях

5.19. а) Внутри любого круга радиуса 10 на плоскости находится более 250 узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) В круге радиуса 10 можно разместить 300 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше 1.

в) Докажите, что любой круг радиуса 11 содержит внутри себя не менее 334 узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

5.20. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $a \leq x \leq b$. Докажите, что число целых точек в криволинейной трапеции $a \leq x \leq b$, $0 < y \leq f(x)$ равно

$$\sum_{a \leq x \leq b} [f(x)] = \sum_{a \leq x \leq b} f(x) - \sum_{a \leq x \leq b} \{f(x)\},$$

где суммирование ведется по всем целым x из отрезка $[a, b]$.

5.21. (Гаусс, см. [9]). Пусть, как и раньше, $K(R)$ — число узлов решетки $\mathbb{Z}^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$. Докажите, что

$$\pi(R - \sqrt{2})^2 < K(R) < \pi(R + \sqrt{2})^2$$

и, тем самым,

$$K(R) = \pi R^2 + O(R), \qquad \lim_{R \to \infty} \frac{K(R)}{R^2} = \pi.$$

5.22. Пусть $R > 0$ и $K(R)$ — число узлов решетки $\mathbb{Z}^2$ в круге $x^2 + y^2 \le R^2$. Докажите, что

$$K(R) = 1 + 4[R] + 8 \sum_{0<x\le R/\sqrt{2}} [\sqrt{R^2 - x^2}] - 4 \left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

5.23. Для заданного натурального числа n через $r(n)$ обозначим число упорядоченных пар (x, y) целых чисел таких, что $n = x^2 + y^2$; например, $r(0) = 1$, $r(1) = 4$, $r(2) = 4$, $r(3) = 0$, $r(4) = 4$, $r(5) = 8$, $r(6) = 0$, $r(7) = 0$, $r(8) = 4$, ...

Докажите, что

а) $r(n) = 0$, если $n = 4k + 3$;

б) $r(n) = 4\,(k + 1)$, если $n = 5k$;

в) имеет место соотношение (теорема Гаусса; см. [9])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(0) + r(1) + \ldots + r(n-1)}{n} = \pi.$$

5.24. **Формула суммирования Эйлера.** Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $\rho(x) = \dfrac{1}{2} - \{x\}$. Докажите, что

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int_a^b f(x)\,dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)\,dx,$$

где суммирование ведется по целым x.

5.25. (Дирихле; см. [2]). **Целые точки под гиперболой.** Обозначим через $T(n)$ число точек с натуральными координатами, лежащих не выше гиперболы $xy = n$ $(n > 0)$.

Докажите, что

$$T(n) = 2 \sum_{1\le k\le\sqrt{n}} \left[\frac{n}{k}\right] - \left[\sqrt{n}\,\right]^2$$

и

$$T(n) = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}),$$

где γ — константа Эйлера, определяемая равенством

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{1\le k\le m} \frac{1}{k} - \ln m \right).$$

5.26. Пусть $R \ge 1$ и на плоскости Omn задана область $\Omega(R)$, содержащаяся внутри квадрата $0 < m, n \le R$. Предположим также, что $\Omega(R)$ имеет кусочно-гладкую границу, длина которой есть $O(R)$. Обозначим через $M(R)$ число целых точек в области $\Omega(R)$, а через $M^*(R)$ — число примитивных точек (то есть таких, что $(m, n) = 1$). Проверьте справедливость асимптотической формулы

$$M^*(R) = \frac{1}{\zeta(2)} M(R) + O(R\log R).$$

Докажите аналогичное утверждение для расширяющейся области в n-мерном пространстве.

5.27. С помощью предыдущей задачи и равенства $\zeta(2) = \pi^2/6$ докажите следующие утверждения.

а) Количество примитивных точек в треугольнике $0 \le x \le y \le R$ равно

$$\frac{3}{\pi^2} R^2 + O(R\ln R).$$

б) Для числа примитивных точек $K^*(R)$ внутри круга $x^2 + y^2 \le R^2$ справедлива асимптотическая формула

$$K^*(R) = \frac{6}{\pi} R^2 + O(R\ln R).$$

5.28. а) Для числа целых точек (x, y, z) в кубе $1 \leq x, y, z \leq R$, видимых из начала координат (то есть тех, для которых $(x, y, z) = 1$), выполняется асимптотическое равенство

$$N(P) = \frac{1}{\zeta(3)} R^3 + O(R^2).$$

б) Пусть $S(R)$ — число примитивных точек внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Докажите, что

$$S(R) = \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3 + O(R^2).$$

6. Гармонические функции

Определения и свойства

Пусть $\mathbb{Z}^n$ $(n \geq 2)$ — целочисленная решетка точек и e_1, e_2, $\ldots$, e_n — единичные базисные векторы. Для любой точки $z \in \mathbb{Z}$ назовем *соседними* с ней точки $z \pm e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; сумма и разность определяется как действия над векторами. Если B — подмножество $\mathbb{Z}^n$, то *границей* ∂B назовем множество точек $z \in \mathbb{Z}^n \setminus B$, которые имеют хотя бы одну соседнюю точку из B; под *замыканием* B будем понимать множество $\bar{B} = B \cup \partial B$.

Действительнозначную функцию $f(z)$, определенную на $\bar{B}$, назовем *дискретной гармонической функцией* в B, если для любой точки $z \in B$ значение функции $f(z)$ равно среднему арифметическому ее значений в соседних точках.

В частности, при $n = 2$ в координатной записи это означает, что для любой точки $(x, y) \in B$ имеет место равенство

$$4f(x, y) = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1).$$

6.1. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — гармонические функции. Докажите, что для любых a и b функция $af(x, y) + bg(x, y)$ также будет гармонической.

6.2. Пусть $f(x, y)$ — гармоническая функция на решетке $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что функции $\Delta_x f(x, y) = f(x + 1, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y f(x, y) = f(x, y + 1) - f(x, y)$ также будут гармоническими.

6.3. Докажите, что если $H(x, y)$ — положительная гармоническая функция, то

$$H(x \pm 1, y \pm 1) \leq 4H(x, y).$$

6.4. Найдите все гармонические многочлены степени не выше 2.

6.5. Пусть $p(x, y)$ — гармонический многочлен степени $n > 0$ (то есть по каждой переменной его степень не превосходит n, а по одной из них — равна n). Докажите, что

$$p(x, y) = \alpha \mathrm{Re}(x + iy)^n + \beta \mathrm{Im}(x + iy)^n + g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — многочлен степени не выше $n - 1$ и α, β — действительные числа, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

6.6. Пусть M — некоторое множество функций, заданных на решетке $\mathbb{Z}^2$ (или её подмножестве). Будем говорить, что последовательность функций $\{H_n\}$ *сходится* к функции H, если $H_n(x, y) \to H(x, y)$ в каждом узле решетки (подмножества).

Докажите, что предел последовательности гармонических функций является гармонической функцией.

6.7. Множество M, состоящее из гармонических функций на $\mathbb{Z}^2$ (области B) называется *замкнутым*, если из условия $H_n \to H$, $H_n \in M$ следует, что $H \in M$, и называется *компактным*, если оно замкнуто и из любой последовательности $\{H_n\}$, $H_n \in M$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Докажите, что замкнутое множество M гармонических функций на $\mathbb{Z}^2$ (области B) является компактным тогда и только тогда, когда найдется такая функция $C(x, y)$, что $H(x, y) \leq C(x, y)$ для всех $H \in M$ и $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ (B).

6.8. Обозначим через P оператор осреднения на решетке $\mathbb{Z}^2$:

$$Pf(x, y) = \frac{f(x - 1, y) + f(x + 1, y) + f(x, y - 1) + f(x, y + 1)}{4}.$$

Докажите, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x-h,y)+f(x+h,y)+f(x,y-h)+f(x,y+h)-4f(x,y)}{h^2},$$

то есть оператор Лапласа получается предельным переходом из оператора $P-E$ при неограниченном измельчении решетки, где E — единичный оператор.

Основные теоремы и принципы

6.9. (Москва). Докажите, что если гармоническая на решетке $\mathbb{Z}^2$ функция принимает только натуральные значения, то эта функция равна некоторой постоянной, то есть все её значения равны.

6.10. Докажите, что если неотрицательная гармоническая функция, определенная на решетке $\mathbb{Z}^2$, обращается в нуль в какой-нибудь точке, то она равна нулю всюду.

6.11. **Принцип максимума.** Докажите, что функция H, определенная на ограниченном множестве B и гармоническая внутри области B, принимает свое наибольшее и наименьшее значения на ∂B.

6.12. Разделим каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на n равных частей, а каждую из других противоположных сторон на m равных частей. Точки деления соединим так, чтобы получилась "косоугольная шахматная доска" состоящая из mn "полей"; пусть $H(x,y)$ обозначает площадь "поля", которое является пересечением "столбца" с номером x и "строки" с номером y. Покажите, что

а) $H(x,y)$ — гармоническая функция в каждой точке (x,y), для которой $1<x<n$ и $1<y<m$.

б) "Поля" с максимальной и минимальной площадями находятся в противоположных углах "доски".

в) $H(k,l)=1/nm$, если $n=2k+1$ и $m=2l+1$.

6.13. Пусть $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, …, $f_n(x,y)$ — гармонические функции на замыкании области B. Докажите, что функция

$$|f_1(x,y)|+|f_2(x,y)|+\ldots+|f_n(x,y)|$$

достигает максимума на границе B.

6.14. **Дискретный аналог теоремы Лиувилля.** Докажите, что если гармоническая функция ограничена, то она постоянна (см. [31]).

6.15. Докажите, что не может существовать функции $f(x,y)$, которая принимала бы значение 1 в точке $(0,0)$, во всех остальных целых точках была бы гармонической и стремилась к нулю на бесконечности.

6.16. Проверьте, что существует ровно одна функция $f(x,y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $f(0,0)=1$, $f(0,1)=-1$;

2) $f(x,y)$ — гармоническая функция во всех целых точках $(x,y)\neq(0,0),(0,1)$;

3) $f(x,y)$ стремится к нулю на бесконечности.

6.17. Обозначим через M множество всех положительных гармонических функций на $\mathbb{Z}^2$, равных 1 в начале координат.

а) Докажите, что M — выпуклое и компактное множество.

б) Докажите, что если $H\in M$, то для любых целых m и n функция $H(x+m,y+n)/H(m,n)$ также принадлежит M.

в) Докажите, что если G — крайняя точка (функция) множества M, то

$$G(x\pm1,y\pm1)=G(0,\pm1)^{\pm1}G(x,y).$$

Получить отсюда, что $G\equiv 1$.

Примечание. Если из $H_1\in M$, $H_2\in M$ следует, что $pH_1+qH_2\in M$ при любых $p>0$, $q>0$, $p+q=1$, то говорят, что множество M является *выпуклым*.

Компактное подмножество A множества M назовем *крайним*, если из $H \in A$, $H = pH_1 + qH_2$, H_1, $H_2 \in M$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ следует, что H_1, $H_2 \in A$. Крайнее множество, состоящее из одной точки, называется *крайней точкой.*

6.18. Докажите, что если гармоническая функция на $\mathbb{Z}^2$ ограничена снизу (сверху), то она постоянна.

6.19. **Теорема Гарнака.** Докажите, что любая последовательность $\{H_n\}$ гармонических в области B функций, монотонно возрастающих в некоторой точке области B ($H_{n+1}(x, y) \geq H_N(x, y)$, $(x, y) \in B$, $n \in \mathbb{N}$), сходится внутри B к гармонической функции или к $+\infty$.

6.20. **Сверхсходимость.** Пусть положительные и гармонические в области $B \subset \mathbb{Z}^2$ функции $f_n(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, таковы, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$$

сходится в некоторой точке из B. Докажите, что этот ряд сходится в каждой точке области B.

Задача Дирихле

6.21. **Альтернатива Фредгольма.** Пусть имеется система линейных уравнений $Ax = B$ с фиксированной матрицей коэффициентов $a_{j,k}$ $(1 \leq j, k \leq n)$ и столбцом B, составленным из чисел b_1, b_2, …, b_n. Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

1) для любых $b_1, \ldots, b_n$ система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);

2) для некоторых b_1, …, b_n система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

6.22. **Задача Дирихле в ограниченной области.** Пусть B — ограниченная область в $\mathbb{Z}^2$ и на ∂B задана некоторая функция $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \partial B$. Докажите, что существует единственная гармоническая в области B функция H, совпадающая с функцией φ во всех граничных точках.

6.23. **Принцип Дирихле для ограниченной области.** Пусть B — ограниченная область. Определим на множестве Ω всех функций $u(P)$, $P \in \overline{B}$, функционал (функционал Дирихле)

$$Du = \sum_{(P,Q)} (u(P) - u(Q))^2,$$

где суммирование ведется по множеству всех неупорядоченных пар соседних точек P, $Q \in \overline{B}$ таких, что хотя бы одна из них принадлежит B. Докажите, что для любой функции $u \in \Omega$ имеет место неравенство

$$Dh \leq Du,$$

где h — гармоническая в B функция и такая, что $h \equiv u$ на ∂B, причем равенство достигается только в том случае, если $u \equiv h$ на $\overline{B}$.

6.24. Пусть

$$u_p(x, y) = 1 - \frac{\ln(1 + |x| + |y|)}{\ln(1 + p)}, \qquad (x, y) \in B_p = \{(x, y) : 0 < |x| + |y| < p\}.$$

Докажите, что

$$Du_p < \frac{C}{\ln p}.$$

6.25. **Обобщенный принцип максимума.** Пусть гармоническая функция H определена на замыкании области

$$B = \{(x, y) : x > |y|\}$$

и гармонична в B. Докажите, что если

$$L = \inf_{Q \in \partial B} H(Q) \text{ и } M = \sup_{Q \in \partial B} H(Q),$$

то для любой точки $P \in B$

$$L \le H(P) \le M.$$

6.26. **Обобщенная теорема Лиувилля.** Докажите, что если функция H гармонична в области

$$B = \{(x, y) : x > |y|\}$$

и ограничена на ∂B, то $H = \mathrm{Const}$.

6.27. **Задача Дирихле и формула Пуассона для квадрата.** Пусть K обозначает квадрат

$$\{P = (x, y) : |x| \le s, |y| \le s\} \subset \mathbb{Z}^2, \quad s \in \mathbb{N},$$

из которого удалены вершины (s, s), $(-s, s)$, $(s, -s)$, $(-s, -s)$ и $f(P)$ — функция, гармоническая внутри K.

а) Докажите, что для каждой точки M границы K существует такая функция $H(P, M)$, которая является гармонической внутри K и такой, что

$$H(P, M) = \begin{cases} 1, & \text{если } P = M; \\ 0, & \text{если } P \ne M, P \in \partial K, \end{cases}$$

и, тем самым,

$$f(P) = \sum_{M \in \partial K} f(M) H(P, M).$$

б) Проверьте, что если $M = (k, -s)$, $-s < k < s$, то

$$H(P, M) = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{2s} \sin \frac{\pi r(x + s)}{2s} \cdot \sin \frac{\pi r(k + s)}{2s} \cdot \frac{\operatorname{sh} m_r (s - y)}{\operatorname{sh} 2 m_r s},$$

где m_r — положительный корень уравнения

$$\operatorname{ch} m_r + \cos \frac{r\pi}{2s} = 0.$$

Выпишите формулы для функций $H(P, M)$ для других точек границы K.

в) (См. [39]). Докажите, что если f гармонична внутри K и $|f(P)| < 1$ для всех точек $P \in \partial K$, то

$$|f(1, 0) - f(0, 0)| < \frac{50}{s}.$$

Получите отсюда доказательство теоремы Лиувилля (см. зад. 6.143).

6.28. **Задача Дирихле в полуплоскости.** Пусть

$$\Pi^+ = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y > 0\}$$

— верхняя полуплоскость и

$$H(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p^y(t) \cos xt \, dt, \qquad (x, y) \in \overline{\Pi^+},$$

где $p(t)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$z + \frac{1}{z} = 4 - 2\cos t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Докажите, что

а) H — гармоническая функция в Π^+;

б) $H(0, 0) = 1$, $H(x, 0) = 0$ при $x \ne 0$;

в) $0 < H(x, y) < 1$ при всех $(x, y) \in \Pi^+$;

г) $H(x, y) < C/y$ при всех $(x, y) \in \Pi^+$, $C > 0$ — константа не зависящая от y;

д) Для любого фиксированного $y > 0$ существуют две положительные постоянные $C_1(y)$ и $C_2(y)$ такие, что при всех x имеют место неравенства

$$\frac{C_1(y)}{1+x^2} \leq H(x,y) \leq \frac{C_2(y)}{1+x^2}.$$

6.29. В обозначениях предыдущей задачи положим $H_m(x,y) = H(x,y-m) - H(x,y+m)$, $m \geq 1$ — целое число. Докажите, что

а) $H_m(x,0) = 0$ при $x > 0$ и $H_m(0,m) = 1$; $H_m(0,y) = 0$ при $y > 0$, $y \neq m$.

б) H_m — гармоническая функция в первом квадранте $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

в) Для некоторой константы $C > 0$

$$H_m(1,1) \geq \frac{C}{m^3}.$$

6.30. **Формула Пуассона в полуплоскости.** Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}$ — неотрицательная функция. Докажите, что задача Дирихле в Π^+ с граничной функцией $\varphi(x)$ разрешима тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k^2+1}.$$

При этом все решения такой задачи Дирихле даются формулой

$$U(x,y) = \alpha y + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) H(x-k,y), \qquad (x,y) \in \overline{\Pi^+},$$

где $\alpha > 0$ — произвольное действительное число и H — гармоническая функция, заданная интегралом в зад. 6.283 а). Среди всех этих решений ограниченная и гармоническая в Π^+ функция отвечает единственному значению $\alpha = 0$; при остальных положительных значениях α соответствующая гармоническая функция ограничена снизу в Π^+.

Электрические цепи

6.31. **Правила Кирхгофа.** Для расчета схем постоянного тока используется следующий алгоритм. На каждом участке цепи ставится ток, идущий в произвольном направлении. Затем составляется система линейных уравнений с помощью двух правил Кирхгофа:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи, равна нулю;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС.

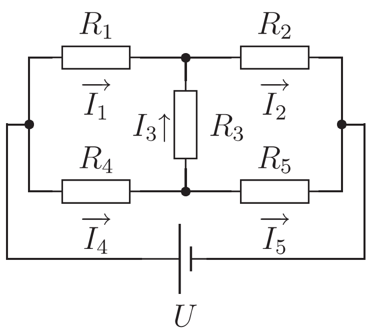


Рис. 4

Например, для схемы, изображенной выше, получается следующая система уравнений, из которой можно однозначно найти токи $I_1, \ldots, I_5$:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U, \\ R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0, \\ R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 = 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0. \end{cases}$$

Узлы электрической цепи будем обозначать $\langle 1\rangle$, …, $\langle n\rangle$. Для каждой пары соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ запись $\langle j,k\rangle$ будет обозначать соединяющий их проводник, $R_{j,k}$ — его сопротивление, $I_{j,k}$ — текущий из $\langle j\rangle$ в $\langle k\rangle$ ток ($I_{j,k}=-I_{k,j}$).

Докажите, что если токи удовлетворяют уравнениям, составленным по второму правилу Кирхгофа, то каждому узлу $\langle j\rangle$ электрической цепи можно поставить в соответствие некоторое число φ_j (потенциал) так, что для любых соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ будет выполняться равенство

$$I_{j,k}\cdot R_{j,k}=\varphi_j-\varphi_k$$

(падение напряжения равно разности потенциалов).

Выведите отсюда, что независимо от выбранной схемы, система линейных уравнений, составленная по правилам Кирхгофа не может иметь больше одного решения, и что она всегда разрешима.

6.32. **Тепловая мощность цепи.** Рассмотрим цепь, которая состоит из сопротивлений и одного источника напряжения. При прохождении тока $I_{j,k}$ по проводнику с сопротивлением $R_{j,k}$, соответствующего разности потенциалов $U_{j,k}=\varphi_j-\varphi_k$ на проводнике $\langle j,k\rangle$, выделяется тепловая мощность

$$q_{j,k}=R_{j,k}\cdot I_{j,k}^2=U_{j,k}\cdot I_{j,k}=\frac{(\varphi_j-\varphi_k)^2}{R_{j,k}}.$$

Рассмотрим величину

$$Q=\sum_{j,k}q_{j,k}$$

(суммарную мощность цепи) как функцию от потенциалов $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Будем считать, что потенциалы φ_1 и φ_n соответствуют концам источника напряжения и, таким образом, фиксированы.

а) Докажите, что для функции Q существует ровно один набор значений φ_2, …, φ_{n-1}, при котором она достигает своего минимального значения. Используя это, дайте второе доказательство того факта, что система уравнений, составленная по правилам Кирхгофа разрешима и имеет ровно одно решение. Проверьте также, что для токов, удовлетворяющих правилам Кирхгофа, потенциалы в узлах цепи распределены так, что тепловая мощность цепи минимальна.

б) Докажите, что минимальное значение величины Q равно $U\cdot I=R\cdot I^2$, где $U=\varphi_1-\varphi_n$, I — текущий через источник напряжения ток, и R — общее сопротивление цепи, определяемое равенством $R=U/I$.

в) Докажите, что если в цепи одно сопротивление увеличить, то общее сопротивление цепи не уменьшится.

6.33. Одинаковые резисторы сопротивлением 1 Ом каждый соединены между собой так, что они образуют правильный многогранник (куб, тетраэдр, додекаэдр, …). Каково эквивалентное сопротивление между двумя соседними вершинами такого многогранника?

6.34. Все ребра куба представляют собой резисторы сопротивлением 1 Ом. Каково эквивалентное сопротивление куба между двумя вершинами одной из его пространственных диагоналей? Исследуйте также одно-, двух-, и четырехмерные кубы. Найдите общую формулу для случая n-мерного куба.

6.35. Соседние точки плоской целочисленной решетки соединяются единичными сопротивлениями (соседними считаются узлы решетки, находящиеся на расстоянии 1 друг от друга).

а) Найдите сопротивление между узлами с координатами $(0,0)$ и $(0,1)$.

б) Источник тока подключается к узлам с координатами $(0,0)$ и $(1,0)$. Докажите, что для любого $n>0$ в узлах (n,n) и $(n+1,n)$ будут одинаковые потенциалы.

в) Источник тока подключается к узлам $(0,0)$ и $(2,1)$. Докажите, что в узлах $(1,1)$ и $(1,2)$ потенциалы равны.

6.36. а) Докажите, что при целом x и $p\geq 2$

$$\sum_{x=0}^{p-1}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi lx}{p}=\frac{p}{2}\delta_p(k-l),$$

где

$$\delta_p(x) = \begin{cases} 1, & x \equiv 0 \pmod p; \\ 0, & x \not\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

б) Пусть функция $f(x)$, заданная на множестве целых чисел, имеет период $p \geq 2$ и $f(0) = 0$. Проверьте, что для всех целых x выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p-1} C(k) \sin \frac{\pi k x}{p},$$

где

$$C(k) = \frac{2}{p} \sum_{y=1}^{p-1} f(y) \sin \frac{\pi k y}{p}.$$

6.37. Докажите, что решением уравнения

$$\Delta f(x, y) = \varphi(x, y)$$

в области $-p \leq x, y \leq p$ с нулевыми условиями на границе, где $\Delta = P - E$ и

$$\varphi(x, y) = \sum_{k,l=1}^{2p-1} C(k, l) \sin \frac{\pi k x}{2p} \sin \frac{\pi l y}{2p},$$

является функция

$$f(x, y) = -\sum_{k,l=1}^{2p-1} \frac{C(k, l)}{\lambda_k + \lambda_l} \sin \frac{\pi k x}{2p} \sin \frac{\pi l y}{2p}, \qquad \lambda_j = 4 \sin^2 \frac{\pi j}{4p}.$$

6.38. В условиях задачи 6.354 найдите сопротивление между узлами с координатами $(0, 0)$ и (m, n). Вычислите в явном виде сопротивление между узлами, соединенными ходом шахматного коня. (Указание: воспользуйтесь зад. 6.374.)

7. Геометрия чисел

Диофантовы приближения

7.1. **Первая теорема Кронекера.** (См. [35]). Докажите, что для любого действительного числа $\alpha \neq 0$ и любого положительного числа ε существуют целые числа p и q такие, что

$$|q\alpha - p| < \varepsilon.$$

Другими словами, прямая $y = \alpha x$ пересекает по крайней мере один открытый круг радиуса ε с центром в узле решетки $\mathbb{Z}^2$, если такие круги построены в каждом ее узле.

7.2. **Кантование правильного многоугольника.** (См. [11]). На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается "перекатывать" по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Тогда для любой точки M плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что его центр будет находиться от точки M на расстоянии меньше, чем ε. Докажите это утверждение также и для произвольного правильного n-угольника ($n \neq 3, 4, 6$).

7.3. **Вторая теорема Кронекера.** (См. [35]). Докажите, что для любого иррационального числа $\alpha \neq 0$ и любых действительных чисел β и $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много целых p и q таких, что

$$|q\alpha - p - \beta| < \varepsilon.$$

Геометрически это утверждение означает, что в любой открытой полосе на плоскости, шириной 2ε и иррациональным углом наклона (полоса имеет ось симметрии, задаваемую прямой $y = \alpha x - \beta$), содержится бесконечно много узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

Другая интерпретация этой теоремы Кронекера состоит в том, что множество точек $\{q\alpha - p; p, q \in \mathbb{Z}^2\}$ является *всюду плотным* в множестве действительных чисел, то есть любой интервал на числовой прямой содержит элемент указанного множества.

7.4. Докажите, что существует квадрат натурального числа, десятичная запись которого начинается с любых предварительно заданных цифр, первая из которых отлична от 0.

7.5. Докажите, что существует степень числа 2, которая в своей десятичной записи может начинается с любой предварительно заданной последовательности цифр, первая из которых отлична от 0.

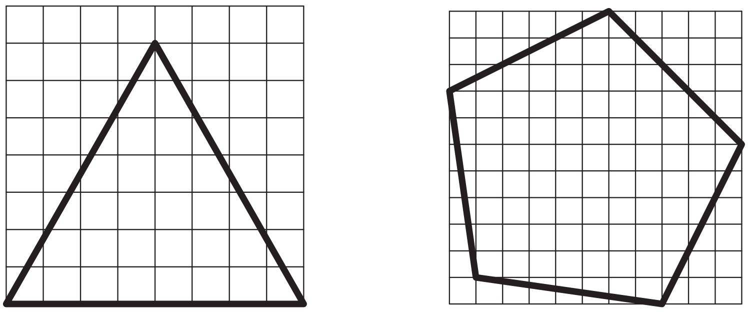
7.6. **Третья теорема Кронекера.** (См. [35]). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — действительные числа. Докажите, что для любого положительного ε найдутся такие целые числа p_i и q, $q > 0$, что

$$|q\alpha_i - p_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

7.7. (См. [6]). **Правильные многоугольники и решетка.** Докажите, что любой плоский многоугольник (в том числе, правильный) почти вписывается в любую решетку Ł; другими словами для любого плоского многоугольника P, любой решетки точек Ł и при любом $\varepsilon > 0$ существует многоугольник P' подобный многоугольнику P с натуральным коэффициентом подобия, вершины которого находятся на расстояниях меньших ε от узлов решетки Ł.

Убедитесь, что аналогичное утверждение имеет место для любого многогранника и любой пространственной решетки точек.

7.8. **“Почти правильные” многоугольники на решетке.** Опишите алгоритм (более быстрый, чем разумный перебор), который позволял бы для данного $\varepsilon > 0$ находить правильный треугольник (пятиугольник), с вершинами в ε-окрестностях точек целочисленной решетки.



$\varepsilon = 1/40.$ $\qquad$ $\varepsilon = 1/6.$

Рис. 5

На рисунках правильный треугольник и правильный пятиугольник находятся внутри жирных контуров.

“Почти правильные” многоугольники с вершинами в узлах целочисленной решетки будут обладать различными любопытными свойствами. Например, пятиугольник, изображенный на рисунке, имеет три равные стороны и четыре равных угла.

7.9. **Оптимальные правильные треугольники на решетке.** Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Среди всех правильных треугольников с вершинами в ε-окрестностях различных целых точек можно выбрать треугольник наименьшего размера. Будем называть такие треугольники оптимальными. Докажите, что все оптимальные треугольники распадаются на две серии. Первая серия (с точностью до параллельного переноса, поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий относительно горизонтальных и вертикальных прямых) состоит из треугольников с вершинами вблизи точек $(0, 0)$, (x_n, y_n), $(0, 2y_n)$, где

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\} = \{(2, 1), (7, 4), (26, 15), (97, 56), \ldots\}$$

— решения уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$. Вторая серия (с точностью до тех же движений) — треугольники с вершинами вблизи точек $(0, 0)$, (u_n, v_n), (v_n, u_n), где

$$\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots\} = \{(1, 0), (4, 1), (15, 4), (56, 15), \ldots\}$$

— решения уравнения $u^2 - 4uv + v^2 = 1$, причем $u_n = y_n$, $v_n = y_{n-1}$.

7.10. Пусть ε_k — расстояние от вершин k-го оптимального треугольника до узлов целочисленной решетки. Докажите, что

$$\varepsilon_k = \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^{k/2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\Big)^k = \frac{1}{3}(2\sin 15^\circ)^k.$$

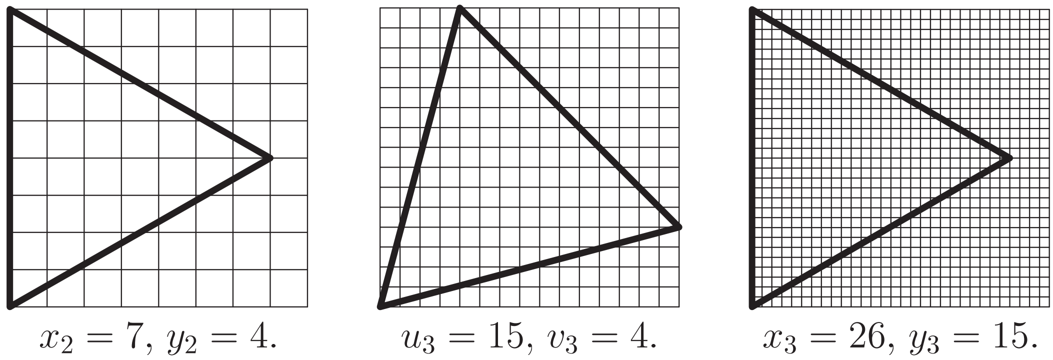


Рис. 6

Например, для треугольников, изображенных на рисунках, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= \tfrac{1}{3}(2-\sqrt{3})^2 = 0{,}0239323\ldots < \tfrac{1}{41},\\ \varepsilon_5 &= \tfrac{1}{3}(2-\sqrt{3})^{5/2} = 0{,}0123882\ldots < \tfrac{1}{80},\\ \varepsilon_6 &= \tfrac{1}{3}(2-\sqrt{3})^3 = 0{,}00641263\ldots < \tfrac{1}{155}. \end{aligned}$$

7.11. Как устроено множество “оптимальных” пятиугольников?

Геометрия цепных дробей

Как известно (см. [26]), любое действительное число α представимо единственным образом в виде (конечной или бесконечной) цепной дроби

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}},$$

где a_0 — целое, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — натуральные. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются неполными частными, а рациональные дроби

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

— подходящими дробями к цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$.

Представление числа в виде цепной дроби основано на алгоритме Евклида, геометрическую форму которого Б. Н. Делоне остроумно назвал *алгоритмом вытягивания носов* (см. [10]; см. также [25]).

Пусть α — действительное число, $0 < \alpha < 1$ и $\mathbf{a_1} = \overrightarrow{OA_1} = (-1; 0)$, $\mathbf{a_2} = \overrightarrow{OA_2} = (\alpha; 1)$ — базисные векторы решетки $\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$. Построим две ломаные $A_1A_3A_5\ldots$ и $A_2A_4A_6\ldots$, расположенные выше оси Ox плоскости Oxy, по разные стороны от оси Oy, все вершины которых являются узлами решетки $\mathrm{L}(\alpha)$. Для этого, из точки A_1 отложим последовательно вектор $\mathbf{a_2}$ столько раз, сколько его можно отложить, оставаясь левее оси Oy (скажем, a_1 раз). Конец последнего отложенного вектора обозначим через A_3 и положим $\mathbf{a_3} = \overrightarrow{OA_3}$. Из точки A_2 отложим вектор $\mathbf{a_3}$ столько раз (пусть a_2 раз), сколько его можно отложить, не пересекая оси Oy; получим точку A_4. Если $\mathbf{a_4} = \overrightarrow{OA_4}$, то из точки A_3 откладываем вектор $\mathbf{a_4}$ и т. д. Если какая-то из точек A_k попадет на ось Oy, то процесс построения ломаных заканчивается (это может случиться только тогда, когда α — рациональное число).

7.12. **Алгоритм “вытягивания носов”.** а) Постройте начальные звенья ломаных $A_1A_3A_5\ldots$ и $A_2A_4A_6\ldots$ для чисел

$$3/8 = [0; 2, 1, 2], \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \ldots], \quad \frac{1}{e-1} = [0; 1, 1, 2, 1, 1, 4, \ldots].$$

б) Положим $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, и для $k \geq 1$ обозначим через p_k расстояние вдоль оси Ox от точки A_{k+2} до прямой $x = \alpha y$, а через q_{k+2} — расстояние от точки A_{k+2} до оси Ox.

Докажите, что вершина A_{k+2} (при $k \geq -1$) отвечает k-ой подходящей дроби p_k/q_k разложения числа

$$\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

в цепную дробь. Другими словами докажите, что при $k \geq 1$

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{cases}$$

в) Пусть r_k — расстояние от точки A_{k+2} до оси Oy. Докажите, что для иррационального числа $\alpha \in (0; 1)$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1} - p_{k-1}}{q_{k+1} - q_{k-1}}, \qquad (k \geq 0);$$
$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}} \qquad (k \geq -1);$$
$$q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k = 1 \qquad (k \geq 0);$$
$$r_k / r_{k-1} = [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots] \qquad (k \geq 0);$$
$$q_k / q_{k-1} = [a_k; a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1] \qquad (k \geq 1).$$

Дайте аналитическое и геометрическое доказательства этих формул.

7.13. (См. [15]). **Полигоны Клейна и теорема Дирихле.** Для иррационального числа $\alpha \in (0; 1)$ в обозначениях предыдущей задачи каждая из ломаных $A_1A_3A_5\ldots$ и $A_2A_4A_6\ldots$ вместе с частью оси Ox ограничивает выпуклую область. Две эти области называются *полигонами Клейна*, соответствующими числу α.

а) Докажите, что внутри прямоугольника

$$P = \{(x; y) : -1/N < x < 1/N, 0 < y \leq kN\},$$

где k и N — произвольные заданные натуральные числа, содержится не менее k вершин полигонов Клейна.

Другими словами, докажите, что существует по крайней мере k различных дробей p/q таких, что

$$q \leq Nk \quad \text{и} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}.$$

При $k = 1$ это утверждение называется *теоремой Дирихле.*

б) Докажите, что для любого иррационального числа существует *бесконечно много* рациональных дробей p/q таких, что

$$|\alpha - p/q| < 1/q^2.$$

в) Убедитесь, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют целые числа p и q, не равные одновременно нулю, и такие, что

$$|q\alpha - p| \leq \varepsilon, \quad |q| \leq 1/\varepsilon.$$

Последнее геометрически означает, что в параллелограмме, задаваемом неравенствами $|y\alpha - x| \leq \varepsilon$ и $|y| \leq 1/\varepsilon$, содержится по крайней мере один узел решетки $\mathbb{Z}^2$.

7.14. Пусть A_k — вершины полигонов Клейна, соответствующих положительному иррациональному числу $\alpha \in (0; 1)$. Определим последовательность точек B_n тем, что четырехугольник

$OA_nB_nA_{n+1}$ — параллелограмм. Для произвольной точки $P(x_0, y_0)$ через P' обозначим точку пересечения прямой $y = y_0$ с осью Oy. Докажите, что для $n = 1, 2, 3, \ldots$

а) $[OA_nA_{n+1}] = 1/2$, то есть $OA_nB_nA_{n+1}$ — фундаментальный параллелограмм решетки $\text{Ł}(\alpha)$;

б) $\min\{[OA_nA_n'], [OB_nB_n']\} < 1/4$;

в) $\min\{[OA_nA_n'], [OB_nB_n'], [OA_{n+1}A_{n+1}']\} < 1/\sqrt{5}$.

7.15. (См. [1]). С помощью пункта б) задачи 6 докажите, что

$$p_k = \lg\frac{k+1}{k},$$

где p_k — вероятность того, что произвольно взятая степень числа 2 начинается с цифры k ($k = 1, 2, \ldots, 9$). По определению считаем, что

$$p_k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n},$$

где a_n — количество чисел в последовательности степеней двойки $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, начинающихся с цифры k.

7.16. а) Пусть α — произвольное иррациональное число, $\alpha \in (0; 1)$. Рассмотрим гиперболический крест

$$K(\mu) = \{(x; y) : |xy| < \mu\} \qquad (\mu > 0).$$

Докажите, что при $\mu = 1$ этот крест содержит бесконечно много вершин полигонов Клейна, соответствующих числу α.

б) **Теорема Валена.** Докажите аналогичное утверждение при $\mu = 1/2$.

в) **Теорема Маркова-Бореля-Гурвица.** Докажите, что это утверждение верно при $\mu = 1/\sqrt{5}$ и перестает быть верным при $\mu < 1/\sqrt{5}$.

7.17. Пусть $\text{Ł} = \text{Ł}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$ — решетка, построенная на векторах $\mathbf{a_1} = (1; \varphi)$, $\mathbf{a_2} = (\varphi, -1)$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

а) Докажите, что гиперболический крест $K(\varphi)$ не содержит точек решетки Ł, отличных от начала координат.

б) Докажите, что гиперболический крест $K(\varphi)$ содержит бесконечно много узлов любой решетки $\text{Ł}'$ (содержащей начало координат) с площадью фундаментального параллелограмма $\Delta(\text{Ł}') < \Delta(\text{Ł}) = \varphi^2 + 1$.

в) Опишите все решения $(x; y)$ уравнений $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$. Как они связаны точками решетки Ł, лежащими на границе гиперболического креста $K(\varphi)$?

Теорема Минковского

7.18. **Теорема Блихфельда.** (См. [9]).

а) Докажите, что любую фигуру площади меньше 1 можно так расположить на плоскости, что она не будет покрывать ни одного узла целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) Пусть на плоскости заданы некоторая решетка Ł, $\Delta(\text{Ł}) = 1$, и плоская фигура F, которая имеет площадь не меньше заданного натурального числа n: $[F] \geq n$. Докажите, что эту фигуру можно при помощи параллельного переноса переместить таким образом, чтобы она покрывала (содержала внутри или на своей границе) не менее $n + 1$ узла решетки Ł.

7.19. Пусть f — неотрицательная интегрируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что для некоторой точки z

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x+z) \geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

7.20. (Москва, см. [7]). а) Докажите, что любой квадрат площади 4 на плоскости содержит не менее двух узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) Докажите, что если квадрат содержит 7 узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, то он содержит 9 узлов.

7.21. (См. [9], [21], [34]). **Теорема Минковского.**

а) Узел $(0,0)$ является центром симметрии выпуклой фигуры площади больше 4 (возможен случай неограниченной области). Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

б) Докажите, что выпуклая фигура в $\mathbb{R}^n$ с центром симметрии в начале координат и объемом больше 2^n содержит хотя бы одну точку решетки $\mathbb{Z}^n$, отличную от начала координат.

7.22. Пусть m — натуральное число, K — выпуклое тело, симметричное относительно начала координат и $V(K) > 2^n m$. Докажите, что K содержит внутри себя по крайней мере m пар точек $\pm u_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

7.23. Пусть

$$l_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

— однородные линейные формы от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с ненулевым определителем $\Delta = \det\|a_{ij}\|$. Докажите, что для любых положительных $M_1, \ldots, M_n$ таких, что $M_1 \ldots M_n = |\Delta|$ существуют целочисленные значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю, такие что

$$|l_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq M_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

7.24. (См. [14]). **Теорема Ферма–Эйлера.** Пусть p — простое число и $p \equiv 1 \pmod 4$.

а) Докажите, что существует целое t такое, что $t^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

б) Рассмотрим решетку

$$\mathrm{Ł} = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2 : u_2 \equiv tu_1 \pmod p\right\}.$$

Докажите, что $\Delta(\mathrm{Ł}) \leq p$ и проверьте, что для любой точки $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ł}$

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv 0 \pmod p.$$

в) Докажите, что круг

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 2p\right\}$$

содержит ненулевую точку решетки Ł. Выведите отсюда теорему Ферма–Эйлера: всякое простое число p вида $4n+1$ может быть представлено в виде $p = a^2 + b^2$.

7.25. (См. [14]). **Теорема Лагранжа.** а) Докажите, что для любого простого p найдутся целые числа a_p и b_p такие, что $a_p^2 + b_p^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

б) Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые числа и $m = p_1 \ldots p_r$. Рассмотрим решетку Ł, состоящую из четверок $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}^4$, удовлетворяющих $2r$ сравнениям

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv a_p u_3 + b_p u_4 \pmod p, \\ u_2 &\equiv b_p u_3 - a_p u_4 \pmod p, \end{aligned}$$

где $p = p_1, \ldots, p_r$. Докажите, что $\Delta(\mathrm{Ł}) \leq m^2$ и проверьте, что для любой точки $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathrm{Ł}$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \equiv 0 \pmod p.$$

в) Докажите, что четырехмерный шар

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2m\right\}$$

объема $2\pi^2 m^2$ содержит ненулевую точку решетки Ł. Выведите отсюда теорему Лагранжа: любое натуральное число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

7.26. (Редей, см. [30]). Пусть $k_1, \ldots, k_n$ $(n \geq 1)$ — натуральные числа, и функции $\xi_1, \ldots, \xi_n$ принимают целочисленные значения во всех точках решетки $\mathbb{Z}^n$. Предположим также, что для произвольных u, $u' \in \mathbb{Z}^n$ из сравнений

$$\xi_i(u) \equiv \xi_i(u') \pmod{k_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

следует, что

$$\xi_i(u-u') \pmod{k_i} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Докажите, что всякое выпуклое тело K с центром симметрии в начале координат и объемом $V(K) > 2^n k_1 \ldots k_n$ содержит ненулевую точку $u \in \mathbb{Z}^n$ такую, что

$$\xi_i(u) \equiv 0 \pmod{k_i} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

7.27. С помощью предыдущей задачи докажите, что для любых натуральных k и l таких, что разрешимо сравнение $x^2+l \equiv 0 \pmod k$ найдутся натуральные u_1, u_2, удовлетворяющие условиям

$$u_1^2+lu_2^2 \le \frac{4}{\pi}kl, \qquad u_1^2+lu_2^2 \equiv 0 \pmod k.$$

7.28. (Минковский, см. [34], [8]). а) Пусть $|ad-bc| = \Delta \ne 0$, $mn \ge \Delta$. Докажите, что найдутся целые числа x и y такие, что $|ax+by| \le m$ и $|cx+dy| \le n$.

б) Пусть $|ad-bc| = \Delta \ne 0$, m, n — произвольные числа. Докажите, что для некоторых целых x и y выполняются неравенства

$$|ax+by+m| \cdot |cx+dy+n| \le \Delta/4.$$

Проверьте также, что константу $1/4$ нельзя, вообще говоря, заменить меньшей.

Убедитесь в том, что если a/b иррационально, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется целочисленное решение последнего неравенства, для которого $|ax+by+m| < \varepsilon$.

в) Пусть α иррационально и β нельзя представить в виде $\beta = m\alpha + n$, где m и n — целые. Докажите, что для бесконечно многих целых q

$$\|q\alpha+\beta\| < \frac{1}{4q},$$

где $\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$ — расстояние от x до ближайшего целого числа.

7.29. (СФРЮ, [13]). Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Докажите, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести по плоскости на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из данных точек.

7.30. (См. [27]). Пусть X — выпуклое множество с центром масс в начале координат. Если $[X] > 9/2$, то X содержит ненулевой узел решетки $\mathbb{Z}^2$.

7.31. (См. [27]). Докажите, что прямоугольник $a \times b$ случайным образом расположенный на плоскости, содержит хотя бы один узел решетки $\mathbb{Z}^2$ тогда и только тогда, когда $a \ge 1$ и $b \ge \sqrt{2}$.

7.32. (См. [35]). а) Докажите, что треугольник, случайно расположенный на плоскости, содержит хотя бы один узел решетки $\mathbb{Z}^2$ тогда и только тогда, когда его площадь не меньше

$$\frac{c^2}{2(c-1)},$$

где c — длина его наибольшей стороны.

б) Докажите, что эллипс (центр — в начале координат, а оси расположены вдоль координатных осей) содержит хотя бы один узел решетки $\mathbb{Z}^2$ тогда и только тогда, когда он содержит точку с координатами $(1/2, 1/2)$. Другими словами, если

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

— уравнение данного эллипса, то приведенное необходимое и достаточное условие запишется в виде неравенства

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \le 4.$$

7.33. **Теоремы Дж. Хаммера.** (См. [27], [32]).

а) Докажите, что всякая замкнутая выпуклая область (в частности, выпуклый многоугольник) на плоскости, имеющая площадь не меньше, π содержит две точки, находящиеся на расстоянии 2 друг от друга.

б) Докажите, что центрально–симметричная замкнутая область с центром в начале координат, площадь которой больше π, может быть повернута вокруг своего центра так, что она будет содержать по крайней мере два узла решетки $\mathbb{Z}^2$, отличные от ее центра.

в) Докажите, что замкнутая выпуклая область, площадь которой больше $\pi/2$, может быть повернута вокруг своей произвольной точки так, что она будет содержать по крайней мере один узел решетки $\mathbb{Z}^2$.

7.34. (См. [29]). а) Пусть Ł — ортогональная решетка, построенная на основе двух взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; F — выпуклая область, симметричная отоносительно прямых $x = 1/2$ и $y = 1/2$ (в координатах относительно базиса $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$), не содержащая узлов решетки Ł. Докажите, что

$$\frac{[F]}{P_F} \le \frac{1}{2} \max\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\},$$

где P_F — периметр фигуры F.

б) Из результата п. а) для решетки Ł, построенной на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с углом α между ними и $|\mathbf{a}| \le |\mathbf{b}|$, для числа

$$c(Ł) = \sup \frac{[F]}{P_F},$$

где точная верхняя грань берется по всем выпуклым областям F, не содержащим узлов решетки Ł, выведите, что

$$\frac{1}{2}|\mathbf{b}| \sin\alpha \le c(Ł) \le \frac{1}{2} \max\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}| \sin\alpha\}.$$

Литература

[1] Болтянский В. Г. *Часто ли степени двойки начинаются с единицы?* — “Квант”, 5 (1978).

[2] Бухштаб А. А. *Теория чисел.* — М.: Учпедгиз, 1960.

[3] Васильев Н. Б. *Сложение фигур.* — “Квант”, 4 (1976).

[4] Васильев Н. Б. *Вокруг формулы Пика.* — “Квант”, 12 (1974), 39–43.

[5] Вышенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. *Сборник задач киевских математических олимпиад.* — К.: Вища школа, 1984.

[6] Гальперин В., Калинников В. *Многоугольники на клетчатой бумаге.* — “Квант”, 6 (1978)

[7] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. *Московские математические олимпиады.* — М.: Просвещение, 1986.

М.: Мир,

Мир,

[8] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* — М.: Высш. шк., 2000.

[9] Гильберт Д., Кон–Фоссен С. *Наглядная геометрия,* — М.: Наука, 1981.

[10] Делоне Б. Н. *Алгорифм разделенных параллелограммов.* — Известия Академии Наук СССР, Серия мат., 11 (1947), 505–538.

[11] Егоров А. А. *Решетки и правильные многоугольники.* — “Квант”, 12 (1974), 26–33.

[12] *Задачник “Кванта”, Математика.* (Под ред. Н. Б. Васильева) — М.: Бюро “Квантум”, 1997.

[13] *Зарубежные математические олимпиады.* (Под ред. И. Н. Сергеева) — М: Наука, 1987. М.:

[14] Касселс Дж. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений.* — М.: ИЛ, 1961.

[15] Клейн Ф. *Элеметнарная математика с точки зрения высшей.*, т. 1 — М.: Наука, 1987.

[16] Коксетер Г. С. М. *Введение в геометрию.* — М.: Наука, 1966.

[17] Кушниренко А. Г. *Целые точки в многоугольниках и многогранниках*, "Квант", 4 (1977), 13–20.

системы

[18] Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* — М.: Мир, 1976.

1967.

[19] *Международные математические олимпиады.* (Сост. Фомин А. А., Кузнецава Г. М.) — М.: Дрофа, 1988.

[20] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*, т. 2, — М.: Наука, 1978

[21] Роджерс К. *Укладки и покрытия.* — М.: 1968.

[22] Рукшин С. Е. *Математические соревнования в Ленинграде и Санкт-Петербурге.* — Ростов-на-Дону: МарТ, 2000.

[23] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. *Задачи студенческих математических олимпиад.* — МГУ, 1987.

[24] Скопенков А. Б. *Олимпиады и математика.* — М.: МЦНМО, Мат. просвещение, третья серия, вып. 10 (2006), 57–63.

[25] Фукс Д. Б., Фукс М. Б. *О наилучших приближениях.* — № 11, 1971.

[26] Хинчин А. Я., *Цепные дроби.* — М.: Наука, 1978.

[27] Хонсбергер Р., *Математические изюминки.* — М.: Наука, 1992.

45.

[28] Яковлев Г. Н.,. Купцов Л. П, Резниченко С. В., Гусятников П. Б. *Всероссийские математические олимпиады школьников.* —М.: Просвещение, 1992.

[29] Bender E. A. *Area–perimeter relations for two–dimensional lattices.* — AMM, v. 69, № 8 (1962).

[30] Gruber P. M., Lekkerkerker C. G. *Geometry of numbers.* —Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987.

[31] Heilbronn, H. A. *The collected papers of Hans Arnold Heilbronn* — John Wiley & Sons Inc., 1988.

[32] Hammer J. *Unsolvd problems concerning lattice points.* — Fearon–Pitman, Calif., 1977.

[33] Honsberger R. *El ingenio en las mathematicas* — Coleccion "La tortuga de Aquiles", DLS–EULER, Madrid, 1993.

[34] Minkowski H. *Geometrie der Zahlen.* — Lpz.–B., 1953.

[35] Niven I. *Diophantine Approximation.* — NY, London: Interscience Publishers, 1963.

[36] Niven I., Zuckerman H. S. *Lattice points and polygonal area.* — Amer. Math. Montlhy, 74 (1967), 1195–1200.

[37] Pick G. *Geometrisches zur Zahlenlehre.* — Sitzungber. Lotos (Prague), 19 (1899), 311–319.

[38] Scott P. R. *On convex lattice polygons.* — Bull. Austral. Math. Soc., 15(1976), 395–399.

[39] Verblunsky M. S. *Sur le founctions préharmoniques.* — Bull. des Sc. Math., 2 Série, 73, (1949), 148.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Лауреат конкурса школьных учителей
физики и математики фонда “Династия”
в номинации “Наставник будущих ученых” (2006),
Лауреат Ломоносовской премии МГУ (2007).

E-mail: vvavilov@tochka.ru

Устинов Алексей Владимирович,
ведущий научный сотрудник
Хабаровского отделения Института
прикладной математики ДВО РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Как все просто: виноват учебник!

С. Г. Кальней

Отыщи всему начало, и многое поймешь.
Козьма Прутков

В номере 1 за 2006 год журнала "Математическое образование" опубликован опус г-на Костенко И.П. "Коренная проблема втузовского учебника математики", в котором он "разделывает под орех" все современные учебники по математике для вузов, а заодно обвиняет в личной пристрастности авторов этих учебников. Критику подобного рода можно, очевидно, просто проигнорировать. Но есть, на мой взгляд, два обстоятельства, которые связаны с эпиграфом, взятым из упомянутого опуса, и требующие обсуждения.

Первое (не главное). А в чем причина такой напористой критики? Тот факт, что к изданным учебникам (за редчайшим исключением) большое число преподавателей (можно даже часто считать, что и все, в том числе и сами авторы) имеют замечания — не подлежит сомнению. Поэтому многое из критики Костенко И.П. современных учебников по высшей математике (называемых им ВТУ учебниками — учебниками высокого теоретического уровня) можно признать справедливым. Но что предлагает Костенко И.П.? Он даже не предлагает переиздавать неоднократно отмечаемые им как пример (образец) не ВТУ учебника замечательные книги Лузина Н.Н. по дифференциальному и интегральному исчислению, а указывает лишь один достойный пример "анти-ВТУ" учебника: книгу "Введение в вероятностное прогнозирование", изданную издательством РХД в 2004 году. Автор этой книги, как нетрудно предположить, Костенко И.П. *Так может всему начало в том, что мы все должны осознать, что единственный, кто может в настоящее время написать не ВТУ учебник, спасти математическое образование — это г-н Костенко И.П.?* (Замечу в скобках, что в статье Костенко И.П. проявляет "скромность", отмечая, что его книга, возможно (!), будет удачным примером не ВТУ учебника).

Второе (и, по моему мнению, это действительно важно и может обсуждаться). Является ли отсутствие замечательных учебников по математике основной причиной падения уровня математического образования? Отмечу, что я не считаю, что нет хороших учебников, но это мое личное мнение. Мне представляется, что причины падения уровня математического образования гораздо глубже и разнообразнее. И издание даже замечательных учебников не очень повлияет на математическое образование.

В печати, в дискуссиях на конференциях по образованию причинами падения качества образования в целом, а не только математического, называются недостаток финансирования, старение и ухудшение качества кадрового состава преподавателей, непродуманные, скороспелые решения по изменению содержания школьного образования, порядка аттестации за курс средней школы и организации приема в вузы (пресловутое ЕГЭ) и ряд других. Сложно определить, какая из них оказывает большее влияние, особенно*, в долговременном плане* (хотя часто выделяется недостаток финансирования как основополагающая причина, что, по-видимому, справедливо).

Я хотел бы отметить лишь две причины, которые редко анализируются как факторы, существенно влияющие на качество обучения в высшей школе.

1. *Всеобщее высшее образование.* Фактически в России в настоящее время реализуется всеобщее высшее образование. Обучение в высшей школе продолжают (по бюджету или контрактной основе) 90 -100 % выпускников средней школы. Сравним с тем, что было раньше. В 1940 году[1] в вузы СССР на дневное отделение поступило 155 тысяч человек из 303 тысяч учащихся,

[1] СССР в цифрах в 1986 году. Москва. Статистика и финансы. 1987 г.

окончивших полную среднюю школу. В 2000 году в вузы на дневное отделение на обучение *по госбюджету* было принято 622 тысячи человек, тогда как полную среднюю школу окончило 1304 тысячи учащихся, то есть в 2000 году на бюджет, как и в 1940 году, поступило примерно половина выпускников средней школы. Но в 1940 году неполную среднюю школу окончило 1860 тысяч учащихся, в 2000 — 2107 тысяч. Таким образом, в 1940 году в вузы поступал примерно 1 из 12 выпускников неполной средней школы, а в 2000 году – почти 1 из 3. К сожалению, в настоящее время организация обучения в высшей школе почти не учитывает это обстоятельство: методика обучения в высшей школе по-прежнему основывается на том, что студент имеет высокую мотивацию к обучению в высшей школе, имеет, даже при недостатке конкретных знаний, *психологические и физические возможности* для продолжения обучения в вузе. Я не утверждаю, что есть выпускники школы, не способные к освоению вузовских программ обучения. Вполне возможно, что при соответствующей методике преподавания программы высшей школы сможет осваивать любой выпускник средней школы. Я лишь отмечаю, что в настоящее время высшая школа не готова к реализации всеобщего высшего образования с сохранением ранее достигнутого качества физико-математического образования. Сохранить качество обучения не смогла средняя школа при целенаправленном, заранее объявленном переходе на всеобщее полное среднее образование в 70-х годах прошлого века. Высшая школа тем более оказалась не готова к этому, так как всеобщность высшего образования получилась стихийно, а не в результате целенаправленной политики государства, вузов.

2. *Падение культуры чтения.* Для того чтобы учиться и не по ВТУ учебнику, нужно его читать и понимать прочитанное, то есть владеть некоторой культурой чтения. К сожалению, эта культура у выпускников средней школы почти не вырабатывается. По данным опроса центра социологии Российской Академии образования (Комсомольская правда от 12 февраля 2007 года) в 2005 году выпускник средней школы прочитывал примерно 1 книгу за месяц, тогда как в 1976 году почти 4 книги. Это средние цифры по всем выпускникам, но, как отмечено выше, в высшей школе учатся почти все выпускники средней школы. В этих обстоятельствах скоро выпускник средней школы не то что параграфы ВТУ учебника, а сказку про колобка не сможет даже пересказать, не говоря уже об анализе ее содержания.

Первая из вышеназванных причин относится собственно к высшей школе и может быть изменена волевыми решениями правительства по уменьшению приема в вузы. Вопрос в том, нужно ли это делать, когда различные исследования показывают полезность для развития общества увеличения срока обучения молодежи.

Сложнее с падением культуры чтения. По-видимому, в связи с развитием информационных технологий, Интернета, всеобщей компьютеризацией уже не удастся воспитывать у школьников прежнюю культуру работы с книгой, с текстами. Система работы с информацией (поиск нужной, чтение и анализ найденной) существенно изменяется при применении информационных компьютерных технологий. Учащийся часто пытается привлечь все больше источников информации, не выполняя элементарного анализа найденного. В итоге скачиваются десятки, сотни документов, но ни один из них не прочитывается внимательно. Вместе с тем при изучении математики важно не столь количество найденных учебников, учебных пособий, а глубина проработки нескольких из них (как правило, одного-двух по отдельной дисциплине). Но бесперспективно запрещать школьникам использование компьютера, Интернета. Поэтому, по моему мнению, одной из основных задач средней и высшей школы является разработка методики преподавания различных дисциплин с использованием информационных технологий, компьютера.

Кальней Сергей Григорьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
зав. кафедрой "Высшая математика-2"
Московского государственного института
электронной техники (технического университета).

E-mail: hm2@miee.ru

Еще раз об учебниках и реформе математического образования

В. Б. Дроздов

С большим интересом прочитал блестящую статью Костенко И.П. “Почему надо вернуться к Киселеву” (“Математическое образование”, №3(38), 2006). С учебниками Киселева я хорошо знаком, имею их дореволюционные издания. Мне повезло: стереометрию в школе учил по Киселеву, планиметрию — по Никитину, алгебру — по Барсукову, алгебру и элементарные функции — по Кочетковым. Последние учебники написаны тоже в классической киселевской традиции. Моя встреча с математикой не была отравлена колмогоровской программой.

На 5-м курсе пединститута в мои руки попал невесть кем реально написанный учебник “Геометрия 6-8 (планиметрия)”. На обложке красовалась фамилия “Колмогоров”. Впечатление — шок, да может ли быть такое?! Через год был вынужден войти в класс с этой книгой в руках. Как учитель свидетельствую: дети не понимали почти ничего. Особенно, почему равные фигуры назвали “конгруэнтными”. Последнее слово вызывало смех. Немногим лучше были новые учебники алгебры. Коллеги-математики единодушно отвергали навязанную сверху реформу школьной математики.

Безумная и бездарная реформа нанесла страшный урон математическому образованию в нашей стране. Когда ее, спохватившись, тихо свернули, не было сказано о полном провале компании реформаторов под прикрытием имени Колмогорова на ниве просвещения. Это понятно — был застой. Почему же сейчас не признать официально очевидный факт?

Вместо того, чтобы как-то залечить раны от реформы, сейчас вводится ЕГЭ по всем предметам. Это окончательно добьет всю систему образования в России и сделает ее деградацию необратимой со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Геометрический подход к признаку прямоугольного треугольника

Б. Р. Френкин

Настоящая заметка возникла как отклик на статью В. Б. Дроздова “Три заметки о решении математических задач” (“Математическое образование”, №4(31), октябрь-декабрь 2004 г., с. 2 – 18). В ней идёт речь (наряду с другими вопросами) о необходимом и достаточном признаке прямоугольности треугольника: полупериметр должен быть равен сумме диаметра описанной окружности и радиуса вписанной. Автор статьи разбирает несколько прежних, громоздких доказательств этого факта и в итоге предлагает своё, гораздо более компактное. Как отмечает В. Б. Дроздов, это решение содержит геометрический, тригонометрический и алгебраический компоненты. Можно отметить, что алгебраический компонент весьма значителен.

Автору настоящей заметки удалось устранить алгебраические выкладки и придать доказательству более геометрический характер, что делает его наглядным и прозрачным. Не используются и формулы для площади треугольника. Присутствуют достаточно стандартные тригонометрические преобразования; скорее всего, тригонометрический компонент неустраним, так как радиус описанной окружности связан с длинами сторон треугольника через функцию синуса.

Итак, докажем следующий факт:

Пусть p — полупериметр некоторого треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружности соответственно. Тогда величина $p - 2R - r$ положительна в случае остроугольного треугольника, отрицательна в случае тупоугольного и равна 0 в случае прямоугольного.

Пусть A, B, C — вершины треугольника; α, β, γ — прилежащие углы, причём $\alpha \le \beta \le \gamma$; a, b, c — противолежащие стороны. Положим $\delta = \frac{\alpha}{2}$. Как известно, $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, $r = \frac{b+c-a}{2}\mathrm{tg}\ \delta$ (в статье В. Б. Дроздова имеется вывод второй из этих формул). Отсюда

$$p - 2R - r = \frac{b+c}{2}(1 - \mathrm{tg}\ \delta) + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{2}{\sin\alpha} + \mathrm{tg}\ \delta\right) =$$

$$= \frac{b+c}{2}\frac{\cos\delta - \sin\delta}{\cos\delta} + \frac{a}{2}\frac{2\sin\delta\cos\delta - 2 + 2\sin^2\delta}{2\sin\delta\cos\delta} =$$

$$= \frac{b+c}{2}\frac{\cos\delta - \sin\delta}{\cos\delta} - \frac{a}{2}\frac{\cos\delta - \sin\delta}{\sin\delta}.$$

Угол α — острый (как наименьший в треугольнике), поэтому $\delta < \frac{\pi}{4}$ и $\cos\delta - \sin\delta > 0$. Так как $\sin\delta$ и $\cos\delta$ также положительны, то определение знака величины $p - 2R - r$ сводится к сравнению величин $(b+c)\sin\delta$ и $a\cos\delta$.

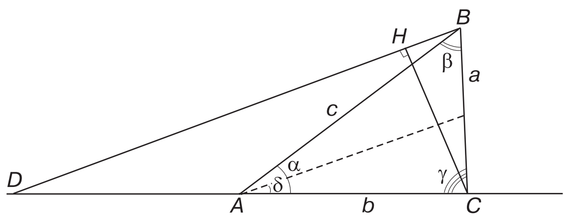


Рис. 1

На продолжении стороны CA отложим отрезок AD, равный AB (см. рисунок). Из точки C опустим на BD перпендикуляр CH. Тогда $CD = b + c$, $\angle CDB = \delta$ и $(b+c)\sin\delta = CH = a\cos\angle BCH$. Сравнить эту величину с $a\cos\delta$ — то же самое, что сравнить δ с $\angle BCH$ (именно в таком порядке, поскольку на интервале $(0, \pi)$ косинус убывает). Заметим, что $\angle CBD$ равен $\beta + \delta$ и, значит, не превосходит $\gamma + \delta$. Так как сумма этих двух углов равна π, то $\angle CBD \le \frac{\pi}{2}$, т.е. точка H лежит с той же стороны от B, что и D (либо совпадает с B). Поэтому $\angle BCH =$

$\gamma - \angle DCH = \gamma - \frac{\pi}{2} + \delta$, и сравнить δ с ним — то же самое, что сравнить прямой угол с γ (наибольшим из углов треугольника). Теперь доказываемое утверждение очевидно.

Можно отметить, что в случае прямоугольного или тупоугольного треугольника данный признак выводится совсем просто. Действительно, рассмотрим не наименьший, а наибольший угол треугольника. В случае прямоугольного треугольника $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{2}$, $2R = c$. Отсюда следует нужное равенство. Если треугольник тупоугольный, то $\frac{\gamma}{2} > 1$, $\sin\gamma < 1$. Поэтому $r = \frac{a+b-c}{2}\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} => \frac{a+b-c}{2}$, $2R = \frac{c}{\sin\gamma} > c$, откуда $2R + r > p$. В случае же остроугольного треугольника аналогично получаем $r < \frac{a+b-c}{2}$, но, к сожалению, снова $2R > c$, так что в этом (и только в этом) случае требуется более сложное рассуждение.

Рассмотренная задача (для случая прямоугольного треугольника) содержится в известном сборнике В. В. Прасолова “Задачи по планиметрии” (М.: МЦНМО, 2001 г., с. 291, №12.29а). Она следует из более общей задачи 12.29б (там же):

Докажите, что если $p = 2R\sin\varphi + r\mathrm{ctg}\,(\varphi/2)$, *то* φ *— один из углов треугольника (предполагается, что* $0 < \varphi < \pi$*).*

Решение общей задачи включает достаточно сложные тригонометрические и алгебраические преобразования. Остаётся открытым вопрос, можно ли и ему придать геометрический характер.

Френкин Борис Рафаилович,
кандидат физ.-мат. наук,
старший паучный сотрудник
Центрального экономико-математического института РАН.

Email: frenkin@mccme.ru, frenkin@inbox.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2007 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2007 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents