ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год одиннадцатый

№3 (43)

июль-сентябрь 2007 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (43), 2007 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2007 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 28.09.2007 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (43), июль – сентябрь 2007 г.

Содержание

Исследования Эйлера по теории чисел

И. Р. Шафаревич

Этот год — год 300-летнего юбилея Леонарда Эйлера (4 (15) апреля 1707, Базель – 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург). Наш журнал планирует ряд публикаций, посвященных великому ученому. Предлагаем вниманию читателей статью Игоря Ростиславовича Шафаревича, посвященную трудам Эйлера по теории чисел.

Эйлер родился в 1707 г. в Швейцарии, но провел большую часть своей активной научной жизни в России.

Этими обстоятельствами объясняется то, что в этом году отмечается 300-летие его рождения и, что в России эта дата привлекает особое внимание.

Эйлер был одним из самых широких математиков, когда-либо живших на Земле. Его математические исследования относятся к анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, теории приближенных вычислений и другим вопросам математики, а так же и к приложениям математики в физике и небесной механике и даже математическим проблемам, возникающим в технических областях, например, в баллистике или кораблестроении. Полное собрание его сочинений занимает более 70-и томов. Из них теории чисел посвящены лишь 4.

Однако, в этих работах не только содержатся фундаментальные идеи, определившие дальнейшее развитие теории чисел, но и основополагающие открытия в других областях, сделанные Эйлером в связи с вопросами теории чисел.

В ту эпоху, когда жил Эйлер (то есть, в XVIII веке), блистательные успехи анализа сделали его самой популярной частью математики. Некоторые ученые, целиком посвятившие себя анализу и близким областям, не чувствовали, видимо, принципиальной значительности вопросов "о числах", как тогда говорили (чего нельзя сказать как о математике XVII века, так и более поздней XIX и XX веков). Тем более удивительно, что теоретико-числовые исследования Эйлера продолжались в течении приблизительно 50-ти лет. Причем он неоднократно (возможно, полемизируя с некоторыми высказываниями современных ему математиков) выражал свое мнение, что он не чувствует необходимости оправдываться в том, что потратил столько времени и усилий на эти вопросы. Так, он писал: "Высший Анализ столь многим обязан Диофантову методу (то есть, определенному разделу теории числе), что мы не имеем права им пренебрегать". Кроме того, Эйлер, видимо, ясно чувствовал эстетическую привлекательность вопросов теории чисел. Он не раз пишет об "очень красивых" и "божественных" (he??liche) закономерностях, которые он открыл или лишь предвидел.

Особенностью работы Эйлера в математике (не только в теории числе), было то, что он исключительно долго держал памяти интересовавшие его некогда вопросы. Иногда он через 10 лет возвращался к доказательству, которое было неполным, чтобы заменить его более убедительным (или более ясным) рассуждениям. Поэтому дальше я изложу некоторые из основных его результатов в теории чисел (конечно, не все — их было слишком много) не в хронологическом порядке, а группируя их по их идейному содержанию. Начну же с коротких биографических данных. Практически все мое изложение заимствовано из прекрасной книги покойного А.Вейля по истории теории чисел ("От Хаммураби до Лежандра") — фактически это сокращенный пересказ главы этой книги, посвященной Эйлеру. Я очень надеюсь, что книга будет некогда переведена на русский язык. Она будет полезна всем, интересующимся математикой и доставит им громадное удовольствие — книга читается как роман.

1. Биографические сведения

Вся математическая жизнь Эйлера связана с Российской Академией Наук. Организация Академии Наук в Петербурге была задумана Петром I (Петром Великим) в конце его жизни. Начало ее деятельности приходится на царствование Екатерины I. Тогда молодой Эйлер и был приглашен в Петербург. Когда он прибыл в Петербург, ему еще не было 20-ти лет. Вскоре он был зачислен в число сотрудников академии, сначала в низшем звании “адъюнкта”. В Петербурге он женился. Там же перенес тяжелую болезнь, в результате которой потерял правый глаз — на некоторых портретах мы видим Эйлера с повязкой на правом глазе.

В 1740 г. в связи со смертью императрицы Анны Иоанновны, в России разразился политический кризис и жизнь здесь стала неспокойной. Но тогда же в Берлине на прусский престол взошел Фридрих II (Фридрих Великий). Дорожа своим прозвищем “Король — философ”, он, конечно, решил основать в Берлине Академию Наук, куда пригласил и Эйлера. Эйлер последовал этому приглашению и был даже назначен президентом Берлинской академии. Он прожил в Берлине 24 года. Однако, никакого разрыва с Петербургской академией не произошло. Эйлер числился это время почетным иностранным членом нашей академии и опубликовал в ее изданиях более 100 работ (а В Берлине — 127).

Постепенно отношения между Эйлером и Фридрихом Великим (который, видимо, вообще обладал капризными и тяжелым характером), становились все прохладнее. Тем временем русский престол заняла Екатерина II (Екатерина Великая), стремившаяся вообще продолжить начинания Петра Великого. Это относилось и к академии наук, туда она пригласила вернуться Эйлера. После переговоров, продолжающихся 3 года, Эйлер вернулся в Петербург в 1766 г. Там он и работал до самой смерти в 1783 г.

Еще в Берлине у Эйлера стал развиваться катаракт на левом (неповрежденном) глазе. В России он перенес операцию, которая прошла успешно, но в глаз была занесена инфекция. В результате Эйлер стал терять зрение и в конце концов почти полностью его лишился. Это, однако, не сказалось на его математическом творчестве. Многие свои работы и книга в тот период он диктовал сотрудникам и ученика, в которых у него не было недостатка. За это время им было написано несколько сот работ.

Теперь я перехожу к описанию некоторых направления размышлений Эйлера в теории чисел.

II. Использование свойств делимости алгебраических чисел

В большой степени исследования Эйлера по теории чисел были связаны с развитием традиции, идущей от Ферма. Речь шла как о воссоздании доказательств некоторых утверждений Ферма (части самим Ферма не приводившихся), так и об исследовании вопросов, лишь поставленных Ферма.

В частности, одним из толчков к теоретико-числовым исследованиям Эйлера послужило весьма популярное утверждение Ферма о том, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

при $n > 2$ не имеет решений, в целых числах x, y и z, которые все отличны от 0. Один раз Ферма написал, что располагает доказательством этого утверждения (замечание на полях книги Диофанта). В других же случаях, говоря о близких вопросах, он больше никогда такого утверждения не делал. Поэтому мне кажется весьма правдоподобной мысль, высказанная в уже упоминавшейся книге А.Вейля — что Ферма таким доказательством и не располагал. Случай $n = 4$ может быть без труда разобран на основании соображений, которыми Ферма владел и весьма вероятно, что в момент чтения книга Диофанта он думал, что тот же метод может быть применен и в общем случае.

Эйлер нашел несколько доказательств утверждения Ферма в случае $n = 3$. Многие исследователи предполагают, что Ферма обладал доказательством этого факта, где он заменял разложение на множители равносильными формулами. В основе всех этих доказательств лежит (иногда искусно спрятанная за элементарными по виду рассуждениями) совершенно новая идея:

разложения многочлена на множители с иррациональными коэффициентами. В результате вопрос сводится к простым утверждениям относительно разложения на множители некоторых иррациональных чисел. Этим Эйлер положил начало громадной новой области, арифметике алгебраических чисел.

Мы изложим вариант доказательства Эйлера, эквивалентной приводимым им рассуждениям, но более ярко выделяющий описанную выше идею. В применении к уравнению (1) в случае $n = 3$ можно переписать его в виде

$$y^3 = z^3 - x^3$$

и разложить правую часть на множители:

$$z^3 - x^3 = (z - x)(z - \rho x)(z - \rho^2 x) \qquad (2)$$

где $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ — комплексное число, удовлетворяющие условию $\rho^3 = 1$ (другими такими числами являются $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ — оба встречаются в правой части соотношения (2)).

Мы видим совершенно новый подход к нашей проблеме, требующий, однако рассмотрения нового типа чисел. Это будут все комплексные числа, которые можно представить в виде $m+n\rho$, где m и n — целые рациональные числа. Совокупность всех таких числе обозначал через R. Легко убедиться, что сумма и разность двух чисел из R, содержится в R. Но верно и гораздо более поразительное свойство: произведение двух чисел из R, содержится в R. Это следует из того что $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ (как легко проверить) и если $\alpha = a + b\rho$, $\beta = m + n\rho$, то $\alpha\beta = m + (an+bm)\rho + bn\rho^2 = am - bn + (an + bm - bn)\rho$. Таким образом, числа совокупности R похожи на целые рациональные числа и для них можно поставить аналогичная вопросы: о разложении числа на простые множители, единственности такого разложения и т.д. ....

Это — вопросы разной степени трудности то, что разложение на простые (далее на разложимые) множители возможно — убедится не трудно. Проще всего для этого воспользоваться выражением $N(a+b\rho) = |a+b\rho|^2 + a^2 + ab + b^2$. Из теперь хорошо известных свойств комплексных чисел, следует, что $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, где α и β — два произвольные числа нашей совокупности R. Так как $N(\alpha)$ — положительное целое рациональное число, то если бы число α не было простым, а имело делитель β, $\alpha = \beta\gamma$, где γ — другое число нашей совокупности то мы имели бы разложение $N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$. Продолжая так (если β не простое) мы прийдем к числу, для которого $N(\xi) = 1$. Легко проверить, что таких чисел всего шесть: ± 1, $\pm\rho$ и $\pm\rho^2$. Здесь мы встречаемся с первым отличием совокупности R от совокупности целых рациональных чисел. Указанные 6 чисел являются единственными в нашей совокупности для которых обратное — тоже число из R. (Среди целых рациональных чисел такими являются только ± 1). Такие числа называют обратными в R. Очевидно, что и понятие делителя и простого числа в R имеет смысл раз????лировать только “с точностью до обратимых множителей”. Предшествующее рассуждение и является доказательством того, что любое число из R является произведением простых чисел — с точностью до обратимого множителя, конечно.

Дальше мысль Эйлера шла, очевидно, примерно так:

Рассмотрим тот случай, когда сомножители в правой части равенства (2) взаимно просты (случай, когда это не так, может быть рассмотрен вполне элементарно). Тогда произведение взаимно простых чисел является кубом. *Ясно*, пишет Эйлер, что это возможно только, когда каждый из них является кубом. Тогда мы можем записать $z - x\rho = (p - q\rho)^3$ и $z - x = k^3$, а отсюда элементарными преобразованиями не трудно найти решение x_1, y_1, z_1 уравнения (1) с меньшими, но отличными от 0 значениями (например, $0 < z_1 < z$). Мы пропускаем эти элементарные преобразования, которые можно, например, прочесть в книге Р.О.Кузьмина и Д.К.Фаддеева “Алгебра и арифметика комплексных чисел”.

Но самым интересным — и важным для будущего математика — является утверждение, сформулированное Эйлером как *очевидное*. На самом деле, оно является действительно очевидным, только если для совокупности R доказана однозначность разложения на простые множители (разумеется, с точностью до множителей, обратимых в R).

По-видимому, Эйлер не задумывался над вопросами однозначности разложения на простые множители, так как он подобные высказывания делал и для других выражений, которые приводят к другой области R', для которой разложение на простые множители не единственно. Он, например, рассматривает вопрос о решении в целых числах уравнения $x^2 + Ay^2 = z^A$ для некоторого условия A для этого пользуемся разложения $x^2 + Ay^2 = (x + y\sqrt{-A})(x - y\sqrt{-A})$. Как он утверждает, отсюда следует, что $x + y\sqrt{-A} = (p - qR - A)^\lambda$ с некоторыми целыми p и q. Это рассуждение приводит к рассмотрению совокупности R', состоящей из чисел вида $x + y\sqrt{-A}$ при любых целых рациональных числах x и y. Утверждение, которое делает Эйлер, было бы верно, если бы разложение на простые множители в совокупности R' было единственным. Это, однако, не всегда так. Например, при $A = 5$ мы имеем:

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$$

и все числа в этом равенстве — простое (в совокупности чисел вида $x + y\sqrt{-5}$), как нетрудно проверить, так что мы имеем два разных разложения на простые множители.

Эйлер явно понимал общематематическую значимость сделанного им шага. Например, в книге "Алгебра" он пишет: "Этот метод тем более замечателен, что он исходит из тории иррациональных чисел, которая иначе была бы бесполезной в Диофантовом анализе".

Одновременно такие же идеи были открыты французским математиком Лагранжем. В письме ему Эйлер пишет: "Я восхищен Вашим методом введения иррациональных и даже мнимых чисел в этом разделе анализа, который имеет дело только с целыми числами. Я уже несколько лет пользуюсь этой идеей. Я разработал это направление детально, показав, что для решения уравнения $x^2 + ny^2 = (p^2 + nq^2)^\lambda$ достаточно решить $x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^\lambda$.

К счастью для Эйлера, разложение на простые множители все же однозначно в той совокупности чисел R, которая нужна для доказательства предположения Ферма при $n = 3$. В не очень явном виде он сам это раньше доказал. С современной точки зрения однозначность разложения на простые множители в этой совокупности R следует, как и для целых рациональных чисел, из алгоритма Евклида — для R он дает остаток δ, для которого $N(\delta) < N(\beta)$ в представлении $\alpha = \beta\gamma + \delta$. Доказательство можно прочесть в цитированной выше книге Кузьмина и Фаддеева.

Эти вопросы были прояснены более поздними математиками. Но работы Эйлера впервые показали интересные исследования вопросов делимости внутри некоторых естественно возникающих совокупностей комплексных чисел, которые теперь называются "кольцами целых алгебраических чисел".

На этом мы расстанемся с работами Эйлера, связанными с арифметикой алгебраических чисел. Но интересно все же сказать еще несколько слов о гипотезе Ферма, связанной с уравнением (1). Судьба этого вопроса удивительна. В течение многих лет (и веков) им занимались выдающиеся математики, следуя по пути, намеченному Эйлером. Именно, для произвольного n выражение $z^n - x^n$ тоже можно разложить на множители: $z^n - x^n = (z - n)(z - \xi_1 x)...(z - \xi_{n-1} x)$, где 1, ξ_1, $\ldots$, ξ_{n-1} — это различные корни многочлена $t^n - 1$: "корни из единицы". Очень скоро было замечено, что достаточно доказать предположение Ферма для простого значения n.

С числами ξ_i можно тоже связать некоторую совокупность чисел $\bar{R}$ и утверждение, высказанное Ферма было бы доказанным, если бы в этой совокупности разложения на простые множители было однозначно. Для небольших простых значений n это и было доказано. Так "Теорему Ферма" доказал Ламэ для $n = 5$. В таком же направлении двигались Коши, по-видимому — Дирихле — Куммер и другие. Куммер исследовал сам феномен неоднозначности разложения на простые множители и показал, что эта однозначность вообще говоря не имеет места, но восстанавливается, если к числам совокупности $\bar{R}$ добавить некоторые объекты, названные им "идеальными числами", а теперь называемые "Эйвизорами". Это дало возможность доказать предположение Ферма и для таких значения n, для которых разложение на простые множители в множестве $\bar{R}$ неоднозначно. Сам Куммер сделал это для простых $n \leq 100$ (другие математики — для любых $n \leq 5500$).

Так эта область развивалась много лет в одном и том же направлении. Еще в начале XX в. Гильберт считал вопрос Ферма — одним из самых насущных в теории чисел. Но вот в самом конце XX в. (1985 г.) вопрос был перенесен в совершенно другую область. Немецкий математик

Фрей заметил, что отрицательный ответ на вопрос Ферма привел бы к странным явлениям, плохо согласующимся с гипотезами, которые обсуждались (и хорошо подтверждались численным экспериментом) — в казалось бы не связанной с этим вопросом области теории чисел — так называемой “теории эллиптических кривых” с рациональными коэффициентами. Наконец, была указана и точная гипотеза, к тому времени не доказанная, но очень популярная — из которой утверждение Ферма вытекало бы. Это так называемая “гипотеза Таниямы–Вейля”. Ее не трудно было бы и сформулировать, но вряд ли ее формулировка много пояснит неспециалисту. Наиболее поразительно, что она имеет дело с объектами, весьма далекими от первоначальной постановки вопроса Ферма.

Вскоре после того, как такая зависимость была установлена, гипотезу Таниямы–Вейля (с небольшими ограничениями, достаточными для доказательства “Теоремы Ферма”) доказали Уайлс и Тэйлор (в 1995 г.). Так была доказана и гипотеза Ферма.

Этот пусть доказательства кажется мне поразительным, так как он в принципе отличен от того, которым пытались идти до того. Неужели интуиция обманула таких математиков как Эйлер, Коши, Куммер, Гильберт и многие другие? Быть может, дальнейшие исследования прольют свет на этот вопрос.

III. Исследование конечных алгебраических систем

Эйлер, собственно, создал основной аппарат теории чисел (работающий вплоть до наших дней): теорию сравнений по модулю целого числа m. Как известно, если считать эквивалентными два целых числа, если их разность делится на m, то целые числа распадутся на m множеств, сейчас называемых “классами вычетов”. Сложение и умножение целых чисел переносится на классы вычетов, которые образуют “конечное кольцо” $\mathbb{Z}/m$ и многие свойства чисел сейчас формулируются как свойства этого кольца. Такая точка зрения восходит к Эйлеру. То, что сейчас называется “модулем”, он называет “Демтелем” и обозначает d. Сам класс вычетов имеет у Эйлера особое название — “вид” (specio). Более того, он подчеркивает, что то или иное свойство относится к “виду”, а не к его отдельным элементам. В частности, от исследует деление в кольце $\mathbb{Z}/d$. В частности, он доказывает существование частного α/β для двух “видов”, из которых β должен состоять из чисел, взаимно простых с “делителем” — d. При этом он подчеркивает, что речь не идет о делении чисел: частное $\gamma = \alpha/\beta$ определяется соотношением $\gamma\beta = \alpha$§в кольце $\mathbb{Z}/d$.

Начал Эйлер с восстановления доказательства теоремы, доказанной Ферма: если числа p — простое, а a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p (сначала не зная, что ее доказал Ферма, позже — ссылаясь на него). С современной точки зрения речь идет об определении порядка группы отличных от 0 элементов *поля* $\mathbb{Z}/p$ (сейчас она обычно обозначается $\mathbb{F}_p^*$). Для произвольного d Эйлер исследует соответствующую группу (элементов на которые возможно деление) в кольце $\mathbb{Z}/d$ при произвольном d. Ее порядок равен числу целых чисел, меньших d и взаимно простых с d. Сейчас это число обозначается $\varphi(d)$ “φ называется *функцией Эйлера*”. (Сам Эйлер использовал обозначение πn). Известная “теорема Эйлера” утверждает, что если число a взаимно просто с “делителем” d, то $a^{\varphi(d)} - 1$ делится на d. Если d-простое число p, то это утверждение превращается в теорему Ферма, так как тогда $\varphi(p) = p - 1$. Сейчас это утверждение рассматривается как частный случай соотношения

$$g^{|G|} = e \tag{3}$$

для любого элемента g конечной группы G. Здесь $|G|$ обозначает число элементов в G, а e — ее единичный элемент. В большем числе доказательств, которые Эйлер нашел для своей теоремы, то, которое было опубликовано позже других, носит именно теоретико-групповой характер и сейчас может быть дословно приведено как доказательство соотношении (3) для произвольной конечной коммутативной группы.

Для случая, когда “делитель” d является простым числом, Эйлер исследует так же группу (конечно — это более поздний термин) по умножению отличных от 0 элементов этого поля. Основной результат заключается в том, что она — циклическая. Элементарно это можно выразить так, что существует такое целое число g, что его степени g^k дают все возможные остатки (кроме равного 0) при делении на p. Такое число g называется в теории чисел "первообразными корню? по модулю p", а показатели, которые мы обозначали через k — "индексами" соответствующих остатков. Умножение классов сводится тогда к сложению индексов, играющих в этом случае роль, аналогичную логарифмам.

Рассуждение Эйлера по сути чисто теоретико-групповое. Оно сейчас приводится, когда доказывается, что в любом поле K корни степени m из 1 образуют циклическую группу. (В случае $K = \mathbb{F}_p$, согласно теореме Ферма, $m = p - 1$).

В связи с этими и близкими исследованиями Эйлер доказывает что любой многочлен $f(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$ не может иметь в $\mathbb{F}_p$ больше корней, чем его степень. По существо, Эйлер обращает внимание на то, что в этом случае пригодно рассуждение, предложенное Декартом для аналогичного факта и числовых коэффициентов, в предшествующем веке (Эйлер приводит рассуждение только для нужного ему случая, когда $f(x) = x^n - 1$, то оно от этого предположения не зависит).

В других ситуациях Эйлер сталкивается со случаем, когда коэффициенты многочлена $f(x)$ принадлежат полю $\mathbb{F}_p$, но сам он в этом множестве корней не имеет. В этом случае он спокойно рассуждает об эти корнях, называя их, однако, "мнимыми" или "несуществующими". В этой связи А.Вейль делает, в уже не раз цитированной книге интересное замечание, с которым я хотел бы читателей познакомить.

Известно, что в анализе одно из основных достижений Эйлера состоит в рассмотрении многих важнейших функций — таких, как e^x, $\sin x$, $\cos x$ — для комплексных значений аргумента. Только тогда можно было хотя бы сформулировать поразительные соотношения, открытые и доказанные Эйлером. Например, знаменитое "тождество Эйлера":

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

В этих случаях Эйлеру было достаточно задать функцию степенным рядом, а потом заметить, что ряд сходится и для некоторых (часто — любых) комплексных значений аргумента.

Таким образом, он понимал, какая пропасть новых фактов возникает при рассмотрении уже знакомых функций в новой области. В приведенных примерах это распространение было столь естественно, что Эйлер даже его специально не оговаривал. Но вот, например, при его новом доказательстве того, что каждый многочлен с вещественными коэффициентами имеет вещественный или комплексный корень (тогда это называлось "основной теоремой алгебры") дело обстояло сложнее — и понимание этого затрудняло многих более поздних математиков. Эйлер считает, что многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами имеет такие-то корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и различается в произведение: $c(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)$, после этого доказывает, что корни являются комплексными числами, то есть могут быть представлены в виде $a + b\sqrt{-1}$. На первый взгляд здесь — очевидный прочный круг. Но для Эйлера существование корня у многочлена представляется само собой разумеющимся — и тут он находится на уровне более позднего развития математики (XX в.). Именно, для этого рассуждения нам достаточно построить какое-то поле K, в котором многочлен имеет n корней — а это можно сделать часто алгебраическим методами. Суть же рассуждения Эйлера заключается в доказательстве того, что эти корни можно представлять в виде $a + b\sqrt{-1}$. Именно такое доказательство (восходящее к Эйлеру) содержится во многих современных алгебраических трактатов (например, Ван дер Вардена).

И в переписке Эйлер ссылается на то, что постепенное расширение понятия числа обычно связано с тем, чтобы ранее не разрешимые уравнения имели решения. Надо только, чтобы подобное расширение приводило к области, где имеют место обычные законы алгебры и не приводило к противоречиям — и в качестве проверки этого Эйлер (здесь — в отличие от более современных взглядов) готов опереться на математическую практику.

Теперь я могу привести мысль, высказанную А.Вейлем по поводу теоретико-числовых работ Эйлера. В некоторых работах Эйлер рассматривает многочлены $f(x)$ с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_p$, причем уравнение $f(x) = 0$ может иметь решение с $\mathbb{F}_a \in \mathbb{F}_p$, а может и не иметь. В первом случае Эйлер называет этот корень "вещественным", а во втором он все равно предполагает его существование, сам корень называет "так сказать, мнимым". Сейчас известно, что такие корни действительно существуют и содержатся в различных конечных полях, содержащих поле $\mathbb{F}_p$. И

Вейль предполагает, что в этих работах Эйлер делает первые шаги в теории конечных полей. Не даром долгое время конечные поля называемые “полями мнимостей Галуа”.

IV. Разбиения на слагаемые

Эйлер положил начало большому разделу теории чисел с таким названием. Речь идет о числе представлений произвольного натурального числа n в виде суммы слагаемых специального типа — например, различных натуральных или нечетных, но не обязательно различных и т.д. Причем разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, не различаются. Например, равенства $6 = 1+5 = 1+2+3 = 2+4$ являются разбиениями на различные слагаемые, а $6 = 1+5 = 1+1+1+3 = 3+3$ — разбиениями на нечетные, не обязательно различные слагаемые. Замечателен метод предложенный Эйлером. Для любого натурального числа n обозначим через a_n число разбиений числа n на слагаемые изучаемого типа. Мы получаем бесконечную последовательность числе: a_1, $a_2, a_2, \dots, a_n \dots$. Эйлер предлагает рассматривать их как коэффициенты некоторого степенного ряда, то есть рассмотреть ряд $1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$. Вполне может сказаться, что такая бесконечная сумма не имеет смысла ни для какого значения x, то есть наш ряд не сходится. Тем не менее, обычные правила действий над многочленами переносятся на такие образования. Чтобы подчеркнуть, что ряд не рассматривается как функция x, дающая какое-то значение для некоторых значений x, такие ряды сейчас называют §формальными степенными рядами”.

Эйлер обнаружил, что оперирование с такими рядами приводит к нетривиальным утверждениям о числах разбитий на слагаемые того или иного вида. Особенно важно, что при некоторых условиях можно образовать и бесконечные суммы и произведения таких рядов. Например, бесконечное произведения таких рядов. Например, бесконечное произведение

$$(1+u_1(x))(1+u_2(x))...(1+u_n(x))...$$

можно представить как формальный степенной ряд раскрывая по очереди скобы, если степенные ряды $u_i(x)$ начинаются со все бо?льших степеней x.

Я приведу только один пример результатов, которые Эйлер получил таким образом. Например, если представить бесконечное произведение $(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)...$ в виде степенного ряда $1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$, то его коэффициент a_n показывает, сколькими способами можно представить n в виде различных натуральных слагаемых — ведь член x^n

Получается, когда мы берем (или не берем) член x из первой скобки, x^2 — из второй и т.д.

Немного сложнее записать число разбиений на слагаемые, которые не предполагаются различными. Для этого заметим, что имеет место равенство

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1+u(x)+u(x)^2+...+u(x)^n+...$$

где $u(x)$ — степенной ряд без свободного члена. Это равенство доказывается точно так же, как формула для бесконечной геометрической прогрессии. В частности,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+...+x^n+..., \quad \frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+...+x^{2n}+...$$

а значит, если записать выражение

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^n)...)}$$

в виде степенного ряда $1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$, то a_n будет равно числу разбиений n на слагаемые, не обязательно различные. Проверяется это тем же рассуждением, каким мы раньше пользовались. Действительно если в каком-то разбиении числа n входит числа 1 — k, раз, 2 — k, раза и т.д., то есть, если $n = k_1+2k_2+...+nk_n+...$, то умножая член x^{k_1} из первой скобки на x^{2k_2} — из второй и т.д., мы получим x^n столько раз, сколько существует подобных разбиений. Можно видоизменить то же рассуждение, если нас интересуют разбиение только на нечетные слагаемые. Тогда соответствующий ряд запишется в виде

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)...(1-x^5)...} \tag{4}$$

В частности, Эйлер исходит из очевидного тождества

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)... = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4}...$$

При этом каждый множитель $1-x^n$ в знаменателе при четном n сокращается с таким же множителем в числителе и в результате остается в точности произведение (4). Отсюда как бы "из ничего" вытекает теорема: число разбиений натурального числа на различные слагаемые, равно числу его разбиений на нечетные слагаемые (но не обязательно различные). Для $n = 6$ утверждение проверено в начале этого раздела.

Эйлер нашел способ вывести много аналогичных соотношений — более сложным путем, рассматривая ряды, содержащие кроме x и другую неизвестную. Я не буду на этом более подробно останавливаться, так как вопрос изложен в моей книге "Избранные главы алгебры", а глава, ему посвященная напечатана в номере 3-4 этого же журнала за 1998 г. Интересно все же отметить, что в связи с подобными вопросами Эйлер столкнулся с любопытным во многих отношениях произведением $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^n)$ и нашел для него красивое разложение в степенной ряд. Характерен способ, которым Эйлер нашел свой результат: он вычислил (указанным выше способом) представление этого произведения до 51-й (!) степени включительно. На этом основании он высказал общее предположение, но писал, что "это примечательное наблюдение я не могу еще доказать с геометрической строгостью". Доказательство своей гипотезы он действительно нашел — но, немного меньше, чем 10 лет спустя.

Интересно отметить связь всего этого круга вопросов с утверждением Ферма, интересовавшим Эйлера почти всю его жизнь: что каждое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел. Это утверждение было доказано Лагранжем еще при жизни Эйлера. Эйлер нашел другое, более простое доказательство и в связи с этим заметил, что самым естественным было бы доказательство того, что возведя в 4-ю степень ряд §, мы получил ряд, в котором все коэффициенты отличны от 0. Именно это и доказал Якоби — но уже в следующем веке, получив так же и формулу для числа таких представлений. А ряд, написанный Эйлером, лишь тривиальными слагаемым и множителем отмечается от "тэта-функции" — излюбленного объекта исследований Якоби. Интересно заметить, что таким же путем, что и Эйлер, шли в XX в. Харди и Лттльвуд, исследуя разбиения на более сложные слагаемые (например, простые). Однако, теперь они рассматривали ряд как функцию комплексного переменного x. В несколько завуалированной форме та же идея используется и в методе И.Л.Виноградова (в частности, при доказательстве того, что всякое достаточно большое нечетное число равно сумме трех простых чисел).

V. Суммы степеней натуральных чисел

Многие математики — предшественники Эйлера — занимались суммами степеней последовательных натуральных чисел, то есть суммами

$$S_n(k) = 1^k + 2^k + ... + (n-1)^k \tag{5}$$

Для этих сумм были открыты красивые формулы, связанные с интересной последовательностью чисел, которые Эйлер назвал "Бернуллиевыми числами". Естественно возникала мысль найти нелогичные выражения и для случая отрицательных значений k — тем более, что если $k = -s$ и $s > 1$, то сумма в формуле (5) сохраняет смысл, если ее распространить на все натуральные числа. Сейчас получающееся выражение обозначается через $\xi(n)$:

$$\xi(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ... \tag{6}$$

и, ряд в правой части сходится при $s > 1$, как очень легко проверить. Мы пользуемся обозначением $\xi(s)$ для этой суммы, введенной Рименом через 100 лет после работ Эйлера. Но как найти его значения? Например, чему равно $\xi(s)$, если $s = m$ — натуральное число. Простейший случай — значение $\xi(q)$ — интриговал тогда многих математиков. Например, Яков Бернулли писал, что, как он доказал, — это число весьма близко к 1". Эйлер нашел значение $\xi(q)$ с 20 десятичными знаками, а потом — и точное значение. Как писал Эйлер, оно "оказалось связанным с квадратурой круга". А именно, Эйлер привел рассуждения в пользу того, что $\xi(q) = \frac{\pi^2}{6}$. Тогда он был еще совсем молод (ему не было 30-ти лет) и этот результат, сообщенной им в письмах ряду математиков, сразу стал знаменит.

Поразителен тот путь, которым Эйлер пришел к своему результату. По-существу, Эйлер пользуется тем, что известно разложение в ряд функции $\sin x$ и решения уравнения $\sin x = u$ — они равны $\alpha_n = n\pi$ при целом n. Он предполагает, что ввиду этого функция $\sin x$ может быть представлена как произведение

$$\prod_{n\neq 0}\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \tag{7}$$

Тогда, рассуждая так, "как будто" имеем дело с многочленом, легко найти (он ссылается на формулы Ньютона), зная коэффициенты и корни, сумму квадратов его "корней". Это рассуждение вызвало ряд сомнений у его современников. Поразительно, что основные возражения были связаны не со смелым переносом на степенные ряды утверждений, относящихся к многочленам (хотя, с точки зрения современной теории аналитических функций то разложения функции $\sin x$ в произведение, которое предполагает верным Эйлер, связано с порядком роста $(\sin z)$ при $|z| \to \infty$). Основной вопрос заключался в том — почему рассматриваемая функция (например, $\sin x$), кроме "видимых" вещественных корней не имеет других мнимых"? Эйлер сам понимал, что это далеко не очевидно, хотя ссылаясь на совпадение его ответа с приближенным вычислением, писал: "поэтому я не колеблясь опубликовал этот результат, считая его безусловно верным".

Те же рассуждения, несколько усложненные, привели Эйлера к формулам для значения $\xi(n)$ для любого *четного* n: $\xi(n) = r_n\pi^n$, где r_n — некоторые рациональные числа, определенным образом связанные с числами Бернулли. Характер значения $\xi(n)$ при $n > 1$ и *нечетном* не ясен до сих пор. Единственный известный результат — доказательство того, что $\xi(3)$ иррационально (в 1978 г.). Сейчас доказано, что $\xi(n)$ иррационально для бесконечного числа нечетных чисел n, но конкретно можно утверждать, что это верно лишь для $n = 3$.

Проведение более убедительного доказательства своих формул заняло у Эйлера более 10 лет! Он нашел многочлены степени n, стремящиеся к $\sin x$ при $n \to \infty$ и, разлагая их на множители, обосновал разложение (7) для $\sin x$. Как он пишет, это доказывает, что рассматриваемые им функции "не имеют других корней, кроме видимых действительных".

VI. Аналитическая теория чисел

Так называется раздел теории числе, где некоторые свойства целых чисел доказываются при помощи привлечения методов анализа. В конце IV раздела мы указали некоторые такие результаты, восходящие к идеям Эйлера. Но большинство таких результатов относится к функции (5) впервые рассмотренной Эйлером. Им же были указаны некоторые свойства этой функции, игравшие впоследствии основную роль в ее исследованиях и приложениях.

Прежде всего, речь идет о так называемом функциональном уравнении для ξ-функции". Так называется соотношение, имеющее вид:

$$\xi(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(s-1)\xi(s) \tag{8}$$

Это соотношение кажется парадоксальным, если вспомнить, что $\xi(s)$ Эйлер определял рядом (5), который сходится лишь при $s > 1$, то время как аналогичный ряд, если в нем поставить $1-s$, то время как аналогичный ряд, если в нем поставить $1-s$ вместо s, расходится во всех возможных смыслах этого понятия. Но подобные соображения мало слушали Эйлера. Дальше я расскажу о пути, на котором Эйлер пришел к соотношению (8), чтобы читатели могли почувствовать стиль рассуждений.

Прежде всего, Эйлер установил соотношения (8) для тех значения s, для которых значение $\xi(s)$, а значит и всего выражения в провой части равенства (8) было ему известно — а именно, когда n — натуральное и четное число. Но это не снимает вопроса о сходимости — в данном случае, сходимости ряда $\xi(1-s)$. Чтобы можно было хоть в каком-то смысле сопоставлять ряды для $\xi(s)$ и $\xi(1-s)$, Эйлер вводит дополнительный параметр x и рассматривает ряды (для целого $s=n$) $\quad 1+4x+\frac{1}{2^m}x^2+\frac{1}{3^m}x^3+\ldots$, которые как легко показать, сходятся при $|x|<1$ и могут быть даже (в этой области значений x) представлены рациональной функцией от x и для них он устанавливает соотношение, которое при $x=1$ приводит к уравнению (8). (Надо предупредить читателей, что Эйлер рассматривает не ряд (5) для $\xi(s)$, ряд, задающий функцию, отличающегося от $\xi(s)$ некоторым тривиальным множителем — я пропускаю этот переход, чтобы не вводить лишних обозначений). Эйлер переходит от целых значений к произвольным в работе под названием "Замечания о красивой связи между рядами, связанными с прямым и обратными степенями". Это очень интересное и возможно. Еще не переосмысленное более поздними математиками исследование. Эйлера вообще привлекала задача построения аналитических функций $f(z)$, для которых значения в целых точках, то есть $f(n)$ совпадают с некоторой естественной последовательностью целых чисел. Конечно, функция $f(z)$ не определена тем, что известны ее значения $f(n)$ (например, $f(n)=0$ если $f(z)=\sin \pi z$), но для некоторых значений $f(n)$ Эйлер строит "естественное" продолжение $f(z)$. Так, он построил и изучил ту функцию, которую позже (по предложению Лежандра) стали обозначать $\Gamma(z)$ и для которой $\Gamma(n+1)=n!$. Именно она и входит в уравнение (8). А в первоначальном уравнении для натуральных четных значений n стояло $\left(\frac{n}{2}\right)!$ Кроме того, в уравнение входил некий множитель, равный $(-1)^{n/2}$, который Эйлер для любого s интерпретирует как $\cos\frac{\pi s}{2}$. Возможно, что Эйлер и сам считал, что в то эпоху его утверждение строилось на догадке. Во всяком случае, он говорит иногда о своих утверждениях как о "предположениях" и проверяет для некоторых значений s, а так же показывает, что тем же способом можно вычислить значения других рядов, в то время уже найденные иными методами. Но сейчас естественно напрашивается вопрос — не скрывается ли за "догадками" Эйлера некоторая теорема с точной постановкой вопроса и точным доказательством?

Кроме функционального уравнения (8) Эйлер нашел ряд других свойств функции $\xi(s)$. В частности, тождество, сейчас называемое "тождеством Эйлера", выражающее в аналитическом виде однозначность разложения целого числа в произведение простых чисел. Эйлер написал его только для натуральных значений s, но оно верно для любого $s>1$:

$$\xi(s)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{9}$$

где произведение в правой части распространено на все простые числа p. Эйлер исследовал и поведение $\xi(s)$ при $s\to 1$ и вывел из тождества (9), что ряд $\sum\frac{1}{p}$, распространенный на все простые числа, расходится. Это, конечно, дает совершенно новое доказательство бесконечности числа простых чисел, что подробнее изложено в моей уже цитированной книге (и напечатано в первом номере за 1998 г. этого журнала). Эйлер пишет так же, что порядок роста сумм ряда $\sum\frac{1}{p}$ равен логарифму порядка роста частных сумм гармонического ряда. Так как для последних сумм Эйлер знал, что они растут как $\ln N$, то для сумм $\sum\frac{1}{p}$ он получает порядок роста $\ln\ln N$ (где — обозначает натуральный логарифм).

Эйлер рассматривает так же ряды (сходящиеся, но не абсолютно), аналогичные $\xi(1)$, но распространенные на числа вида $4n+1$, $4n-1$, $3n+1$ или $3n-1$. Он находит их значения и указывает, что таким образом получается доказательство бесконечности числа простых чисел в этих арифметических прогрессиях. Ряды, которые он рассматривает, в теперешней терминологии — это L-ряды с характерами Дирихле. Именно таким путем Дирихле и доказал, уже в XIX в., бесконечность числа простых чисел, содержащихся в арифметической прогрессии вида $an+b$, если a и b взаимно просты.

Этот сжатый обзор не только не включает все работы Эйлера по теории чисел, но и далеко не все его важнейшие исследования в этой области. Все же, я надеюсь, что читатели по нему смогут почувствовать поразительные черты научного творчества Эйлера. Такие главные черты, как мне кажется, две:

1) Это необычайная смелость, с которой Эйлер опирается на аналогии, частные случаи и т.д. для того, чтобы сформулировать свое видение математического мира. Он отнюдь не пренебрегает логическим выводом своих результатов. В частности, по поводу найденного им функционального уравнения для ξ-функции, он пишет: "надо надеяться, что усилия для искания безупречного (perfaite) доказательства будут более успешными, так как несомненно, что это прольет свет на множество аналогичных исследований". Здесь чувствуется и то, что именно Эйлер ценил в "безупречном" доказательстве: не принудительную констатацию верности факта, но большее понимание всей области. Однако сам факт он страшился "увидеть" каким-то образом и для этого "видения" логическое рассуждение было таким же приемом, как аналогия, частные случаи и т.д. Пожалуй, самое удивительное — это то, как часто "видение" Эйлера не только подтверждалось логическим доказательством, но и оказывалось плодотворным для дальнейшего развития области. Рискну высказать предположение, что общим знаменателем его приемов исследования было некоторое эстетическое чувство, которое он отражал, говоря о "божественных" закономерностях.

2) Вторая черта, типичная для работ Эйлера — это необычайная широта его математических интересов. При этом он, видимо, все время держал в голове области, которыми когда-либо занимался и легко использовал идеи и приемы, возникшие в одной области — в другой, по видимости, с ней не связанной. Так что работы Эйлера часто трудно поддаются классификации — про них не легко сказать, к какой области они относятся: анализу, алгебре или теории чисел. Короче говоря, он воспринимал всю математику как одно поле исследования.

Не удивительно, что влияние Эйлера на развитие математики было колоссальным. Части (как, например, с выводом функционального уравнения для ξ-функции) его исследования много позже повторялись математиками, не имевшими представления о его достижениях, и только еще позже математики, интересующиеся так же историей своей науки, обращали внимание на то, насколько Эйлер опередил свое время. Но еще чаще его идеи воспринимались и продолжались его более молодыми современниками и последователями (например, Лагранжем или Гауссом). Как пишет в своей книге Вейль "ни один математик никогда не достигал такого положения неоспариваемого лидерства во всех ветвях математики". Его старый учитель Иоганн Бернулли назвал его "первым математиком" — "mathematicosum princeps". Этот термин в другие эпохи применялся и к другим математикам — например, к Гауссу. Но впервые так был назван Эйлер.

Шафаревич Игорь Ростиславович,
Академик РАН, профессор,
доктор физ.-мат. наук.

Листки по математическому анализу, 11 класс

Н. Н. Константинов

Завершаем публикацию листков Н. Н. Константинова по математическому анализу. По этим листкам проводились занятия в 11-м классе школы №179 г. Москвы. Сначала идут листки №№ 5 и 14 за 10 класс, которые по техническим причинам не вошли в предыдущую публикацию (“Математическое образование”, № 2(42), 2007 г.).

Листок 5, 03.09.2001

Начальные тесты. Теоремы об отрезке

Задача 1. Сформулируйте определение сечения в упорядоченном множестве M; что такое сечение первого, второго, третьего и четвертого типов?

Задача 2. Пусть M — множество рациональных чисел. Приведите примеры сечений первого, второго и третьего типов.

Задача 3. Докажите, что в множестве рациональных чисел не бывает сечений четвертого типа.

Задача 4. Докажите, что в множестве действительных чисел бывают сечения только первого и второго типов.

Задача 5. Сформулируйте определение колебания хвоста последовательности. Сформулируйте определение колебания последовательности на бесконечности.

Задача 6. Если последовательность имеет предел (числовой), то ее колебание на бесконечности равно 0.

Задача 7. Если колебание последовательности на бесконечности равно 0, то она имеет пределом некоторое число.

Задача 8. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

Задача 9. Для того, чтобы последовательность сходилась (то есть имела пределом некоторое число), необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Задача 10. Сформулируйте, что означает, что числовое множество M покрыто системой числовых множеств S.

Задача 11. Пусть M — множество рациональных чисел отрезка$[0, 1]$. Занумеруем множество M натуральными числами: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. n-ый элемент системы S есть интервал s_n с центром в точке r_n, имеющий длину $(1/2)^(n + 2)$. Докажите, что в этом примере нельзя из системы S выделить конечную подсистему S', которая является покрытием множества M.

Задача 12. Если отрезок числовой оси покрыт бесконечной системой интервалов, то из этой системы можно выделить конечную подсистему, которая также является покрытием отрезка.

Задача 13. Это можно сделать так, что никакие три интервала не будут иметь общей точки.

Задача 14. Определите множество действительных чисел с помощью сечений. (Определите сечения-близнецы, определите, какие сечения соответствуют рациональным числам, определите неравенства в области действительных чисел, определенных через сечения).

Задача 15. Докажите теорему о полноте, считая, что действительные числа определены с помощью сечений.

Листок 14, 21.01.2002

Непрерывность (продолжение)

В задачах 1 – 4 f и g — числовые функции, определенные на всей числовой оси. Докажите теоремы, сформулированные в этих задачах.

Задача 1. Если f и g непрерывны в точке a, то $f+g$ непрерывна в точке a (через $f+g$ обозначена функция h, которая определяется так: при каждом x ее значение $h(x)$ равно $f(x)+g(x)$).

Задача 2. Аналогичная задача для произведения функций.

Задача 3. Если f непрерывна в точке a, и $f(a)$ не равно 0, то в некоторой окрестности точки a определена функция $h(x)=1/f(x)$, и эта функция в точке a непрерывна.

Задача 4. Суперпозицией функций f и g называется функция h, которая определяется так: при каждом x $h(x)=f(g(x))$. Если g непрерывна в точке a, а f непрерывна в точке $g(a)$, то h непрерывна в точке a.

Задача 5 (дополнительная). Функция f, определенная на отрезке $[a,b]$, называется выпуклой вниз, если для любых чисел c и d, принадлежащих отрезку $[a,b]$, график функции f на отрезке $[c,d]$ не выше отрезка, соединяющего точки $(c,f(c))$ и $(d,f(d))$ (этот отрезок рассматривается как график линейной функции g, и требуется, чтобы при каждом x отрезка $[c,d]$ выполнялось неравенство: $f(x)\le g(x)$). Докажите, что выпуклая вниз функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[a,b]$.

Определение корня квадратного из двух

Напоминание: Произведение двух положительных действительных чисел a и b есть точная верхняя грань множества произведений вида $p\cdot q$, где p — положительное рациональное число, меньшее a, q — положительное рациональное число, меньшее b. Вместо произвольных положительных рациональных чисел p и q можно рассматривать десятичные приближения чисел a и b по недостатку; эти два определения произведения приводят к одному результату. Предполагается, что свойства арифметических действий с рациональными числами, включая свойства неравенств, известны.

Определение. Корнем квадратным из двух называется точная верхняя грань множества D положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше двух. (Конечно, следует доказать, что множество D непусто и ограничено сверху). Это число обозначим через d.

Задача 6. Умножим d само на себя по правилам умножения действительных чисел (см. Напоминание); полученное число обозначим через A. Докажите, что точная верхняя грань множества квадратов чисел множества D равна A.

Задача 7. Докажите, что $d^2\le 2$.

Задача 8 (вспомогательная). Докажите, что любой интервал действительной прямой содержит хотя бы один квадрат рационального числа.

Задача 9. Докажите, что $d^2=2$.

Листок 24, 10.09.2002

Теоремы о производной

Если, решая задачи этого листка, Вы ссылаетесь на ранее доказанные теоремы, вспоминайте, пожалуйста, доказательства этих теорем.

Задача 1. Пусть f — функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0 и имеющая производную в точке x_0. Тогда, если $f'(x_0)>0$, то существует такая окрестность J точки x_0, что для всякого x из J, отличного от x_0, из неравенства $x<x_0$ следует неравенство $f(x)<f(x_0)$, а из неравенства $x>x_0$ следует неравенство $f(x)>f(x_0)$.

Задача 2. Если f определена в некоторой окрестности точки x_0, имеет в точке x_0 левую и правую производные, левая производная положительна, а правая отрицательна, то точка x_0 есть точка локального максимума функции (то есть для любого x, принадлежащего некоторой, возможно, меньшей окрестности x_0 и отличного от x_0, $f(x)<f(x_0)$).

Задача 3. Пусть функция f определена и дифференцируема во всех точках некоторого интервала J числовой оси. Тогда если в точке $x_0 \in J$ f принимает максимальное значение (то есть для любого x, принадлежащего интервалу J и отличного от x_0, $f(x) < f(x_0)$), то $f'(x_0) = 0$.

Задача 4. Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а во внутренних точках дифференцируема, то внутри отрезка найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *(теорема Лагранжа)*.

Задача 5. Если f — функция, дифференцируемая на интервале и неубывающая, то $f'(x) \geq 0$ во всех точках интервала.

Задача 6. Если f — функция, дифференцируемая на интервале и во всех точках интервала $f'(x) \geq 0$, то f — функция, неубывающая на этом интервале.

Листок 25, 17.09.2002

Ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Рядом Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа называется формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + f^{(3)}x_0\frac{(x - x_0)^3}{6} + ... + f^{(n)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

где ξ лежит между x_0 и x.

Теорема. Если функция f n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то для всякого x из этой окрестности найдется такое число ξ, лежащее между x_0 и x, что верно вышенаписанное равенство.

В доказательстве, которое излагается ниже, используются:

1) интегрируемость непрерывной функции,

2) теорема: интеграл суммы равен сумме интегралов,

3) формула Ньютона-Лейбница,

4) формула для интеграла от показательной функции,

5) теорема о среднем: если функции f и g непрерывны и ограничены на некотором отрезке $[a, b]$ числовой оси, и f всюду положительна или всюду отрицательна, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(\xi)\int_a^b f(x)dx$$

6) формула Лагранжа: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, то есть теорема: если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то для всякого x из этой окрестности найдется такое число C, лежащее между x_0 и x, что верна эта формула. (То, что для каждого x найдется ξ, означает, что существует функция $\xi(x)$.)

Заметим, что эта формула есть частный случай формулы Тейлора при $n = 1$.

Задача 1. Напишите формулу Тейлора для функции $\sin x$ при $n = 4, 5$ и 6 и оцените погрешность вычисления этой функции по этой формуле при $x \in [0,1]$ (т.е. x — угловая мера в радианах).

Задача 2. Аналогичная задача для функции $\cos x$.

Листок 26, 17.09.2002

Доказательство формулы Тейлора

К $(n-1)$-й производной функции f применима формула Лагранжа:

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(\xi(x))(x - x_0).$$

Заметим, что эта формула есть формула Тейлора для $(n-1)$-й производной нашей функции f.

Про функцию $\xi(x)$ трудно сказать что-либо хорошее, но тем не менее $f^{(n)}(\xi(x))$ — непрерывная функция, что следует из самой формулы Лагранжа:

$$f^{(n)}(\xi(x)) = (f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0))/(x - x_0).$$

Теперь заменим в этой формуле x на t (чтобы не запутаться в переменных) и возьмем определенный интеграл от обеих частей равенства в пределах от x_0 до x; получим:

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x_0) + f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n)}(\xi(t))(t - x_0)dt.$$

Интеграл в этой формуле преобразуем по теореме о среднем:
$\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n)}(\xi(t))(t - x_0)dt = f^{(n)}(\xi(\tau))\frac{(x-x_0)^2}{2}$, где τ — некоторая точка, лежащая между x_0 и x, а тем самым $\xi(\tau)$ — некоторая точка, лежащая между x_0 и x; обозначим ее через $\xi_1(x)$. Итак, получилась формула Тейлора для $(n-1)$-й производной:

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x_0) + f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0) + ... + f^{(n)}(\xi_1(x))\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Далее действуем по индукции. Все шаги аналогичны изложенному. Интегрируя от x_0 до x обе части равенства

$$f^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0) + f^{(k+1)}(x_0)(t - x_0) + ... + f^{(n)}(\xi_j(t))\frac{(t - x_0)^{n-k}}{(n - k)!}$$

(через j обозначено число $n - k - 1$), получаем формулу:

$$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_0) + f^{(k)}(x_0)(x - x_0) + ... + f^{(n)}(\xi_{j+1}(x))\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n - k + 1)!}$$

Проделав шаг индукции $n - 1$ раз, получим искомую формулу.

Листок 27, 10.10.2002

Поле направлений, интегральная линия и уравнение колебаний

Говорят, что на плоскости задано векторное поле, если каждой точке плоскости поставлен в соответствие вектор. Если нас не интересует величина вектора, а только его направление, то будем говорить, что задано поле направлений (в точке, которой поставлен в соответствие нулевой вектор, направление не задано). Что такое “направление”? Пусть на плоскости нарисована мерная окружность (компас). “Направлением” называется диаметр этой окружности.

Задача 1. Точке (x, y) поставлен в соответствие вектор $\{x, y\}$. Нарисуйте соответствующее поле направлений (нарисуйте маленькие отрезки, исходящие из каждой точки плоскости, кроме начала координат). Нарисуйте интегральные линии этого поля направлений, то есть такие линии, для каждой точки которых касательная лежит на той же прямой, что и нарисованный Вами отрезок.

Задача 2. Аналогичное задание для векторного поля $\{y, -x\}$.

Задача 3. Для векторного поля $\{y, -x\}$ найдите такие функции времени $x(t)$, $y(t)$, что $\{\dot{x}, \dot{y}\} = \{y, -x\}$. Из этих функций выберите такую пару функций $x(t)$, $y(t)$, что $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Задача 4. Покажите, что векторному полю $\{py, -px\}$ соответствует движение по тем же кривым, что и в предыдущей задаче, только с другой скоростью. С какой именно?

Рассмотрим уравнение колебаний маятника без трения: $\ddot{x} = -kx$ (x — отклонение точки от положения равновесия, $\dot{x}$ — скорость, $\ddot{x}$ — ускорение точки). Введем вспомогательную переменную $y = \dot{x}$. Рассмотрим плоскость вспомогательных переменных x и y. Пусть центр маятника движется (так, что выполняется уравнение маятника). При этом движении вырисовывается кривая на вспомогательной плоскости. Скорость движения точки по этой кривой имеет проекции

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = \{y, -kx\}$$

В случае $k = 1$ получилось векторное поле задачи 2. В этом случае мы знаем, как написать закон пути (см. задачу 4).

С произвольным $k > 0$ можно справиться двумя способами:

1) Введем новые переменные: $u = ax, v = y$.

Задача 5. Подберите a так, чтобы в новых переменных получилось векторное поле задачи 4. Напишите закон пути для уравнения колебаний без трения с произвольным k.

2) Изменим масштаб времени: $t = c\tau$. Положим $u(\tau) = x(c\tau)$, $v(\tau) = \dot{u}(\tau)$ (точка над u означает дифференцирование по τ).

Задача 6. Подберите такое c, чтобы для функций u и v выполнялись равенства: $\{\dot{u}, \dot{v}\} = \{v, -u\}$. Напишите закон пути для уравнения колебаний без трения с произвольным k.

Листок 28, 17.10.2002

Некоторые графики

Задача 1 (вспомогательная). Докажите, что если два вектора заданы декартовыми координатами: $\bar{a} = \{x_1, y_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2\}$, то скалярное произведение можно вычислить по формуле: $(\bar{a}, \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Напоминание: скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Подсказка к задаче: воспользуйтесь формулой: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Задача 2. Докажите, что график функции $f(x) = a \cdot \sin x + \cos x$ получается из графика $\sin x$ растяжением (сжатием) по оси y и сдвигом по оси x.

Четыре определения эллипса.

1) Эллипс есть кривая, которая получается из окружности равномерным растяжением (сжатием) плоскости по некоторому направлению.

2) Эллипс есть кривая, по которой прямой круговой цилиндр пересекается с плоскостью, не параллельной его образующей.

3) Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек постоянна (эти две точки называются фокусами эллипса).

4) Эллипс есть кривая, по которой прямой круговой конус пересекается с плоскостью, при условии, что эта кривая есть простая замкнутая линия.

Задача 3. Покажите, что эквивалентны определения 1) и 2).

Задача 4. Покажите, что эквивалентны определения 2) и 3).

Подсказка: впишите в цилиндр два шара, касающихся секущей плоскости.

Задача 5. Покажите, что эквивалентны определения 3) и 4).

Листок 29, 12.11.2002

Самостоятельная работа

Задача 1. Число x изменилось не более, чем на 0,1. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10?

Задача 2. Тот же вопрос для функции $\sqrt{x}$.

Задача 3. Что больше: $(1{,}000001\ )^{1000000}$ или 2 ?

Задача 4. Найдите наименьшее значение функции $5a + \frac{4}{a}$ при $a > 0$. При каком a оно достигается?

Листок 30, 19.11.2002

Изучение параболы

Задача 1. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ пересекается с некоторой прямой l в двух точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Найти такое значение x, при котором $f'(x)$ равно угловому коэффициенту прямой l (выразить ответ через x_1 и x_2).

Задача 2. Сколько точек пересечения имеют графики функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = (x-b)^2+c$ в зависимости от параметров b и c?

Задача 3. Сколько общих точек могут иметь график функции $y = x^2$ и окружность радиуса r при различных расположениях окружности? Указать все варианты ответа и доказать, что других нет.

Задача 4. При каких r график параболы $y = x^2$ и окружность, удовлетворяющая уравнению $x^2 + (y-r)^2 = r^2$, имеют ровно одну общую точку?

Неравенства.

Задача 5 (дополнительная). Пусть x, y и z — любые числа из интервала $(0, \pi/2)$. Докажите неравенство:

$$\frac{x\cos x + y\cos y + z\cos z}{x+y+z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}.$$

Листок 31, 03.12.2002

Самостоятельная работа по тригонометрии

Задача 1. Найдите сумму $\cos 1^\circ + \cos 41^\circ + \cos 81^\circ + \cos 121^\circ + \cos 161^\circ + \cos 201^\circ + \cos 241^\circ + \cos 281^\circ + \cos 321^\circ$.

Задача 2. Найдите сумму $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$.

Задача 3. Найдите сумму $\sin(a + x) + \sin(a + 2x) + ... + \sin(a + nx)$.

Самостоятельная работа по стереометрии

Задача 4. Все плоские углы трехгранного угла α — прямые. Осью такого угла назовем прямую L, при повороте вокруг которой на 120° угол α совмещается с самим собой. Пусть O — точка прямой L, лежащая внутри угла α на расстоянии 1 от его вершины. Трехгранный угол (β получается симметричным отражением угла α относительно точки O. Найдите объем пересечения внутренних областей угла α и угла β.

Задача 5. Существует ли тело, проекция которого на плоскость xOy есть круг, а проекции на плоскости yOz и xOz — квадраты, не равные друг другу?

Задача 6. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка a и b, не меняя при этом своей длины. Докажите, что объем тетраэдра, имеющего эти два отрезка своими ребрами, при этом не изменяется.

Задача 7. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра (не обязательно правильного), делит его объем пополам.

Листок 32, 24.12.2002

Самостоятельные работы

Задача 1. p и q суть все корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найдите p и q.

Задача 2. p и q удовлетворяют уравнению $x^2 + px + q = 0$. Найдите p и q.

Задача 3. Докажите неравенство ($n > 2$):

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

Задача 4. a, b, c и d — положительные числа. Докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d.$$

Задача 5. a_1, a_2, ... , a_n — положительные числа, $n \geq 2$. Докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_2^n}{a_1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Задача 6. Докажите без помощи таблиц, что $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

Задача 7. Все стороны пространственного четырехугольника (четырехзвенной замкнутой ломаной в пространстве) касаются некоторой сферы. Докажите, что все четыре точки касания лежат в одной плоскости.

Задача 8. r — рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, причем $a_0 = 1$. Докажите, что r — целое число.

Задача 9. Существенно ли в предыдущей задаче условие $a_0 = 1$?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'CD'$ проведены диагонали AC, AB' и BC'. Докажите, что $\rho(AC, BC') = \rho\ (AB', BC')$.

Задача 11. Какой наибольший круг можно вложить в куб с ребром a?

Листок 33, 14.01.2003

Самостоятельные работы (задачи с 1 по 6 и с 7 по 9).

Задача 1. Докажите, что натуральное число может быть представлено как сумма квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда оно есть среднее арифметическое квадратов некоторых двух целых чисел.

Задача 2. В тетраэдре основание высоты, опущенной из некоторой вершины на противоположное основание, совпадает с точкой пересечения высот этого основания. Докажите, что этим же свойством обладают остальные три вершины тетраэдра.

Задача 3. Может ли случиться, что свет звезды загорожен от всех дальних наблюдателей четырьмя непрозрачными шарообразными планетами? (“Дальние наблюдатели” — это те, которые расположены вне некоторой фиксированной сферы. В задаче спрашивается о чисто геометрической возможности; законы физики игнорируются).

Задача 4. Медиана разделила треугольник на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Радиусы окружностей — r_1, и r_2. Может ли случиться, что $r_1 = 2r_2$?

Задача 5. Из некоторой внутренней точки O треугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Оказалось, что длины их (от точки O до основания) пропорциональны длинам сторон, на которые они опущены. Будем считать каждый такой перпендикуляр вектором — направленным отрезком, начинающимся в точке O и заканчивающимся в его основании. Докажите, что сумма этих векторов равна 0.

Задача 6. Из некоторой внутренней точки O тетраэдра опущены перпендикуляры на его грани. Оказалось, что длины их (от точки O до основания) пропорциональны площадям граней, на которые они опущены. Будем считать каждый такой перпендикуляр вектором — направленным отрезком, начинающимся в точке O и заканчивающимся в его основании. Докажите, что сумма этих векторов равна 0.

Физическое решение задачи 6. Надуем тетраэдр. Давление на каждую грань есть вектор, перпендикулярный грани и пропорциональный ее площади. Тетраэдр никуда не полетит. Значит, сумма этих векторов равна 0.

Задача 7. Имеется два трехлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л 2-процентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить 1,5-процентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Задача 8. На ребрах произвольного (не обязательно правильного) тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных шести векторов оказаться равной нуль-вектору?

Задача 9. Выпуклой фигурой F нельзя накрыть полукруг радиуса R. Может ли случиться, что двумя фигурами, равными F, можно накрыть круг радиуса R? А если взять невыпуклую фигуру F? (Напоминание: фигура называется выпуклой, если для любых двух ее точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком входит в фигуру.)

Листок 34, 04.02.2003

Самостоятельные работы (28, 30 января)

Задача 1. $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые. Известно, что $p(a) - p(b) = 1$. Докажите, что $|a - b| = 1$.

Задача 2. Существуют ли такой шар и такая треугольная пирамида, что всякая плоскость, параллельная плоскости xOy, пересекает их по фигурам одинаковой площади?

Задача 3. Муха летит из точки с декартовыми прямоугольными координатами $(0, 0, 0)$ в точку с координатами $(3, 8, 12)$, причем ее путь состоит из конечного числа прямолинейных участков, каждый из которых имеет направление одного из векторов: $\{1, 1, 0\}$, $\{0, 1, 1\}$ и $\{1, 1, 1\}$ (на каждом таком участке движение не просто параллельно соответствующему вектору, но имеет ту же ориентацию, что и этот вектор). Найдите длину пути.

Новая самостоятельная работа

Задача 4. p и q — квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней. Может ли случиться, что минимум функции $\frac{p(x)}{q(x)}$ достигается в точке $\sqrt{2}$?

Задача 5. Известно, что натуральное число n — не степень двойки. Докажите, что число $2^n + 3^n$ составное.

Задача 6. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на ребрах этого многогранника?

Задача 7. Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha < \pi$. Из некоторой внутренней точки угла выпущен луч, который, в зависимости от величины α, может после одного или нескольких отражений уйти в бесконечность, или (при маленьких значениях α) навсегда застрять между зеркалами. Изучите поведение луча при $\alpha \in (0, \pi)$.

Листок 35, 11.02.2003

Производные и графики

В задачах 1-3 требуется нарисовать эскиз графика функции и дать описание ее характерных свойств: указать область определения, свойства симметрии (четность, нечетность), ограниченность, максимумы, минимумы, участки монотонности (строгой и нестрогой), асимптоты (вертикальные, наклонные и горизонтальные).

Задача 1. $y = (\operatorname{arctg} x)^2$.

Задача 2.$y = \arcsin(\sin x)$.

Задача 3. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

Задача 4. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 5 (дополнительная). Какие из приведенных теорем верны? (Верные доказать, неверные опровергнуть).

5а) Если функция f определена на интервале $J = (a, b)$, дифференцируема на J, и всюду на J $f'(x) > 0$, то f строго возрастает на J.

5б) Если функция f определена на интервале $J = (a, b)$, дифференцируема на J, и всюду на J $f'(x) \geq 0$, то f строго возрастает на J.

5в) Если функция f определена на интервале $J = (a, b)$, дифференцируема на J, и строго возрастает на J, то всюду на J $f'(x) > 0$.

5г) Если функция f определена на интервале $J = (a, b)$, дифференцируема на J, и строго возрастает на J, то всюду на J $f'(x) \geq 0$.

Листок 36, 18.02.2003

Правило Лопиталя — 4 варианта

1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, производные функций f и g в некоторой окрестности точки a существуют, и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует (в том числе, быть может, бесконечный), то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

существует в том же смысле и эти пределы равны.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, то ... (дальше как в пункте 1).

3. Как в пункте 1, только вместо a плюс или минус бесконечность.

4. Как в пункте 2, только вместо a плюс или минус бесконечность.

Доказательство варианта 1. При вычислении $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ значения функций f и g в точке a не играют роли, поэтому имеем право доопределить эти функции условием: $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. Чтобы говорить о $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ нужно, чтобы в некоторой окрестности точки a функция g не обращалась в нуль. Имеем право применить формулу конечных приращений: для каждого x найдется ξ $(0 < \xi < x)$ такое, что $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Когда $|x-a| < \varepsilon$, тогда подавно $|\xi - a| < \varepsilon$, поэтому $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Исследование графиков (включая все виды ассимптот).

Задача 1. $y = \log x$. **Задача 2**. $y = x\log x$. **Задача 3**. $y = x\sin\frac{1}{x}$.
Задача 4. $y = x^2\sin\frac{1}{x}$. **Задача 5**. $y = \frac{e^x-1}{x}$.

Листок 37, 04.03.2003

Вычислить производные во всех точках, где они существуют, используя определение производной, правила дифференцирования и таблицу производных.

Контрольная работа 25 февраля 2003 г.

1. $y = tg\frac{x}{2} - ctg\frac{x}{2}$.
2. $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.
3. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$.
4. $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$.
5. $y = x(1+\sin|x|)$.

Контрольная работа 4 марта 2003 г.

Вариант 1:
1. $y = \ln tg\frac{x}{2}$.
2. $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.
3. $y = arctg\frac{1+x}{1-x}$.
4. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

Вариант 2:
1. $y = x + x^x + x^{x^x}$.
2. $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.
3. $y = arctg(x+\sqrt{1+x^2})$.
4. $y = \sqrt[x]{x}$.

Вариант 3:
1. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.
2. $y = \sin^n x \times \cos nx$.
3. $y = arctg\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.
4. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$.

Вариант 4:
1. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.
3. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.
4. $y = \ln^3 x^2$.

Листок 38, 01.04.2003

Экстремумы функций одного переменного

Задача 1. Исследуйте график функции $y = \ln x + \frac{1}{x}$ (найдите для данной формулы область допустимых значений x, исследуйте предельное поведение, наличие асимптот, ограниченность, найдите экстремумы).

Задача 2. Снаряд выпущен со скоростью V под углом α к горизонту. При каком α дальность полета снаряда будет максимальна? (Сопротивлением воздуха пренебречь.)

Задача 3. При каких значениях параметра а функция $y = x^2 - a^2\sin^2 x$ имеет единственный экстремум?

Задача 4. Сколько точек экстремума имеет функция предыдущей задачи при $a = 10$? Нарисуйте эскиз графика функции.

Задача 5 (дополнительная). Почему ведра делают обычно в форме усеченного конуса?

Листок 39, 24.04.2003

Самостоятельные работы по геометрии

Задача 1. Построить три окружности, попарно касающиеся в трех данных точках плоскости.

Задача 2. Даны окружность Ω и точка O. Для прямой l, проходящей через точку O и пересекающей окружность Ω в точках A и B (быть может, совпадающих) берем произведение $OA \times OB$. Докажите, что это произведение не зависит от выбора прямой l (тем самым произведение $OA \times OB$ есть функция только окружности Ω и точки A; обозначим эту функцию через $P(\Omega, A)$).

Задача 3. Даны две окружности M и N. Найдите геометрическое место точек X таких, что $P(M, X) = P(N, X)$ (см. предыдущую задачу).

Задача 4. Даны две окружности M и N. Найдите геометрическое место точек X таких, что касательные, проведенные из точки X к этим окружностям, равны между собой.

Задача 5. Даны три попарно пересекающиеся окружности, для каждых двух рассматривается прямая, содержащая их общую хорду. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Задача 6. Верно ли аналогичное утверждение в пространстве (даны три попарно пересекающиеся сферы, для каждых двух берется плоскость, содержащая их общий круг, для каждой пары таких плоскостей рассматривается их общая прямая, утверждается, что эти три прямые имеют общую точку)?

Задача 7. Докажите, что для трех окружностей три геометрических места, определяемых в задаче 3 для каждой пары из них, пересекаются в одной точке.

Задача 8. Бывает ли так, что разносторонний треугольник разрезан прямой на два равных треугольника?

Листок 40, 13.05.2003

Итоговая самостоятельная работа за 4-ю четверть

Задача 1. На графике функции $y = 3 - 1,5 \cdot x^2$ укажите точки, расстояние от которых до начала координат наименьшее, и найдите это расстояние.

Задача 2. Отрезок $[A, B]$ включается в множество P, если точка A принадлежит оси x, точка B — оси y, и сам отрезок проходит через точку $M(1, 8)$. Найдите в множество P наименьший отрезок, определите его длину и координаты концов.

Задача 3. Рассматривается интеграл: $\int\limits_1^y \frac{1}{x}dx$ ($y > 0$; напоминание: при $y < 1$ $\int\limits_1^y = -\int\limits_y^1$). Докажите, что $\int\limits_1^y \frac{1}{x}dx = \int\limits_a^{ay} \frac{1}{x}dx$ при $a > 0$.

Задача 4. Функция φ определена формулой $\varphi(y) = \int\limits_1^y \frac{1}{x}dx (y > 0)$.

Докажите, что $\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \varphi(y_1 y_2)$.

Задача 5. Подграфиком функции $y = f(x)$, определенной на множестве G, называется множество точек плоскости, определяемых условиями: x принимает все значения из множества G, а при каждом x принимает все значения, удовлетворяющие условию: $0 < y < f(x)$. Докажите, что если f положительная функция, определенная на отрезке, и ее производная на этом отрезке всюду существует и убывает, то подграфик этой функции есть выпуклое множество (напоминание: множество называется выпуклым, если из того, что точки A и B входят в множество, следует, что и весь отрезок $[A,B]$ входит в множество).

Старая самостоятельная работа

Задача 6. A, B, C, D — вершины тетраэдра, M — точка пространства. Известны четыре числа: расстояния от M до вершин тетраэдра. Докажите, что точка M определяется этими четырьмя числами, то есть нет второй точки, расстояния от которой до точек A, B, C и D — те же самые.

Листок 41, 20.05.2003

Вокруг теоремы Хелли

Задача 1 (теорема Хелли). Если конечная система выпуклых множеств плоскости обладает тем свойством, что любые три множества этой системы имеют общую точку, то все множества этой системы имеют общую точку.

Задача 2. Верно ли утверждение предыдущей задачи для бесконечной системы выпуклых множеств?

Задача 3. Конечная система точек плоскости обладает тем свойством, что для каждых трех точек этой системы найдется открытый круг радиуса единица, которому эти три точки принадлежат. Докажите, что тогда найдется открытый круг радиуса единица, которому принадлежат все точки этой системы.

Задача 4. Верно ли утверждение предыдущей задачи, если заменить открытые круги на замкнутые?

Задача 5. Верны ли утверждения предыдущих двух задач для бесконечной, в частности счетной, системы точек?

Задача Менелая

Задача 6. Если конечное множество M точек плоскости обладает тем свойством, что не существует прямой, проходящей ровно через две его точки (то есть если прямая проходит через две точки множества M, то на этой прямой найдется еще хотя бы одна точка из M), то все точки М принадлежат одной прямой.

Задача 7 (проективно двойственная задача). Если конечное множество M прямых на плоскости обладает тем свойством, что не существует точки, через которую проходят ровно две прямые (то есть если через точку проходят две прямые множества M, то найдется еще хотя бы одна прямая из M, проходящия через эту точку) то все прямые M проходят через одну точку.

Проективная плоскость

Проективная плоскость получается из обычной плоскости добавлением “идеальных” элементов:

1. Бесконечно удаленной точкой называется пучок параллельных прямых обычной плоскости.
2. Бесконечно удаленной прямой называется множество бесконечно удаленных точек.

Говорят, что бесконечно удаленная точка (пучок параллельных прямых) принадлежит обычной прямой, если прямая входит в этот пучок.

Задача 8. Проверьте для проективной плоскости две аксиомы:

1) Для каждых двух точек найдется ровно одна прямая, которая их содержит.
2) Для каждых двух прямых найдется ровно одна точка, которую они содержат.

Константинов Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный руководитель Экспериментальной
школы №179 г. Москвы,
преподаватель математического анализа.

О проблемах Гильберта (комментарий неофита для неофитов)

А. И. Рубинштейн

Статья представляет собой первоначальное введение в круг проблем Гильберта, оказавших значительное влияние на развитие математики в двадцатом столетии. Для удобства читателей в конце каждого раздела, посвященного одной из проблем, приводится соответствующий список литературы.

Светлой памяти моей жены Инны Владимировны, у больничной постели которой написана эта работа

С 6 по 12 августа 1900 года в Париже проходил II Международный Конгресс математиков. 8-го августа на совместном заседании секций истории и библиографии математики и преподавания и методологии математики выдающийся немецкий математик Давид Гильберт выступил с докладом «Математические проблемы». В нём он сформулировал 23 задачи, которые, по его мнению, являются важными для развития математики и решение, или попытки решения, которых весьма желательны для математики XX века. Приведём слова Гильберта. «Чтобы представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем, мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука, и решения которых мы ждем от будущего. Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным. Ведь большие даты не только заставляют нас оглянуться на прошедшее, но и направляют нашу мысль в неизвестное будущее.»

С позиций математики начала XXI века можно по-разному относиться к оценке важности для математики сформулированных Гильбертом задач (многие поставлены не самим Гильбертом, а известнейшими математиками XVIII–XIX веков Л. Эйлером, К. Гауссом, Б. Риманом, Г. Кантором, Г. Дарбу, С. Ли — список можно продолжить) и их решению. Но безусловно «проблемы Гильберта» являются явлением математической культуры, быть может, культуры общечеловеческой.

В 1969 году в издательстве «Наука» была издана книга «Проблемы Гильберта», содержащая как перевод текста доклад 1900 года, так и комментарии к каждой проблеме, написанные блестящими специалистами. Но именно высокий уровень комментариев часто делает их малопонятными даже для человека с университетским математическим образованием. Поэтому автор и предпринял попытку (удачную ли?) написать предлагаемый комментарий «неофита для неофитов».

В заключение краткого введения хотелось бы привести заключительные слова доклада Д. Гильберта — свидетельство страстной любви к нашей прекрасной науке:

> …математика — основа всего точного естествознания. А для того, чтобы в совершенстве выполнить это высокое назначение, пусть в грядущем… она обретёт гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением, приверженцев.

Проблема № 1. Проблема континуума

Существует ли множество мощности, промежуточной между мощностью счетного множества — мощностью множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, и мощностью континуального множества — множества действительных чисел $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$?

Проблема сформулирована Георгом Кантором (1845–1918) в форме: всякое бесконечное множество действительных чисел, не являющееся счетным, имеет мощность континуума.

Первые работы по теории множеств принадлежали Больцано, Дюбуа-Реймону, Дедекинду и были посвящены числовым множествам и множествам функций. Г. Кантор в работах 1879–1897 годов начал рассматривать множества элементов произвольной природы. В 1871–1883 годах он построил почти современную теорию кардинальных и порядковых чисел и теорию вполне упорядоченных множеств.

Несколько предварительных замечаний. Множества $\mathbb{A} = \{a\}$ и $\mathbb{B} = \{b\}$ элементов произвольной природы называются *равномощными*, или *эквивалентными*, что обозначается $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $a \leftrightarrow b$. Например, $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, 9\} \sim \mathbb{B} = \{11, 12, \dots, 19\}$, так как $1 \leftrightarrow 11$, $2 \leftrightarrow 12$, $\dots$, $9 \leftrightarrow 19$. Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда состоят из одного числа элементов. Число элементов конечного множества и есть его мощность $|\mathbb{A}|$. Для бесконечных множеств картина иная: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \sim \mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \dots\}$, так как можно установить взаимно однозначное соответствие: $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$, $\dots$ Таким образом оказывается, что множество $\mathbb{N}$ эквивалентно *своей части* — собственному подмножеству. Это можно принять за определение бесконечного множества.

Ещё примеры: $(a; b) \sim (c; d)$, так как $x \in (a; b) \leftrightarrow y = c + \frac{d-c}{b-a}(x - a) \in (c; d)$; $(0; 1) \leftrightarrow (-\infty; +\infty)$, так как $x \in (0; 1) \leftrightarrow y = \operatorname{tg} \pi(x - \frac{1}{2}) \in (-\infty; +\infty)$.

Кантор доказал два замечательных факта:

1) счетное объединение счетных множеств счетно, т. е. если $\mathbb{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, \dots\} \sim \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$ и $\mathbb{A} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_n$, то $\mathbb{A} \sim \mathbb{N}$;

2) множество $\mathbb{A} = \{a\}$ чисел $0 < a < 1$, т. е. $(0; 1) \sim (-\infty; +\infty)$ не является счетным (1874 год). В доказательстве применён «канторов диагональный процесс».

Сам Кантор обнаружил в теории множеств парадоксы. О первом он в 1895 году сообщил в письме к Гильберту (этот же парадокс через два года описал итальянский математик Бурали-Форти. О втором — в письме Дедекинду в 1899 году. В 1905 году Б. Рассел обнаружил ещё один парадокс, который так изложил в популярной форме: деревенский парикмахер бреет всех тех и только тех бородачей в деревне, которые не бреются сами. У него борода. Что ему с собой делать: Если он побреется, то как бреющийся сам, не должен этого делать. Если же он не будет бриться, то опять нарушит предписание.

Появление парадоксов в теории множеств приводило к сомнению в ценности этой теории и вызывало вопрос: не придём ли к противоречию в классических математических теориях, например в геометрии или арифметике. Для выяснения этого Гильберт предложил использовать аксиоматизацию теорий и доказательство их непротиворечивости «надежными» средствами, получившими название «гильбертова финитизма». Математические предложения и логические законы записываются в виде формул (слов), без использования обычного языка. Из этих формул по строго определённым «правилам вывода» конструируются новые формулы. Непротиворечивость теории сводится к доказательству того, что, используя правила вывода, из заданных аксиом нельзя получить формулу, изображающую отрицание какой-либо другой формулы. Гильберту и его ученикам удалось доказать непротиворечивость некоторых частных теорий, включающих часть арифметики.

Для доказательства непротиворечивости теории множеств прежде всего требовалось её аксиоматизировать. Первый пример подобной аксиоматизации предложил в 1908 году Э. Цермело. Приведём эту систему аксиом (несколько уточнённую).

I. *Аксиома объёмности.* Если множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ составлены из одних и тех же элементов, то они совпадают.

II. *Аксиома существования пустого множества.* Существует множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента.

III. *Аксиома суммы.* Для каждого семейства множеств $\mathcal{A}$ существует множество $\mathbb{S}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству $\mathbb{X}$ из семейства $\mathcal{A}$.

IV. *Аксиома степени.* Для каждого множества $\mathbb{A}$ существует семейство множеств $\mathcal{P}$, элементами которого являются все подмножества множества $\mathbb{A}$ и только они.

V. *Аксиома бесконечности.* Существует такое семейство множеств $\mathcal{A}$, которому принадлежит $\varnothing$ и если $\mathbb{X} \in \mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ найдется элемент $\mathbb{Y}$, состоящий из всех элементов множества $\mathbb{X}$ и самого множества $\mathbb{X}$.

VI. *Аксиома выбора* (Э. Цермело, 1904). Для каждого семейства $\mathcal{A}$ непустых непересекающихся множеств существует множество $\mathbb{B}$, имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств $\mathbb{X}$, принадлежащих $\mathcal{A}$.

Аксиома выбора принимается не всеми математиками из-за её неэффективности: не даётся никакого способа определения множества $\mathbb{B}$. Такого мнения придерживались Пеано, Борель, Лебег. В то же время Хаусдорф и Френкель её безоговорочно принимали.

Аксиома выбора действительно приводит к парадоксальным результатам. Например, в 1924 году Банах и Тарский с её помощью доказали, что *любые два ограниченных тела, хотя бы и разных объёмов, конгруэнтны при конечном разбиении.* Позднее было показано, что *любой шар является объединением пяти непересекающихся множеств, из которых, после соответствующих параллельных переносов и поворотов, получаем два непересекающихся шара, каждый из которых конгруэнтен исходному.* Разумеется, приписать указанным множествам какую-либо разумную меру (объём) нельзя. Естественно, множества не описываются — доказательство в чистом виде является доказательством существования подобных множеств. Ещё одно утверждение, полученное с помощью аксиомы выбора. В 1914 году Мазуркевич доказал, что *существует множество точек плоскости такое, что всякая прямая на плоскости пересекается с ним точно в двух точках.*

Вместе с тем без аксиомы выбора нельзя доказать, например, что *любое* бесконечное множество содержит счетное подмножество. Далее, с помощью аксиомы выбора Цермело доказал, что *любое* множество можно вполне упорядочить, т. е. каждое его подмножество будет иметь первый элемент.

Для формулировки последней аксиомы теории множеств необходимо дать несколько определений.

Высказыванием называется то, относительно чего можно установить *истинно оно*, или *ложно*. Например, $2 \times 2 = 4$ — истинное высказывание, а $2 \times 2 = 5$ — ложное.

Высказывательной функцией называется выражение, содержащее *предметные переменные*, которое превращается в высказывание при подстановке на место этих переменных *названий произвольных элементов.*

Например, высказывательными функциями будут $x > 0$, $x^2 < 5$, x — пустое множество. Высказывание $1 > 0$ — истинное, $3^2 < 5$ — ложное, множество простых чисел — пустое — ложное.

VII$_\Phi$ *Аксиома замены для высказывательной функции* Φ (Френкель, 1922. См. также Сколем, 1922, Мириманов, 1917). Если для каждого x существует единственный элемент y, что выполняется $\Phi(x, y)$, то для каждого множества $\mathbb{A}$ существует множество $\mathbb{B}$, состоящее из тех и только тех элементов y, которые при некотором $x \in \mathbb{A}$ выполняют $\Phi(x, y)$.

Очевидно, что под номером VII содержится не одна аксиома, а бесконечное множество аксиом — своя для каждой функции Ф.

Таким образом, система аксиом I–VII (система аксиом Цермело – Френкеля, Z–F) не является конечной. В 1960 году Р. Монтэгю показал, что конечной системой аксиом в теории множеств обойтись нельзя.

В 1940 году К. Гёдель доказал, что континуум-гипотеза Кантора совместима с системой аксиом Цермело – Френкеля: *если нет множества промежуточной мощности между счетной и континуальной, то к противоречию при системе Z–F не придём.*

Наконец, 1963 году П. Дж. Коэн показал, что и наличие множества промежуточной мощности не приведёт к противоречию.

Следует заметить, что непротиворечивость самой системы аксиом Цермело – Френкеля не установлена.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий А. С. Есенина-Вольпина к первой проблеме. С. 67–82).

[2] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

[3] Серпинский В. О теории множеств. М.: Просвещение, 1966.

[4] Демидов С. С. Проблемы Гильберта. М.: Знание, 1969.

[5] Демидов С. С. Математические проблемы Д. Гильберта и математика XX века. // Историко-математические исследования, вторая серия, Вып. 6(41), М.: Янус-К, 2001. С. 84–100.

Проблема № 2. Доказательство непротиворечивости аксиом арифметики

Как уже отмечалось, парадоксы теории множеств бросали тень на всю математику конца XIX столетия, в которой теоретико-множественные конструкции использовались достаточно широко. Поэтому Гильберт стремился «обезопасить» классические математические теории — арифметику и геометрию, базирующуюся на арифметических конструкциях с введением координатного метода.

К концу XIX столетия аксиомы множества натуральных чисел уже были сформулированы Дж. Пеано в 1889 г. и Р. Дедекиндом годом раньше. Более распространены аксиомы Пеано. Вот они.

Имеется некоторое множество $\mathbb{N}$, называемое множеством $\{x\}$ натуральных чисел. Если x и y — одно и то же число, то пишут $x = y$, если не одно, то $x \neq y$. Очевидно, что

1) $x = x$ для каждого $x \in \mathbb{N}$.

2) Из $x = y$ следует $y = x$.

3) Из $x = y$ и $y = z$ следует $x = z$.

Аксиомы

1. $1 \in \mathbb{N}$.

2. Для каждого $x \in \mathbb{N}$ имеется точно одно $x' \in \mathbb{N}$, называемое его последующим (из $x = y$ следует $x' = y'$).

3. Всегда $x' \neq 1$.

4. Из $x' = y'$ следует $x = y$ (любое число может быть последующим только для одного числа, либо не быть последующим ни для какого числа — см. 3).

5. (Аксиома индукции). Пусть множество $\mathfrak{N} \subset \mathbb{N}$ обладает следующими свойствами: 1) $1 \in \mathfrak{N}$, 2) из $x \in \mathfrak{N}$ следует $x' \in \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$.

Используя приведенные аксиомы вводятся операции сложения (вычитания), умножения натуральных чисел и устанавливаются их хорошо знакомые свойства.

Ставя задачу доказательства непротиворечивости аксиом арифметики, Гильберт требовал, чтобы она устанавливалась в рамках предложенных им правил «гильбертова финитизма» (об этом говорилось при обсуждении первой проблемы).

В 1931 году К. Гёдель доказал, что в рамках гильбертова финитизма непротиворечивость арифметики доказать нельзя. Однако при отказе от некоторых ограничений «финитизма», непротиворечивость арифметики можно доказать. Это сделали Г. Гентцен в 1936 году и П. С. Повиков в 1943. В работе Гентцена использовалась трансфинитная индукция, предложенная в 1883 году Кантором. Кантор разработал теорию упорядоченных счётных множеств — между любыми двумя элементами которых можно установить соотношение порядка $<, =, >$ (точнее предшествования, равенства, последования). Каждому счётному упорядоченному множеству сопоставляется его порядковый тип (трансфинитное число, ординальное число, ординал — различные названия). Например, порядковый тип множества чисел $\{1 - \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ обозначается ω, множества $\{1 - \frac{1}{n}; 1\}$ — $\omega + 1$, множества $\{1 - \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}\}$ — 2ω и т. д. — ω^2, ω^ω, ω^{ω^ω}, ... Аналог обычной индукции — аксиомы 5 Пеано — трансфинитная индукция.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий А. С. Есенина-Вольпина ко второй проблеме. С. 83–91).

[2] Ландау Э. Основы анализа. М.: ГИИА, 1947.

[3] Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.-Л., 1948.

[4] Демидов С. С. Проблемы Гильберта. М.: Знание, 1969.

Проблема № 3. Равенство объёмов двух тетраэдров с равновеликими основаниями и равными высотами

Гильберт говорит о двух письмах к Гёрлину, в которых Гаусс сожалеет, что некоторые известные утверждения стереометрии приходится доказывать с использованием предельного перехода (или «метода исчерпывания»). Например, теорему Евклида о том, что объёмы треугольных пирамид с равными высотами относятся как площади оснований. Предельный переход, вообще-то, необходим даже при нахождении площади прямоугольника с иррациональными длинами сторон. Но если принять, что площадь прямоугольника с длинами сторон a и b равна $a \cdot b$, то площадь любого многоугольника можно получить без предельного перехода, так как в 1832 году Фаркаш Бойяи и в 1833 году П. Гервин независимо доказали, что любые два равновеликих многоугольника можно разрезать на конечное число треугольников, из которых составляются оба многоугольника — равновеликость и равносоставленность для многоугольников суть одно и то же. Гёрлинг доказал равносоставленность равновеликих центрально-симметричных многогранников.

Гильберт отмечает, что невозможность доказательства без использования предельного перехода следует из неравносоставленности двух треугольных пирамид (у Гильберта — тетраэдров) с равными основаниями и равными высотами. Это и составило содержание третьей проблемы. В том же 1900 году это утверждение доказал М. Ден. Он также доказал неравносоставленность правильной треугольной пирамиды (тетраэдра по Платону) и куба равных объёмов. Доказательство Дена, достаточно сложное, было существенно упрощено в 1903 году В. Ф. Каганом. Простое (или, точнее, более простое) доказательство предложил в 1948–1949 годах швейцарский математик Хадвигер. Он установил, что для равносоставленности многогранников $\mathbb{M}_I$ и $\mathbb{M}_{II}$ равных объёмов необходимо и достаточно, чтобы для любой неотрицательной функции, определённой на множестве всех многогранников $\chi(\mathbb{M})$, удовлетворяющей следующим трём условиям

1) если $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ — равные многогранники, то $\chi(\mathbb{M}_1) = \chi(M_2)$ (условие рефлексивности);

2) $\mathbb{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{k} M_n$ и $\mathbb{M}_i$ и $\mathbb{M}_j$ не имеют общих внутренних точек при $i \neq j$, то $\chi(\mathbb{M}) = \sum\limits_{n=1}^{k} \chi(\mathbb{M}_n)$ (условие аддитивности);

3) если $\mathbb{M}_{(\lambda)}$ подобный с $\mathbb{M}$ многогранник и λ — коэффициент подобия, то $\chi(\mathbb{M}_{(\lambda)}) = \lambda \cdot \chi(\mathbb{M})$ (условие однородности)[1]

выполнялось бы равенство

$$\chi(\mathbb{M}_I) = \chi(\mathbb{M}_{II}).$$

(Функция χ с указанными свойствами называется линейным аддитивным инвариантом.)

Для доказательства существования нетривиального (отличного от тождественно нулевого) линейного аддитивного инварианта Хадвигер использует трансфинитную индукцию.

Теорема Дена обобщается на случай n-мерного ($n > 3$) пространства: n-мерный куб и правильная n-мерная пирамида — n-мерный симплекс (выпуклая оболочка $(n+1)$ равноотстоящих попарно точек, не лежащих в $(n-1)$-мерной плоскости) равных объёмов не являются равносоставленными.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий В. Г. Болтянского к третьей проблеме. С. 92–94).

[2] Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. М.: ГИТТЛ, 1956. Популярные лекции по математике. Вып. 22.

[3] Демидов С. С. Проблемы Гильберта. М.: Знание, 1969.

Проблема № 4. Проблема о прямой как кратчайшем соединении двух точек

В своём докладе Гильберт говорит, что если из системы аксиом евклидовой геометрии исключить аксиому параллельности — на плоскости через точку вне заданной прямой проходит только одна прямая, не пересекающая заданную, то приходим к геометрии Лобачевского (1826 год, публикация 1829–1830 годы) — гиперболической геометрии, которую можно считать «ближайшей» к евклидовой. Если ещё отказаться и от аксиомы, по которой из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими, то получим геометрию Римана (лекция «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» 1854 года, публикация 1867 года) — эллиптическую геометрию. Её можно считать ближайшей к геометрии Н. И. Лобачевского (независимо от Лобачевского эти же результаты получил в 1832 году Янош Бойяи, а ещё раньше подобный исследования проводил К. Гаусс, он не публиковал и открыто не упоминал об этих результатах).

Отказ от аксиомы Архимеда — отложив достаточное количество раз меньший из двух отрезков получаем отрезок, содержащий больший, приходим к «неархимедовым» геометриям (Веронезе в 1891 и Гильберт в 1899 году).

В четвёртой проблеме Гильберт ставит вопрос о нахождении всех геометрий, в которых «прямая» является кратчайшим соединением двух точек.

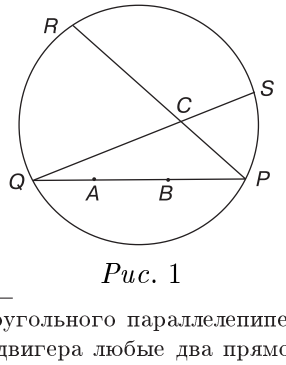

Рис. 1

[1]Отсюда следует, что для любого прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{P}$ имеем $\chi(\mathcal{P}_{(2)}) = 8 \cdot \chi(\mathcal{P})$ и $\chi(\mathcal{P}_{(2)}) = 2 \cdot \chi(\mathcal{P})$, откуда $\chi(\mathcal{P}) = 0$ и по теореме Хадвигера любые два прямоугольных параллелепипеда равного объема равносоставлены.

Для пояснения сказанного заметим, что геометрию Лобачевского согласно Ф. Клейну (1871, 1872) можно интерпретировать как множество точек круга с расстоянием, вычисляемым по формуле (рис. 1)

$$d_{AB} = \log_a \frac{AP}{BP} + \log_a \frac{BQ}{AQ}, \qquad a > 1.$$

концы хорд — точки окружности — бесконечно удалённые точки прямой AB. Прямые, проходящие через точку C с концами на дугах QR и PS не пересекают прямой AB.

Гильберт заменил круг в модели Клейна произвольной выпуклой областью и получил ещё одну неевклидову геометрию. В ней, как и в геометрии Лобачевского кратчайшее соединение двух точек даётся прямой. Ещё один пример геометрии с подобными свойством — геометрия Минковского, где расстояния определяются, если за единичный круг взять произвольную выпуклую центрально симметричную область.

Необходимо отметить, что геометрия Лобачевского находит применение в физике. В 1922 году А. А. Фридман нашёл решение уравнения Эйнштейна в теории относительности, из которого следовало, что вселенная расширяется. В 1929 году наблюдения Хаббла подтвердили этот факт — наличие красного смещения было установлено. Метрика, полученная Фридманом, даёт при фиксированном времени пространство Лобачевского. Этим же пространством является пространство скоростей специальной теории относительности.

Помимо интерпретации Клейна, известна интерпретация плоскости Лобачевского, предложенная в 1882 году А. Пуанкаре: внутренность круга с «прямыми» — внутренними дугами окружностей, пересекающими границу этого круга под прямым углом (рис. 2).

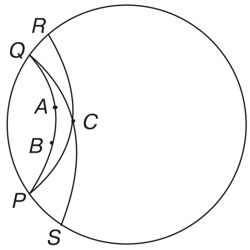

Рис. 2

Расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$d_{AB} = \log_a \frac{|\breve{AP}|}{|\breve{BP}|} + \log_a \frac{\breve{BQ}}{|\breve{AQ}|}, \qquad a > 1.$$

«Прямые», проходящие через точку C, концы которых — бесконечно удаленные точки этих прямых — принадлежат дугам $\breve{QR}$ и $\breve{PS}$ основной окружности, не пересекают «прямой», проходящей через точки A и B — угол «параллелизма» по терминологии Лобачевского. Величины углов в модели Пуанкаре и на плоскости Лобачевского одинаковы, т. е. модель конформна. К приведённой модели и ещё одной — на плоскости, Пуанкаре пришёл при построении теории автоморфных функций — в простейшей ситуации — мероморфных функций, инвариантных относительно дискретной группы преобразований, переводящих единичный круг в себя.

Из сказанного видно, что задача, поставленная в четвёртой проблеме, сводится к нахождению всех метрик (расстояний), при которых «прямые» являются кратчайшими (в смысле этих метрик) линиями, соединяющими две точки. В некотором смысле, эта задача была решена в 1901 году учеником Гильберта Г. Гамелем. Чтобы формулировка результата Гамеля была ясна, приведём два определения и немного их поясним.

Проективной плоскостью или двумерным проективным пространством называется «инцидентная структура» $\pi = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I}\}$, где элементы множества $\mathcal{P}$ называются точками, элементы множества $\mathcal{L}$ называются прямыми, I — отношение инцидентности (соответствия), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) для любых двух различных точек p и q существует единственная прямая L такая, что $p \,\mathrm{I}\, L$ (p инцидентна L) и $q \,\mathrm{I}\, L$;

2) для двух различных прямых L и M существует единственная точка p такая, что $p \,\mathrm{I}\, L$ и $p \,\mathrm{I}\, M$;

3) существуют четыре точки, никакие три из которых не инциденты одной прямой.

Примерами проективных плоскостей являются:

1. Пучок П прямых и плоскостей трёхмерного пространства, проходящих через точку O. Точками проективной плоскости являются прямые, а прямыми — плоскости пучка. Естественная инцидентность: прямая принадлежит плоскости.

2. Семь точек и семь «прямых» — троек точек $\{A_1, A_2, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_4, A_6\}$, $\{A_4, A_5, A_7\}$, $\{A_5, A_6, A_1\}$, $\{A_6, A_7, A_2\}$, $\{A_7, A_1, A_3\}$ (см. рис. 3).

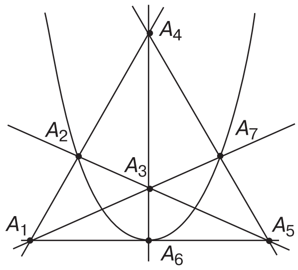

Рис. 3

Аффинным пространством (над полем F, например, действительных числе) называется множество A, элементы которого называются точками аффинного пространства, которому сопоставлено векторное пространство L над полем F и отображение множества $A \times A$ (пар элементов (a, b)) которого в пространство L, при котором образ элемента $(a, b) \in A \times A$ обозначается $\vec{ab}$ и называется вектором с началом a и концом b, обладает свойствами:

1) для любой точки a отображение $x \to \vec{ax}$, где x пробегает A является биекцией (взаимно однозначным соответствием *на*) A на L;

2) для любых трёх точек a, b, c из A выполнено соотношение Шаля

$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} = \vec{0}$$

($\vec{0}$ — нулевой вектор).

Примерами аффинных пространств являются:

1. n-мерное координатное пространство $A = \{a = (a_1, \ldots, a_n)\}$, если $a_j \in F$. При этом $\vec{ab} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$.

2. Множество решений системы линейных — алгебраических или дифференциальных — уравнений. При этом L — множество решений соответствующей однородной системы.

Сформулируем теперь результат Гамеля.

При любой метризации всей проективной плоскости или какой-то её части Ф, при которой «прямые» являются кратчайшими линиями, либо Ф есть вся проективная плоскость и все «прямые» являются замкнутыми линиями одной и той же конечной длины (случай «эллиптической» плоскости), либо Ф есть выпуклая область аффинной плоскости (может быть вся аффинная плоскость) и прямые «устроены» как евклидовы прямые и имеют бесконечную длину (например, геометрии Минковского и Гильберта).

Работа Гамеля не исчерпала, вообще говоря, всего, что можно сказать о четвёртой проблеме. Укажем на исследования П. Функа (1929), Г. Бунземана (1942, 1943).

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий И. М. Яглома к четвертой проблеме. С. 67–82).

[2] Математическая энциклопедия (в пяти томах). Советская энциклопедия. М.: 1977–1985.

Проблема № 4. Понятие непрерывной группы преобразований Ли, без предположения дифференцируемости функций, определяющих группу

Такое название дал Гильберт пятой проблеме. Само понятие непрерывной (или топологической) группы возникло в конце XIX столетия в работах Ф. Клейна (1872) и Софуса Ли (1880). Так Клейн предложил рассматривать геометрические теории как теории инвариантов каких-то групп преобразований.

Приведём определения ряда понятий, о которых пойдёт речь.

Абстрактной группой называется множество $\mathbb{G} = \{g_\alpha, g_\beta, \ldots\}$ элементов произвольной природы, в котором введена групповая операция «$\circ$», ставящая в соответствие любой упорядоченной паре g_γ, g_δ элементов $\mathbb{G}$ некоторый элемент g_λ из того же множества $\mathbb{G}$, причём выполняются условия:

1) $(g_\gamma \circ g_\delta) \circ g_\mu = g_\gamma \circ (g_\delta \circ g_\mu)$ для любых g_γ, g_δ, g_μ из $\mathbb{G}$ (ассоциативность групповой операции);

2) существует элемент $e \in \mathbb{G}$, называемый нейтральным, такой, что для любого элемента $g \in \mathbb{G}$
$$g \circ e = e \circ g = g;$$

3) для любого элемента $g \in \mathbb{G}$ существует элемент $g^{-1} \in \mathbb{G}$, называемый обратным к g, такой, что
$$g \circ g^{-1} = e.$$

Множество $\mathbb{R} = \{x\}$ элементов произвольной природы называется *топологическим пространством*, если любому подмножеству $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$ сопоставлено множество $\overline{\mathbb{M}} \subset \mathbb{R}$, называемое *замыканием* $\mathbb{M}$, причём выполнены условия:

1) если $\mathbb{M}$ состоит из одного элемента a, то $\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M}$;

2) если $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, то $\overline{\mathbb{M} \cup \mathbb{N}} = \overline{\mathbb{M}} \cup \overline{\mathbb{N}}$;

3) $\overline{\overline{\mathbb{M}}} = \overline{M}$.

Множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$. Множество $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если $\mathbb{R} \setminus \mathbb{G}$ — замкнутое. Открытое множество $\mathbb{G}$, содержащее элемент a, называется *открестностью* a.

$\mathbb{G}$ называется *топологической* (или непрерывной) *группой*, если

1) $\mathbb{G}$ — абстрактная группа;

2) для любых двух элементов a, b группы $\mathbb{G}$ и любой окрестности $\mathbb{W}$ элемента $a \circ b^{-1}$ найдутся окрестности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ элементов a и b соответственно, что $\mathbb{U} \circ \mathbb{V}^{-1} \subset \mathbb{W}$.

Другими словами, $\mathbb{G}$ является топологической группой, если $\mathbb{G}$ — абстрактная группа и топологическое пространство, причём отображение $(a, b) \mapsto a \circ b^{-1}$ ($\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ в $\mathbb{G}$) непрерывно по топологии.

В работах С. Ли непрерывные группы преобразований — локально евклидовы локальные группы гладких областей евклидова пространства, в которых групповые операции определяются достаточное число раз дифференцируемыми функциями. Ли рассматривал систему преобразований
$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

такую, что

$$x_i'' = f_i(x_1', \dots, x_n'; b_1, \dots, b_r) = \\ = f_i(f_1(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \dots, f_n(x_n, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r); b_1, \dots, b_r) = \\ = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_r), \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

где $c_1, \dots, c_r$ являются функциями $a_1, \dots, a_r$; $b_1, \dots, b_r$.

Последовательное выполнение двух преобразований $x_i \to x_i'$ и $x_i' \to x_i''$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и определяет групповую операцию в множестве преобразований.

В 1983 году С. Ли высказал теорему, доказанную в том же году Шуром, что если группа преобразований транзитивна, т. е. для любых $(a_1, \dots, a_r)$ и $(c_1, \dots, c_r)$ найдутся $(b_1, \dots, b_r)$ такие, что выполнены последние равенства в (1), и функции, определяющие эту группу, дважды дифференцируемы (даже несколько более слабые требования), то группа аналитична.

Гильберт в пятой проблеме спрашивает, нельзя ли в теореме Ли – Шура обойтись лишь требованием непрерывности функций, определяющих группу преобразований.

В начале XX столетия всё большее значение приобретают исследования собственно топологических групп, а не групп преобразований. Здесь следует упомянуть работы Брауэра 1909–1912 годов, А. Н. Колмогорова (1930), Л. С. Понтрягина (1932), фон Неймана (1933–1934), которые привели к возникновению нового раздела математики — топологической алгебры. Формулировка пятой проблемы Гильберта приобрела такой вид: является ли группой Ли при подходящем выборе локальных координат любая локально евклидова топологическая группа? Иными словами, пусть группа G является n-мерным топологическим многообразием (как модель — поверхностью) и отображение $\mu : (x, y) \mapsto x \circ y^{-1}$ непрерывно. Будет ли оно аналитично?

Положительный ответ на этот вопрос дали:

Дж. фон Нейман (1933) — для компактных групп, т. е. таких групп, для которых из любой бесконечной последовательности $g_1, \dots, g_n, \dots$ элементов $\mathbb{G}$ можно выделить подпоследовательность $g_{n_1}, \dots, g_{n_k}, \dots$, сходящуюся по топологии $\mathbb{G}$ к элементу g.

Л. С. Понтрягин (1934) для локально компактных абелевых групп, т. е. для тех групп, в которых групповая операция коммутативна ($g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ для любых $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$) и любой элемент $g \in \mathbb{G}$ имеет компактную окрестность;

К. Шевалле (1941) для разрешимых групп (определение разрешимой группы см., например, в Математической энциклопедии).

Окончательное решение дали в 1952 году независимо А. Глиссон и Д. Монтгомери и Циппин.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (Комментарий Е. Г. Скляренко, с. 101-115).

[2] Математическая энциклопедия (в пяти томах). Советская энциклопедия. М.: 1977–1985.

Проблема № 6. Математическое изложение аксиом физики

Д. Гильберт начинает изложение шестой проблемы следующей фразой. «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика.»

Что касается аксиоматизации различных разделов физики, то можно указать на работы Г. Гамеля и Р. Марколонго по аксиоматизации механики, В. Нолла — по механики сплошных сред, К. Каратеодори — по термодинамике, Д. Гильберта, Л. Нордхайма, Дж. фон Неймана, Г. Биркгофа — по квантовой механике.

Однако стоит остановиться на теории вероятностей, как на всё же более математической дисциплине.

Начало аксиоматического построения теории вероятностей было положено в 1917 году С. Н. Бернштейном. Далее следует указать на работу А. Ломницкого 1923 года. Однако принципиальное решение вопроса аксиоматизации теории вероятностей было дано в 1933 году А. Н. Колмогоровым. Эта система сейчас излагается во всех учебниках по теории вероятностей.

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — произвольное множество, элементы ω которого называются *элементарными событиями*. Ω называется *пространством элементарных событий*. Выделяется множество $\mathcal{U}$ подмножеств Ω, являющееся алгеброй, т. е. удовлетворяющее условиям: $\Omega \in \mathcal{U}$; если $A \in \mathcal{U}$ и $B \in \mathcal{U}$, то $A + B \in \mathcal{U}$, $A \cdot B \in \mathcal{U}$, $A - B \in \mathcal{U}$.

Более того, требуется, чтобы $\mathcal{U}$ была борелевской алгеброй или σ-алгеброй: из условия $A_n \in \mathcal{U}$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ следует, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$. σ-алгебра $\mathcal{U}$ называется *алгеброй событий*.

Числовая функция P, определённая на элементах σ-алгебры $\mathcal{U}$, называется *вероятностью*, если выполнены следующие условия:

1) $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{U}$ (неотрицательность);

2) $P(\Omega) = 1$ (нормированность);

3) если $A_n \in \mathcal{U}$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ ($\varnothing = A - A \in \mathcal{U}$), то $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (счётная аддитивность).

Совокупность $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ с перечисленными свойствами называется *вероятностным пространством.*

Понятие вероятностного пространства содержит общие требования к математической модели случайного явления и конкретизируется в каждом отдельном случае.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий Б. В. Гнеденко к шестой проблеме. С. 116–120).

[2] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: ОНТИ, 1936 (немецкое издание 1933).

[3] Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

Проблема № 7. Иррациональность и трансцендентность некоторых чисел

Ещё в 1744 году в книге «Введение в анализ» Леонард Эйлер впервые поставил вопрос об арифметической природе различных чисел. Он высказал предположение, что $\log_a b$ при $b \neq a^{p/q}$ и целом p и натуральном q не может быть «даже иррациональным и должен относится к количествам трансцендентным». В современной терминологии «не может быть даже иррациональным» означает не может быть *алгебраическим*, т. е. корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Неалгебраические числа называются *трансцендентными*.

Гильберт говорит, что функция $e^{i\pi z}$ при всех алгебраических иррациональных z принимает, по-видимому, трансцендентные значения.

Очевидно, что $\left(e^{i\pi(p/q)}\right)^q - 1 = 0$ при чётном p и $\left(e^{i\pi(p/q)}\right)^q + 1 = 0$ при p нечётном, т. е. $e^{i\pi z}$ при рациональном z — число алгебраическое. Гильберт формулирует и геометрический вариант вопроса: «если в равнобедренном треугольнике отношение угла при основании к углу при вершине есть алгебраическое, но не рациональное число, то отношение основания к боковой стороне есть трансцендентное число». По его мнению, это трудная задача, как и задача, что «α^β при алгебраическом α, отличном от 0 и 1 и алгебраическом иррациональном β, например, $2^{\sqrt{2}}$ или $e^\pi = i^{-2i}$ — есть всегда или трансцендентное, или, по крайней мере, иррациональное».

Конкретное трансцендентное число впервые предъявил в 1844 году Ж. Лиувилль — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$. Он показал, что если α есть действительный корень неприводимого многочлена с целыми коэффициентами степени $\nu \geq 2$, т. е. многочлена, который нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами, то при любых p целых и q натуральных

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^\nu},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от p и q. Это мгновенно следует из равенств:

$$\begin{cases} |f(p/q)| = |f(p/q) - f(\alpha)| = |\alpha - (p/q)| \cdot |f'(\alpha + \theta \cdot ((p/q) - \alpha)|, \quad \theta \in (0;1); \\ |f(p/q)| = \dfrac{|a_0 p^\nu + a_1 p^{\nu-1} + \dots + a_n q^\nu|}{q^\nu} \geq \dfrac{1}{q^\nu}. \end{cases}$$

В 1873 году Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e, а, используя метод Эрмита, в 1882 году Ф. Линдеман установил трансцендентность π.

Следует отметить, что так как множество алгебраических чисел счётно, всех действительных чисел — несчётно (Г. Кантор), то большинство чисел (с вероятностью 1) трансцендентные.

Трансцендентность чисел $\alpha^{i\sqrt{q}}$, где $\alpha \notin \{0;1\}$ и алгебраическое, а q — натуральное, доказал в 1929 году А. О. Гельфонд. В 1930 году, используя метод Гельфонда, Р. О. Кузьмин доказал трансцендентность $\alpha^{\sqrt{q}}$ при прежних условиях на α и q. В частности, $2^{\sqrt{2}}$ — трансцендентное число.

Трансцендентность α^β при алгебраическом α, отличном от 0 и 1, и иррациональном алгебраическом β была доказана в 1934 году Гельфондом, решившим тем самым, седьмую проблему Гильберта.

В 1937 году К. Малер доказал трансцендентность, например, числа

$$0{,}123456789101112\dots$$

(Вообще, если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, положительный при $x \geq 1$ и $f(1) = (a_1 a_2 \dots a_{\nu_1})_q$, $f(2) = (a_{\nu_1+1} \dots a_{\nu_2})_q$, $\dots$ — разложения $f(x)$, x — натуральное, записанное в системе счисления с основанием $q \geq 2$, то $(0{,}a_1 a_2 \dots a_{\nu_1} a_{\nu_1+1} \dots a_{\nu_2} \dots)_q$ — трансцендентное число.)

А. Б. Шидловский доказал трансцендентность числа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n!)^k}$$

при алгебраическом $a \neq 0$ и натуральном k.

Не выяснена алгебраическая природа постоянной Эйлера

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}5772\dots$$

и

$$\zeta(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \qquad k = 2, 3, \dots$$

Роджер Апере в 1978 году доказал иррациональность

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

В 2000–2002 годах Ревуаль и Болл доказали, что среди $\zeta(2k+1)$ бесконечное множество иррациональных (даже рационально независимых) и получили оценку их числа среди не превосходящих $2m+1$.

В 2002 году В. Жеделин доказал, что среди $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ есть иррациональные.

Значения $\zeta(2k)$ легко выражаются через π и их трансцендентность очевидным образом следует из теоремы Линдемана.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий А. О. Гельфонда к седьмой проблеме. С. 121–127).

[2] Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. М.: ГИТТЛ, 1952.

Проблема № 8. Проблема простых чисел

В восьмой проблеме Д. Гильберт говорит о трёх известных задачах:

1) проблема Римана (поставлена в 1876 году Б. Риманом): все «нетривиальные» нули дзета-функции — аналитического продолжения из полуплоскости $\sigma > 1$ суммы ряда

$$\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^z}, \qquad z = \sigma + i\tau,$$

— лежат на вертикальной прямой $\sigma = \frac{1}{2}$;

2) «бинарная» проблема Х. Гольдбаха (из его письма к Л. Эйлеру от 07.07.1742): каждое четное число $2n > 3$ можно представить в виде суммы двух простых

$$2n = p_1 + p_2;$$

3) проблема «близнецов»: бесконечно ли множество пар простых чисел с разностью 2? (3,5; 5,7; 11,13; 17,19; ...).

Также Гильберт говорит об обобщении проблемы «близнецов»: всегда ли разрешимо в простых числах диофантово уравнение

$$ax + by + c = 0$$

с заданными попарно взаимно простыми коэффициентами a, b и c?

При $a = b = 1$, $c = -2n$ получаем существование пар «близнецов». О количестве решений вопрос можно ставить потом.

ζ-функцию в виде ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}, \qquad s \in \{2, 3, \dots\}$$

впервые рассматривал в 1737 году Л. Эйлер. Он доказал представимость этой функции в виде бесконечного произведения

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где $\mathbb{P} = \{p\}$ — множество простых чисел. (И получил отличное от Евклидова доказательство бесконечности множества простых чисел). Наиболее глубокие свойства ζ-функции были обнаружены после того, как в 1876 году Риман стал её рассматривать как функцию комплексного переменного $z = \sigma + it$. Он установил, что сумма эйлеровского ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re} z = \sigma > 1$$

аналитически продолжается во всю комплексную плоскость за исключением точки $z = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1, т. е. $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ — целая функция, и справедливо представление

$$\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \int\limits_1^\infty \left(x^{\frac{z}{2}-1} + x^{\frac{1-z}{2}-1}\right) \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\pi x n^2} dx,$$

где $\Gamma(w)$ — функция Эйлера, являющаяся решением функционального уравнения $\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$ с нормировкой $\Gamma(1) = 1$. Так как $\Gamma(w)$ имеет простые полюсы в точках $w = -\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, то из формулы Римана следует, что

$$\zeta(-2\nu) = 0, \qquad \nu \in \mathbb{N}.$$

Нули $z = -2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ называются «тривиальными» нулями $\zeta(z)$. Б. Риман показал, что все нетривиальные нули $\zeta(z)$ являются комплексными числами, лежащими в вертикальной полосе $0 \le \sigma \le 1$, и множество всех этих нулей симметрично относительно прямых $t = 0$ и $\sigma = 1/2$.

Соотношения (при $\sigma > 1$)

$$\ln\zeta(z) = z\int\limits_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^z-1)}\,dx, \qquad \text{где } \pi(x) \text{ — число простых } p \le x;$$

$$\zeta^2(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\tau(n)}{n^z}, \qquad \text{где } \tau(n) \text{ — число делителей } n;$$

$$(\ln\zeta(z))' = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Lambda(n)}{n^z}, \qquad \text{где } \Lambda(k) = \begin{cases} \ln p & \text{при } n = p^m,\ p \in \mathbb{P},\ m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{при } n \ne p^m \end{cases}$$

($\Lambda(n)$ — функция Мангольдта)

подтверждает тесную связь ζ-функции с распределением простых чисел.

Риман высказал следующие пять предположений о поведении ζ-функции.

1. Пусть $N(T)$ — число нулей $\zeta(z)$ в прямоугольнике $0 \le \sigma \le 1$, $0 < t < T$, $z = \sigma + it$. Существует постоянное $C > 0$ такое, что
$$\left| N(t) - \left(\frac{1}{2\pi} T \ln T + \frac{1+\ln 2\pi}{2\pi} T \right) \right| \le C \cdot \ln T.$$
2. Пусть $\{\rho\}$ — множество всех нетривиальных нулей $\zeta(z)$. Тогда
$$\sum_{\{\rho\}} \frac{1}{|\rho|} = \infty, \qquad \sum_{\{\rho\}} \frac{1}{|\rho|^2} < \infty.$$
3. Найдутся такие числа a и b, что
$$\zeta(z) = ae^{bz} \prod_{\{\rho\}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}.$$
4. Справедливо использующее $\{\rho\}$ представление, опускаемое ввиду его громоздкости, для функции
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n \le x-0} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} + \sum_{n \le x+0} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \right).$$
5. Все нетривиальные нули $\zeta(z)$ лежат на вертикальной прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

В 1893 году гипотезы 2 и 3 были доказаны Ж. Адамаром, причем в гипотезе 3 число $a = 1/2$, число $b = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\pi - 1 - \frac{1}{2}C$, где C — постоянная Эйлера.

В 1894 году гипотезы 1 и 4 были доказаны Х. Мангольдтом. В 1914 году Х. Харди, используя одну формулу Рамануджана, доказал, что на прямой $\sigma = 1/2$ лежит бесконечное множество нетривиальных нулей $\zeta(z)$.

В 1942 году норвежский математик А. Селберг показал, что существует число $A > 0$, при котором количество нулей $\zeta(z)$ вида $z = \frac{1}{2} + iT$ при $0 < T < t$ больше $A \cdot T \ln T$ (сравните с доказанной Мангольдтом гипотезой 1 Римана).

В 1958 году на ЭВМ «Стрела» АН СССР Н. Меллер установил, что нули $\zeta(z)$ в верхней комплексной полуплоскости с номерами от 15 000 до 35 337 лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

Для оценки области, в которой расположены все нетривиальные нули $\zeta(z)$ важную роль играют оценки $|\zeta(1+it)|$, получаемые «методом тригонометрических сумм» И. М. Виноградова. Эти оценки получены самим Иваном Матвеевичем и его учениками. Этим же методом И. М. Виноградов доказал в 1937 году, что все нечетные числа, превосходящие некоторое $d > 0$, представляются в виде суммы трёх простых. Этим была решена так называемая «тернарная» проблема Гольдбаха. Собственно эта задача принадлежит Л. Эйлеру, который в ответном письме Гольдбаху на упоминавшееся письмо последнего написал, что не знает решения задачи, поставленной Гольдбахом, но из положительного ответа на указанный вопрос будет следовать и положительный ответ на вопрос о представлении нечётных чисел в виде суммы трёх простых. В 1923 году Г. Харди и Дж. Литтлвуд показали, то если ответ на гипотезу Римана о нулях ζ-функции (точнее на некоторое её обобщение) положителен, то всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трёх простых. И. М. Виноградов, естественно, установил это без гипотезы Римана. В 1946 году Ю. В. Линник дал доказательство теоремы Виноградова, основанное на методах теории функций комплексного переменного.

С использованием положительного ответа на гипотезу Римана было установлено, что если число чётных чисел, представимых в виде суммы двух простых и ме́ньших N обозначить N_+, а непредставимых — через N_-, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_-}{N_+} = 0 \qquad \left(\lim_{N\to\infty} \frac{N_+}{N} = 1\right).$$

В 1930 году, при помощи предложенного им метода, Л. Г. Шнирельман показал, что любое натуральное $n > 1$ есть сумма не более чем C простых чисел, причем C не зависит от n, естественно. У Шнирельмана $C = 8\,000\,000$. В 1935 году Н. Романов снизил C до 2208, в 1936 Д. Риччи — до 67 и в 1950 Г. Шапиро и Д. Варга — до 20.

В 1937 году Н. Г. Чудаков, а в 1938 Т. Эстерман и, независимо И. Ван-дер-Корпут уже без использования ответа на гипотезу Римана о нулях ζ-функции доказали, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_+}{N} = 1.$$

И. М. Виноградов дал и положительный ответ на вопрос о существовании решения в простых числах уравнения

$$ax + by + cz = d$$

с попарно простыми коэффициентами a, b, c и d при достаточно большом $d > 0$.

Существование решения уравнения $ax + by = c$ пока не доказано.

Относительно проблемы «близнецов», надо упомянуть результат норвежского математика В. Бруна 1919 года: ряд из обратных близнецам величин или обрывается, или сходится. Также Браун установил, что для достаточно больших N число близнецов, меньших N, не превосходит величины $A\frac{N}{\ln^2 N}$ (при некотором $A > 0$). Отметим, что число $\pi(N)$ всех простых чисел, меньших N таково, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N/\ln N} = 1.$$

При условии (априорном) существовании предела это в 1849 доказал П. Л. Чебышев, а существование предела независимо установили в 1896 году Ж. Адамар и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен.

Д. Гильберт полагал, что и проблема Гольдбаха и проблема «близнецов» будут доказаны, если будет доказана гипотеза Римана о нулях ζ-функции. Решения этой проблемы пока не получено. Тем более любопытно, что для некоторых аналогов ζ-функции — конгруэнц-L-функций подобный результат доказал в 1941 году Андре Вейль.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к восьмой проблеме Ю. В. Линника, С. 128–130).

[2] Демидов С. С. Проблемы Гильберта. М.: Знание, 1969.

[3] Математическая энциклопедия (в пяти томах), Советская Энциклопедия: М.: 1977–1985.

Проблема № 9. Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле

В формулировке Гильберта задача звучит так: доказать закон взаимности для степенных вычетов l-го порядка в любом числовом поле (l — нечётное простое, l — целая степень числа 2, l — степень нечётного простого числа).

Ещё П. Ферма знал, что среди простых делителей чисел вида z^2+1 при целом z нет простых вида $4k+3$ $(4k-1)$ и встречаются все простые вида $4k+1$. другими словами сравнение

$$z^2+1 \equiv 0 \pmod p$$

при простом p имеет решения лишь при $p=2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$.

Этот факт обобщается следующим образом: если $\sqrt{a} \neq \mathbb{Z}$, то простые делители чисел вида

$$z^2-a,$$

отличные от 2 и делителей a, принадлежат точно половине арифметических прогрессий $\{4ak+b\}$, где $0<b<4a$ и b взаимно просто с $4a$.

Описание тех прогрессий (классов вычетов), которые содержат простые делители чисел z^2-a и составляет содержание *закона взаимности Гаусса.*

Определение. *Целое число a называется квадратичным вычетом по простому модулю $p \neq 2$, если a не делится на p и сравнение $z^2-a \equiv 0 \pmod p$ разрешимо, т. е. (z^2-a) делится на p. Если же сравнение $z^2-a \equiv 0 \pmod p$ не имеет решений, то a называется квадратичным невычетом.*

В силу «малой теоремы Ферма», для любого целого a, не делящегося на p,

$$a^{p-1}-1=\left(a^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}}+1\right) \equiv 0 \pmod p,$$

т. е.

$$\text{или } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p, \qquad \text{или } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

В 1772 году Эйлер установил и (без доказательства) опубликовал в 1783 году следующий критерий:

$$\begin{array}{ll} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет;} \\ a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.} \end{array}$$

В 1785 году неполное доказательство теоремы Эйлера привел Лежандр. Полное доказательство дал в 1801 году К. Гаусс. Всего же он нашел семь доказательств критерия Эйлера.

Лежандр ввёл обозначение (символ Лежандра) для простого p и a, не делящегося на p:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} +1, & \text{если } a \text{ квадратичный вычет,} \\ -1, & \text{если } a \text{ квадратичный невычет.} \end{cases}$$

Простейшие свойства символа Лежандра: $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)$ при $a \equiv a_1 \pmod p$; $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ (критерий Эйлера); $\left(\frac{a_1 \cdot a_2}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p}\right)$ — произведение двух квадратичных вычетов или двух невычетов есть вычет, а произведение вычета на невычет есть невычет.

Исследование $\left(\frac{a}{p}\right)$ при фиксированном a даёт описание простых делителей z^2-a. Это и составляет содержание *закона взаимности Гаусса:*

1) если p и q — нечётные простые числа, то p для q и q для p одновременно квадратичные вычеты или невычеты, если хоти бы одно из них сравнимо с $(+1)$ по модулю 4. Если же оба сравнимы с (-1) по модулю 4, то одно из них вычет для второго, а второе — невычет для первого. В терминах символа Лежандра

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right);$$

2) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, т. е. (-1) квадратичный вычет для $p \equiv 1 \pmod 4$ и невычет для $p \equiv -1 \pmod 4$;

3) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, т. е. 2 — квадратичный вычет для $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и невычет для $p \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Отсюда, если $a = (-1)^{\alpha} 2^{\beta} q_1 \cdots q_k$, где $\alpha, \beta \in \{0; 1\}$, $q_1, \ldots, q_k$ — нечётные простые, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right)^{\beta} \left(\frac{q_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{q_k}{p}\right).$$

Таким образом для определения $\left(\frac{a}{p}\right)$ достаточно знать, какому классу вычетов по модулю $4|a|$ принадлежит p.

Естественно назвать число a, взаимно простое с натуральным n *вычетом степени n по простому модулю p*, если сравнение

$$x^n - a \equiv 0 \pmod p$$

имеет решение.

Однако обобщение закона взаимности на вычеты степени $n > 2$ возможно при переходе от арифметики целых рациональных чисел к теории алгебраических чисел (вместо уравнения $x^2 - 1 = 0$ приходится рассматривать уравнения вида $x^n - 1 = 0$).

Арифметика целых чисел в поле конечной степени над полем рациональных чисел становится похожей на арифметику целых рациональных чисел при учете двух существенных отличий.

1) В кольце целых алгебраических чисел поля имеется бесконечное множество единиц, т. е. целых чисел поля, обратные к которым также целые. Поэтому в вопросах делимости приходится «склеивать» числа, отличающиеся единичными множителями, в один объект «главный дивизор».

2) Чтобы получить теорему о единственности разложения на простые множители, приходится множество главных дивизоров рассматривать как часть большего множества всех дивизоров — идеальных чисел. Число классов дивизоров оказывается конечным, если объединить в один класс дивизоры, отличающие на главные.

Классы вычетов по простому дивизору $\mathfrak{p}$ образуют конечное поле, являющееся конечным расширением поля вычетов по простому числу p. Степень f этого расширения называется порядком (степенью) $\mathfrak{p}$. Число p^f классов вычетов называется нормой $\mathfrak{p}$ (обозначается $N\mathfrak{p}$). Тогда оказывается справедливым аналог теоремы Ферма

$$a^{(N\mathfrak{p})-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Закон взаимности для $n = 4$ в поле $\mathbb{Q}(i)$ $(i = e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{4}})$ был установлен Гауссом и опубликован в собрании его сочинений в 1863 году (после смерти). Для $n = 3$, в поле $\mathbb{Q}(e^{i\frac{2\pi}{3}})$ — Эйзенштейном в 1844 году. Закон взаимности для простого n в поле $\mathbb{Q}(e^{i\frac{2\pi}{n}})$ установил в 1850 году Куммер при некотором дополнительном условии на n. Однако в 1922 году Такаги показал, что это условие излишне.

Явную формулу для закона взаимности степенных вычетов стеиени n (о чем и говорил Гильберт) — достаточно рассматривать случай $n = p^k$, где p — простое, установил в 1948 году И. Р. Шафаревич.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к девятой проблеме Д. К. Фаддеева, С. 131–140).

Проблема № 10. Задача о разрешимости диофантова уравнения

Д. Гильберт формулирует следующую задачу: указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить разрешимо ли в целых числах уравнение $P = 0$. При этом P — многочлен с произвольным числом переменных и целыми коэффициентами.

Приведем несколько необходимых для дальнейшего определений.

1. Некоторое свойство конечного набора целых чисел $a_1, \ldots, a_m$ называется *диофантовым* если существует многочлен $P(a_1, \ldots, a_m; x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами от $(m+n)$ переменных такой, что набор $a_1, \ldots, a_m$ обладает указанным свойством тогда и только тогда, когда существуют целые $x_1, \ldots, x_n$, для которых

$$P(a_1, \ldots, a_m; x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

2. Некоторое свойство набора целых чисел $a_1, \ldots, a_m$ называется *перечислимым*, если существует правило (алгоритм), позволяющее получить все наборы, обладающие указанным свойством, причем любой такой набор рано или поздно будет получен (за конечное число шагов).

В 1970 году молодой ленинградский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что *любое перечислимое свойство конечного набора целых чисел является диофантовым* (теорема 1).

Из теоремы 1 Матиясевич вывел, что *не существует общего метода (алгоритма), позволяющего для любого заданного диофантова уравнения установить, имеет оно решения в целых числах, или нет* (теорема 2).

Диофантовость перечислимого свойства Матиясевич вывел из диофантовости такого свойства пары чисел (a, b):

$$b = \varphi_{2a},$$

где $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = 2$, $\varphi_4 = 3$, $\varphi_5 = 5$, $\ldots$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ — последовательность Фибоначчи.

Несколько более слабый по сравнению с теоремой 1 результат в 1962 году доказали Девис, Путнам и Робинсон.

Из решения десятой проблемы вытекает интересное следствие. Путнам доказал, что всякое диофантово множество совпадает с множеством натуральных значений некоторого многочлена. Значит (теорема 1) всякое перечислимое множество есть множество натуральных значений некоторого многочлена.

В частности, такими будут множества всех простых чисел, всех чисел вида $n!$, 2^n и т. п.

Отрицательный ответ в десятой проблеме, как показал в 1966 году Девис, следовал бы из того, что при любом $k \geq 0$ существует решение диофантова уравнения

$$x^3 - zy^3 = 1$$

с $x > z^k$.

В 1916 году Б. Н. Делоне доказал, что при фиксированном z уравнение

$$x^3 - zy^3 = 1$$

помимо тривиального решения имеет не более одного решения. Однако оценок величины x по сравнению с z нет.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к десятой проблеме Ю. И. Хмелевского, С. 141–153).

[2] Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. Библиотечка «Квант», Вып. 64. М.: Наука, 1988.

Проблема № 11. Квадратичные формы с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами

В комментарии к этой проблеме Ю. И. Манин отмечает, что в узком смысле она может быть истолкована как задача перенесения на поля алгебраических чисел результатов теории квадратичных форм над полем рациональных чисел (т. е. с коэффициентами из этого поля), известных к 1900-му году. В широком же смысле — это серия результатов Хассе, Гекке, Зигеля и других математиков, касающихся арифметической и аналитической теории квадратичных форм над числовыми полями и различных их обобщений.

Пусть K — поле алгебраических чисел (например, вида $r_1\sqrt{w_1} + \cdots r_s\sqrt{w_s}$, где r_j, w_j — рациональные, а $\sqrt{w_j} \notin \mathbb{Q}$, f и g — квадратичные формы над K произвольного числа переменных

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad g = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}y_py_q, \qquad a_{ij},\, b_{pq} \in K.$$

Формы и f и g называются эквивалентными над K, если одна переводится в другую невырожденным линейным преобразованием

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{pi}x_i, \qquad p \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha_{pi} \in K, \quad \det(\alpha_{pi}) \neq 0.$$

Число $a \in K$ *представляется формой* f, если уравнение $f = a$ разрешимо в K.

Основной результат Хассе состоит в следующем. Рассмотрим пополнения K_v поля K (пределы всех фундаментальных по метрике v последовательностей) по любым метрикам v — архимедовым и неархимедовым. (функция $v : K \times K \to \mathbb{R}$ метрика, если 1) $v(x, y) \geq 0$ и $v(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, 2) $v(x, y) = v(y, x)$, $v(x, y) \leq v(x, z) + v(z, y)$ для любых $x, y, z \in K$).

Чтобы форма g получалась из формы f линейной подстановкой необходимо, очевидно, чтобы это представление имело место во всех полях K_v. Хассе показал, что это условие и достаточно.

Ситуация значительно усложняется при замене поля K на кольцо O целых чисел. К. Зигель в ряде работ установил связь между числом решений $f = a$ при положительно определённой над кольцом целых чисел формой f и представлением.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к одиннадцатой проблеме Ю. И. Манина, С. 154–158).

Проблема № 12. Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности

В 1853 году Кронекер доказал, что максимальное абелево (т. е. коммутативное) расширение поля рациональных чисел порождается всеми корнями из единицы. Доказательство Кронекера было неполным. Аккуратное доказательство дал в 1886–1887 годах Г. Вебер.

В двенадцатой проблеме Гильберт формулирует задачу перенесения результата Кронекера – Вебера на ситуацию, когда поле рациональных чисел заменяется на произвольное алгебраическое числовое поле.

Простое доказательство теоремы Кронекера – Вебера дал в 1951 году И. Р. Шафаревич.

Из результата Кронекера – Вебера можно получить описание группы Галуа фактор-группы максимального абелева расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т. е. $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ группы классов смежности в $A_{\mathbb{Q}}$ по подгруппе $\mathbb{Q}$ (для иллюстрации: фактор-группа целых чисел по подгруппе чётных чисел изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_2$ — группе остатков от деления на 2). Оказалось, что группа Галуа фактор-группы $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ изоморфна прямому топологическому произведению $\prod\limits_{p\neq p_\infty} U_p$ групп U_p p-адических единиц. Если p — простое число, то последовательность целых чисел $\{x_0, x_1 \ldots\}$ таких, что

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

называется целым p-адическим числом. Можно принять за определение p-адической единицы p-адическое целое, для которого $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

В 1936 году К. Шевалле ввёл понятие группы аделей и группы иделей — обратимых элементов кольца аделей. Формальное определение этих понятий сделало бы изложение крайне громоздким. Оказывается, что $\prod\limits_{p\neq p_\infty} U_p$ изоморфно фактор-группе классов иделей J_Q/Q^*, по её связной компоненте. Именно в такой формулировке теорема Кронекера – Вебера переносится на произвольные поля K: группа Галуа максимального абелева расширения A_K поля K изоморфна фактор-группе классов иделей J_K/K^* поля K по связной компоненте.

Этот результат — плод труда ряда математиков: Гильберт, Такаги, Чеботарёв, Артин, Хассе, Шевалле, Накаяма, Хохшильд, А. Вейль, Тэйт и других.

Вместе с тем, вопрос о явном описании поля A_K (как в теореме Кронекера – Вебера) остаётся открытым.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к двенадцатой проблеме Ю. И. Манина, С. 159–162).

[2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.

[3] Математическая энциклопедия (в пяти томах), Советская энциклопедия, М.: 1977–1985.

Проблема № 13. Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух аргументов

В докладе Гильберт говорит о номографии, ставящей задачу решения уравнения с помощью кривых, семейство которых зависит от одного параметра. Следовательно корни алгебраического уравнения с двумя произвольными коэффициентами можно найти с помощью номограмм.

Для алгебраических уравнений до четвёртой степени включительно корни являются суперпозициями функций двух переменных — суммы, разности, произведения, частного и одного переменного — корня квадратного и кубического (формулы Кардано – Феррари).

С помощью преобразования Чирнгаузена, использующего четыре арифметических действия и операцию извлечения корня, общее уравнение n-ой степени приводится к виду

$$t^n + a_1 t^{n-4} + \cdots + a_{n-1} t + 1 = 0.$$

Как показал Н. Абель, уже при $n = 5$ корни уравнения

$$t^5 + a_4 t + 1 = 0$$

нельзя выразить через единственный параметр a_4 с помощью четырёх арифметических действий и операции извлечения корня. Однако нетрудно заметить, что корни этого уравнения являются аналитическими функциями — более сложными по сравнению с суперпозициями пяти упомянутых — от a_4, Аналогичная картина и для уравнения

$$t^6 + a_4 t^2 + a_5 t + 1 = 0.$$

Так как корни выписанных уравнении пятой и шестой степени зависят не более чем от двух параметров, то они могут быть получены с помощью номограмм. Поэтому Гильберт и ставит задачу о возможности выражения корней уравнения

$$t^7 + x \cdot t^3 + y \cdot t^2 + z \cdot t + 1 = 0$$

через x, y, z. Он полагал, что корни этого уравнения невозможно получить в виде суперпозиций функций двух переменных.

Несколько слов о суперпозициях. Очевидно, что функция

$$F(x, y, z) = xy + yz$$

трёх переменных представляется как суперпозиция функций двух переменных в виде

$$F = w(u(x, y); v(y, z)),$$

где

$$w(u, v) = u + v, \qquad u(x, y) = x \cdot y, \qquad v(x, y) = y \cdot z.$$

Эта суперпозиция является *однократной.* Для функции

$$F(x, y, z) = xy + yz + zx,$$

как можно показать, уже нельзя указать однократную суперпозицию функций двух переменных, представляющую её. Но можно представить эту функцию в виде двукратной суперпозиции

$$xy + yz + zx = w\Big(u\big(p(x, y), q(y, z)\big), v\big(r(y, z), s(z, x)\big)\Big),$$

где

$$w(u, v) = u + v, \quad u(p, q) = p + q, \quad p(x, y) = xy, \quad q(y, z) = yz, \quad v(r, s) = s, \quad s(z, x) = zx.$$

Легко понять, что все целые рациональные функции (многочлены) нескольких переменных получаются из своих аргументов многократным применением операций сложения и умножения, то есть многократной суперпозицией функций не более чем двух переменных

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = xy, \quad h(x) = x + a, \quad e(x) = a \cdot x.$$

В начале 1956 года А. Н. Колмогоров показал, что всякая непрерывная на n-мерном кубе функция n переменных при $n \geq 4$ является суперпозицией непрерывных функций трёх переменных. В 1957 году студент 3-го курса мехмата МГУ (ныне академик РАН) В. И. Арнольд усилил результат Колмогорова — своего учителя — и показал, что любая непрерывная функция n переменных представляется в виде суммы $3n$ функций, каждая из которых есть суперпозиция, являющаяся подстановкой в функцию двух переменных вместо одного из аргументов функции $(n-1)$ переменного. Для $n = 3$, таким образом, получается

$$f(x, y, z) = \sum_{r=1}^{3} \big(\varphi_r(u_r(x, y), z) + \psi_r(v_r(x, y), z) + \chi_r(w_r(x, y), z)\big)$$

— всякая непрерывная функция трёх переменных есть сумма девяти слагаемых, каждое из которых является однократной суперпозицией функций двух переменных.

Этим был дан отрицательный ответ в тринадцатой проблеме Гильберта.

В том же 1957 году А. Н. Колмогоров доказал, что каждая непрерывная на единичном n-мерном кубе функция допускает представление

$$\sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left(\sum_{p=1}^{n} \varphi_{p,q}(x_p) \right),$$

где все $h_q(u)$ непрерывны, а $\varphi_{p,q}(x_p)$ не только непрерывны, но и не зависят от f. В частности

$$f(x,y) = \sum_{q=1}^{5} h_q(\varphi_q(x) + \psi_q(y)),$$

где $\varphi_q(x)$, $\psi_q(y)$ не зависят от f.

В 1930 году Н. К. Бари доказала, что всякая непрерывная функция $f(t)$ представляется в виде

$$f(t) = f_1(g_1(t)) + f_2(g_2(t)) + f_3(g_3(t)),$$

где все функции f_i, g_i абсолютно непрерывны.

Из этого результата и результата Колмогорова следует, что всякую непрерывную функцию n переменных можно представить в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций одного переменного и операции сложения.

Возвращаясь к тринадцатой проблеме, отметим, что существуют аналитические функции n переменных, которые нельзя представить в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных (Гильберт, Островский).

В 1954 году А. Г. Витушкин доказал, что существуют p раз непрерывно дифференцируемые функции n переменных, которые нельзя представить конечной суперпозицией функций, у которых отношение числа переменных к числу имеющихся у них дифференциалов строго меньше n/p. В частности трижды непрерывно дифференцируемые функция трёх переменных нельзя представить в виде суперпозиции дважды дифференцируемых функций двух переменных.

Отметим ещё, что основным аппаратом в доказательстве А. Н. Колмогорова о представлении любых функций суперпозициями функций трёх переменных явился аппарат введённых в 1950 году А. С. Кронродом одномерных деревьев компонент множества уровня функции.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к тринадцатой проблеме А. Г. Витушкина, С. 163–170).

[2] Арнольд В. И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. Математическое просвещение. Вып. 3, 1958, С. 41–61.

Проблема № 14. Доказательство конечности некоторой полной системы функций

Пусть заданы m целых рациональных функций (т. е. многочленов) $X_1, \dots, X_m$ от n переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ X_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Всякая целая рациональная функция (многочлен) от $X_1, \dots, X_m$ очевидным образом также является многочленом от $x_1, \dots, x_n$. Однако могут существовать дробные рациональные функции R от $X_1, \dots, X_m$ — отношение двух многочленов —, которые после подстановки (2) дадут целую функцию (многочлен) от $x_1, \dots, x_n$. Такие функции Гильберт называет *относительно целыми* от $X_1, \dots, X_m$. Естественно, каждая целая функция является и относительно целой, а также сумма, разность, произведение относительно целых — относительно целая. То есть множество относительно целых функций является кольцом. Гильберт формулирует следующую задачу: всегда ли существует конечна подсистема относительно целых функций от $X_1, \dots, X_m$, через которую всякая относительно целая функция выражается целым рациональным образом (т. е. является многочленом от элементов выделенной конечной подсистемы относительно целых функций)?

Гильберт указывает связь этой проблемы с задачами из теории чисел.

В современной терминологии приведённая проблема может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем K (коэффициенты многочленов принадлежат полю K). Пусть G — некоторая группа K-автоморфизмов этого кольца, $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ — подкольцо G-инвариантных многочленов. Имеет ли подкольцо $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ конечное множество образующих?

Для ряда классических групп ответ на проблему был положительным. Для проективной группы это показал сам Гильберт. Однако в 1956 году Нагата построил пример группы G, для которой $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ не имеет конечного множества образующих.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к четырнадцатой проблеме Ю. И. Манина, С. 171–174).

Проблема № 15. Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта

В этой проблеме Гильберт не ставит какой-либо формализованной задачи, а говорит о необходимости создания технических средств, с помощью которых были бы формализованы вычисления Шуберта.

Исчисление Шуберта основывалось на том, что каждому условию, которое выполнено для какого-либо алгебраического объекта, сопоставляется определённый алгебраический символ. Наложение хотя бы одного из двух условий представляется суммой символов, а одновременное их выполнение — произведением. Подразумевается, что геометрические объекты определяются значениями нескольких параметров и условия, накладываемые на эти объекты, описываются средствами алгебры.

Геометрические объекты в современной теории — это алгебраические многообразия или схемы Гротендика. Алгебраические многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел и над произвольным полем.

Можно считать, что пятнадцатая проблема стимулировала развитие алгебраической геометрии. Например, эффектным результатом теории пересечений А. Вейля явилось доказательство гипотезы Римана о ζ-функции кривых над конечными полями.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к пятнадцатой проблеме Ю. И. Манина, С. 175–181).

Проблема № 16. Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей

Пусть $F(x, y)$ — многочлен степени n относительно переменных x, y, с действительными коэффициентами. На действительной проективной плоскости, которую можно понимать как сферу в трёхмерном пространстве, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки, рассмотрим множество точек (x, y, z) таких, что

$$z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Это множество называется алгебраической кривой порядка n (на действительной проективной плоскости).

В 1876 году А. Харнак показал, что число замкнутых ветвей такой кривой не превосходит величины

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$$

и построил кривые с таким максимальным числом компонент, так называемые M-кривые. При этом M-кривая такова, что система уравнений

$$\begin{cases} F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

не имеет конечных или бесконечных действительных решений — не имеет действительных особых точек.

Овалом, или четной компонентой на проективной плоскости называется компонента алгебраической кривой, которой на сфере соответствуют две замкнутые кривые. Если компоненте на сфере соответствует только одна замкнутая кривая, то она называется нечетной или непарным куском.

В шестнадцатой проблеме Гильберт, в частности, ставит вопрос о взаимном расположении компонент M-кривых порядка $n \geq 6$. Для $n = 4$ M-кривая состоит из четырёх овалов, расположенных вне друг друга, для $n = 5$ — из одного непарного куска и шести овалов, лежащих вне друг друга.

Для $n = 6$ Гильберт построил M-кривую с девятью овалами внутри десятого и одним вне последнего. Ранее Харнак построил M-кривую с одним овалом в другом и девятью овалами вне этого и вне друг друга.

В 1933 и 1938 годах И. Г. Петровский получил ряд глубоких результатов по указанным вопросам. В частности он показал, что при $n = 2m$ алгебраическая кривая порядка n не может иметь более чем $\frac{3n(n-2)}{8}+1$ овалов, лежащих вне друг друга. При $n = 6$ число Петровского равно 10 и 11 овалов M-кривой не могут лежать вне друг друга.

Д. А. Гудков построил M-кривую шестого порядка с пятью овалами внутри шестого и пятью овалами вне последнего и вне друг друга.

И. Г. Петровскому и О. А. Олейник принадлежит ряд результатов по обсуждаемому кругу вопросов, в частности о топологическом устройстве алгебраических поверхностей. Но результаты пока далеки от окончательных.

В шестнадцатой проблеме спрашивается и о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где P, Q — многочлены порядка n от x и y. И в этом вопросе существенных успехов нет. В. И. Арнольд предложил рассматривать и иные дифференциальные уравнения в плане топологии множества их решений, равно как и топологию линий уровня, например, тригонометрических многочленов.

Много интересных результатов приведены в большой статье Ю. С. Ильяшенко (см. список литературы). Например, для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^k,$$

где коэффициенты — периодические функции, так что решения естественно рассматривать на поверхности цилиндра, при $n \leq 3$ число предельных циклов не превышает n, а при $n \geq 4$ может быть бесконечным. Если $|a_k| < C$, то число предельных циклов ограничено величиной $e^{e^{C^{3n}}}$ (Ю. С. Ильяшенко).

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к шестнадцатой проблеме О. А. Олейник, С. 182–195).

[2] Ильяшенко Ю. С. Столетняя история 16-ой проблемы Гильберта. МЦНМО, 2003. С. 135–213.

Проблема № 17. Представление определённых форм в виде суммы квадратов

Под формой понимается целая рациональная функция (многочлен) с действительными коэффициентами от нескольких переменных, а определённость — неотрицательность всюду.

Легко показать, используя разложение многочлена в произведение одночленов по теореме Безу (с комплексными корнями в общем случае)

$$a_0(x-z_1)\cdots(x-z_n),$$

что любой неотрицательный многочлен $p(x)$ одной переменной с действительными коэффициентами представляется в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами. Для многочленов от нескольких переменных это уже не так. В 1888 году, не указывая конкретного примера, это показал Гильберт. Первый простой пример привёл в 1967 году Т. Моцкин:

$$F(x,y)=x^2y^2(x^2+y^2-3)+1.$$

При $x\cdot y=0$ очевидно $F(x,y)=1$. Считая $x\cdot y\neq 0$, имеем: x^2, y^2, $\frac{1}{x^2y^2}$ положительны. Так как $x^2\cdot y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}=1$, то по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}}{3}\geq\sqrt[3]{x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=1,$$

откуда $F(x,y)\geq 0$ уже всюду. Пусть

$$F(x,y)=\sum f_j^2(x,y),$$

где $f_j(x,y)$ — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда $1=F(x,0)=\sum f_j^2(x,0)$ и $f_j(x,0)=c_j$, откуда $f_j(x,y)=c_j+y\cdot g_j(x,y)$. Аналогично $f_j(x,y)=c_j'+x\cdot g_j'(x,y)$. Естественно $c_j'=c_j$ и $f_j(x,y)=c_j+xy\cdot h_j(x,y)$. Следовательно,

$$x^2y^2(x^2+y^2-3)+1=x^2y^2\sum h_j^2(x,y)+2xy\sum c_jh_j(x,y)+\sum c_j^2$$

или

$$x^2y^2(x^2+y^2-3)-x^2y^2\sum h_j^2=2xy\sum c_jh_j+\sum c_j^2-1. \qquad (*)$$

Очевидно, что

$$\deg h_j=\deg f_j-2\leq\frac{1}{2}\deg F-2=1.$$

Таким образом многочлен в правой части (*) имеет степень не выше 3, а все одночлены в левой части — степень не ниже 4. Это влечет соотношение

$$x^2y^2(x^2+y^2-3)-x^2y^2\sum h_j^2\equiv 0\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2-3\equiv\sum h_j^2.$$

Однако при $x=y=0$ тогда $-3=\sum h_j^2(0,0)\geq 0$. Противоречие и показывает невозможность представления $x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$ в виде суммы квадратов многочленов.

В 1978 году А. Лакс и Д. Лакс показали, что функция пяти переменных $x_1,\ldots,x_5$

$$\sum_{i=1}^{5}\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$$

неотрицательна и непредставима в виде суммы квадратов многочленов. Нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов и функцию

$$x_1^2+\cdots+x_n^2+1.$$

Вместе с тем Гильберт показал, что любой неотрицательный многочлен четвёртой степени от двух переменных представим в виде суммы трёх квадратов многочленов.

В 1927 году Е. Артин доказал, что любой неотрицательный многочлен представим в виде суммы квадратов рациональных функций (отношений двух многочленов). Тем самым был дан положительный ответ на вопрос, поставленный в семнадцатой проблеме.

В 1965 году А. Пфистер доказал, что число слагаемых в теореме Артина для многочлена от n переменных не превосходит 2^n.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к семнадцатой проблеме Ю. И. Манина, С. 196–199).

[2] Прасолов В. В. Сумма квадратов многочленов. Математическое образование, № 1 (8), 1999. С. 29–44.

[3] Прасолов В. В. Семнадцатая проблема Гильберта. Математическое образование, № 1 (8), 1999. С. 45–66.

Проблема № 18. Построение пространства из конгруэнтных многогранников

Рассмотрим группу $\mathbb{G} = \{g\}$ движений евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, т. е. множество преобразований, сохраняющих расстояние между двумя точками и величину угла между двумя прямыми. Групповой операцией является последовательное выполнение двух движений.

Группа движений называется *дискретной* если существуют точка $A \in \mathbb{E}^n$ и число $r > 0$, что если $0 < \rho(A, g(A))$, $g \in \mathbb{G}$, то $\rho(A, g(A)) > r$.

Множество $\Phi \subset \mathbb{E}^n$ называется *фундаментальной областью группы* $\mathbb{G}$, если

1) для любых $A, B \in \Phi$, $A \neq B$ и любого $g \in \mathbb{G}$: $B \neq g(A)$;

2) для любой точки $C \in \mathbb{E}^n$ существуют такие $A \in \Phi$ и $g \in \mathbb{G}$, что $C = g(A)$.

Всякая дискретная группа $\mathbb{G}$ движений $\mathbb{E}^n$ с конечной фундаментальной областью Φ называется n-мерной пространственной *кристаллографической группой.*

В восемнадцатой проблеме Гильберт задаёт два вопроса:

1. Существует ли n-мерном евклидовом пространстве только конечное число существенно различных типов групп движений с фундаментальной областью?

2. Существуют ли многогранники, не являющиеся фундаментальными областями групп движений, с помощью которых возможно заполнить всё пространство без пробелов, укладывая конгруэнтные экземпляры этих многогранников?

Ещё одно определение. Две кристаллографические группы называются одинаковыми, если в них можно выбрать декартовы реперы одной ориентации, что все движения в этих реперах описываются одними и теми же линейными выражениями. Если можно найти такие реперы только различной ориентации, то группы называются энантиоморфными.

Было установлено, что на плоскости имеется 17 различных кристаллографических групп, а в трёхмерном пространстве 230, из которых 11 имеют энантиоморфные парные им группы.

Вывод 230 трёхмерных пространственных кристаллографических групп был независимо сделан в 1890–1891 годах Е. С. Фёдоровым и Шёнфлисом.

Если к условиям дискретности и конечности фундаментальной области добавить требование существования в $\mathbb{G}$ n-мерной подгруппы $\mathbb{T}$ параллельных переносов, то конечность множества кристаллографических групп, т. е. положительный ответ на первый вопрос Гильберта, легко следует из одного простого соображения, высказанного в 1911 году Фробениусом.

Существование подгруппы $\mathbb{T}$ при $n = 2$ доказывается тривиально. Для $n = 3$ это сделали Шёнфлис в 1891 и Цассенгауз в 1948 годах. Доказательства трудные и пока простые не найдены. Для $n > 3$ существование подгруппы $\mathbb{T}$ доказал в 1910–1912 годах Бибербах и, тем самым, дал положительный ответ на первый вопрос из восемнадцатой проблемы.

В 1948 году Цассенгауз дал вычислительный алгоритм нахождения всех n-мерных кристаллографических групп. Но этот алгоритм предполагает известными все неэквивалентные конечные группы n-мерных целочисленных матриц. Для $n = 2$, $n = 3$ они давно известны, но при $n > 3$ удобного алгоритма для их вычислений нет.

На второй вопрос из восемнадцатой проблемы в 1928 году дал ответ Рейнгардт: существуют многогранники, не являющиеся фундаментальными областями групп движений, конгруэнтными экземплярами которых можно заполнить пространство.

В вопросе какими могут быть выпуклые многогранники, являющиеся фундаментальными областями групп движений, даже для $n = 3$ не всё до конца выяснено. В 1961 году Б. Н. Делоне доказал, что при дополнительном требовании, чтобы конгруэнтные сдвиги имели бы смежные $(n-1)$-мерные грани — так называемое *нормальное разбиение*, при любом n существует только конечное число топологически различных разбиений.

В восемнадцатой проблеме Гильберт ставит и вопрос как наиболее плотным образом расположить в пространстве бесконечное множество одинаковых тел, например, шаров фиксированного радиуса, или правильных тетраэдров с заданным ребром или в предписанном положении. Плотное расположение это такое, при котором «отношение заполненной части пространства к незаполненной максимально».

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к восемнадцатой проблеме Б. Н. Делоне, С. 200–203).

Проблемы №№ 19, 20

Обладает ли каждое дифференциальное уравнение Лагранжа в частных производных для регулярной вариационной задачи тем свойством, что оно допускает только аналитические интегралы (№ 19)?

Допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача, если только на данные граничные условия наложены определённые допущения и если, в случае необходимости, самому понятию решения придать расширенное толкование (№ 20)?

Такими словами формулирует Д. Гильберт задачи №№ 19 и 20, которые рассматриваются комментаторами вместе.

Сформулированные задачи касаются свойств решений вариационной задачи вида

$$\iint\limits_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \to extr \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = p,\ \frac{\partial u}{\partial y} = q\right).$$

Если функция $u(x,y)$ даёт этому функционалу хотя бы слабый экстремум, то она удовлетворяет уравнению Лагранжа (Эйлера – Лагранжа)

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0$$

при дополнительном требовании существования непрерывного второго дифференциала у $u(x,y)$ (упрощающее требование). Одновременно необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 \geq 0.$$

Гильберт формулирует условие

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0.$$

и называет подобную вариационную задачу *регулярной*.

Аргументами в пользу положительного ответа на вопрос в девятнадцатой проблеме является аналитичность решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

являющегося уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала

$$\iint_D (p^2+q^2)dxdy$$

и исследование задачи Лагранжа (1760–1761) о минимальных поверхностях, сводящаяся к нахождению минимума функционала

$$\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy.$$

В 1904 году С. Н. Бернштейн показал, что решение регулярной задачи аналитично, если F — аналитическая и решение $u(x,y)$ — трижды непрерывно дифференцируемо.

В 1912 году Лихтенштейн ослабил это условие до $\mathbb{C}^2_\gamma$, $0<\gamma<1$, т. е. вторые производные удовлетворяют условию Гёльдера порядка γ:

$$|f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)|\le C\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^\gamma.$$

В 1926 году Хаар ослабил требование гладкости решения до $\mathbb{C}^1_\gamma$ а в 1938 году Морри — до $\mathbb{C}^0_1$ (класс Липшица). Однако получить решение девятнадцатой проблемы этим не удалось, поскольку все известные способы построения минимизирующих последовательностей для функционала не позволяют установить принадлежность их членов классу $\mathbb{C}^0_1$.

В современной постановке рассматриваются функционалы вида

$$\int_D F\left(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_k;J_1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right),\ldots,J_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right)dx_1\cdots dx_n,$$

где $J_s\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ — функции от всех первых производных неизвестных функций по всем независимым переменным. При чем рассматриваются *обобщенные* решения, как и говорил Гильберт в двадцатой проблеме.

Значительное продвижение в 1959–1961 годах осуществили О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева. Они нашли достаточные условия на стационарную (обращающую в нуль первую вариацию функционала) вектор-функцию u из класса Соболева, гарантирующие принадлежность u классу $\mathbb{C}\beta^l$ с $l\ge 2$, $\beta>0$, если F также из этого класса. Из этого результата и одного результата И. Г. Петровского 1939 года при условии аналитичности F следует и аналитичность обобщенного решения u вариационной задачи при априорном требовании принадлежности его W^1_α.

Даже в задаче о поверхности наименьшей площади при отсутствии требований на гладкость граничных условий существование решения вида $u(x,y)$ гарантируется лишь при выпуклости области D. Однако, если рассматривать параметрическое задание поверхности, то решение существует всегда.

С. Н. Бернштейн рассматривал вариационные задачи, для которых функция разлагается в ряд однородных относительно (p,q) многочленов и показал, что необходимым условием существования решения уравнения Эйлера – Лагранжа является степенной рост F относительно $\sqrt{p^2+q^2}$ быстрее первой степени.

Обобщенные решения вариационных задач фактически предложил в 1902 году А. Лебег. Эти исследования были продолжены Л. Тонелли (1929, 1933) и Морри (1943).

Можно сказать, что при некоторых условиях на функцию на вопросы девятнадцатой и двадцатой проблем ответы положительные.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий к девятнадцатой и двадцатой проблемам А. Г. Сигалова, С. 204–215 и комментарий О. А. Олейник к девятнадцатой проблеме, С. 216–219).

[2] Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М.: ГИТТЛ, 1955.

Проблема № 21. Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии

Решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dz} = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}(z) \cdot y_j, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{$*$}$$

с рациональными коэффициентами не являются, вообще говоря однозначными и мероморфными в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{P}$. Индивидуальное решение имеет конечное множество изолированных особых точек, входящее в множество $\{z_1, \dots, z_k, z_0 = \infty\}$, где $z_1, \dots, z_k$ — полюсы всех функций $R_{ij}(Z)$. Это можно усмотреть уже из простейших примеров:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2z} y \;\Rightarrow\; y = \lambda \cdot \sqrt{z}; \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{z^2} y \;\Rightarrow\; y = \lambda \cdot e^{1/z}.$$

Группа монодромии системы (*) — это группа матриц C порядка $n \times n$, определяемая следующим образом. Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{P} \setminus \{z_1, \dots, z_k, z_0\}$, $\tilde{z} \in \mathbb{G}$ и $Y(z)$ — фундаментальная матрица решений системы (*), определённая в окрестности $\tilde{z}$. Если γ — замкнутая кривая с началом в $\tilde{z}$, то при аналитическом продолжении вдоль γ матрица $Y(z)$ переходит в $Y(z) \cdot C_\gamma$, где C_γ — постоянная матрица $n \times n$. При этом, если γ_1 и γ_2 гомотопны, т. е. существует семейство непрерывных отображений $\varphi(t)$, $0 \le t \le 1$ таких, что $\varphi(0)\gamma_1 = \gamma_1$, $\varphi(1)\gamma_1 = \gamma_2$, то $C_{\gamma_1} = C_{\gamma_2}$. Если же $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, например, при обходе γ_2 точки ветвления, то $C_\gamma = C_{\gamma_1} \cdot C_{\gamma_2}$. Следовательно отображение $\gamma \to C_\gamma$ является гомоморфизмом *фундаментальной группы области* $\mathbb{G}$ в общую линейную группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — группу матриц $n \times n$ с комплексными элементами. Образ этого гомоморфизма и называется *группой монодромии* $\mu(\tilde{z}, \mathbb{C})$ системы (*).

При этом $\mu(\tilde{z'}, \mathbb{C}) = T^{-1}\mu(\tilde{z}, \mathbb{C})T$, где T — постоянная матрица. Если γ содержит внутри особую точку z_m, то для матрицы $C^{(m)}$ преобразований фундаментальной системы решений справедливо соотношение Римана

$$C^{(0)} \cdot C^{(1)} \cdots C^{(m)} = E,$$

где E — единичная матрица $n \times n$.

В 1857 году Б. Риман поставил обратную задачу: пусть задан произвольный гомоморфизм фундаментальной группы области $\mathbb{G} = \mathbb{P} \setminus \{z_1, \dots, z_k, z_0\}$ с заранее выбранными точками $z_1, \dots, z_k$, $z_0 = \infty$ в группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Существует ли однородная линейная система n дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными коэффициентами (т. е. вида (*)), для которой какая-то фундаментальная система решений порождает данный гомоморфизм. Более того, Риман предположил, что можно выбрать систему фуксова типа:

$$\frac{dy_i}{dz} = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_{ij}}{z - z_j} y_j, \qquad i \in \{1, \dots, k\}.$$

В том же 1857 году Риман в положительном смысле решил эту задачу для $k = n = 2$ и явно указал нужную систему.

В 1884 году А. Пуанкаре, а в 1905 и 1906 годах Л. Шлезингер решали задачу Римана, но их доказательства содержали пробелы и не были строгими. На неточности указал И. Племель, который, используя теорию фредгольмовых интегральных уравнений, в 1908 году дал полное решение для любых k и n. Отметим, что в 1900 и 1905 годах Гильберт рассмотрел случай $n = 2$ и k — любое.

В 1913 году Г. Биркгоф также дал полное решение задачи Римана, используя не интегральные уравнения, а одну аппроксимационную теорему. Кроме того, Биркгоф доказал ранее им же сформулированное обобщение задачи Римана – Гильберта (такое название установилось после 1900 года, когда Гильберт включил задачу Римана в число 23-х проблем).

В 1957 году Рёрль доказал утверждение Римана уже для случая мероморфных коэффициентов, определённых на произвольной компактной или некомпактной римановой поверхности.

Отметим, что задача вычисления групп монодромии далеко не является простой. Группы монодромии вычислены для уравнения Эйлера

$$z^n \frac{d^n y}{dz^n} + a_1 \cdot z^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_{n-1} z \frac{dy}{dz} + a_n \cdot y = 0$$

и для уравнения Паперитца

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right) + \\ + \left(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right) y = 0,$$

где $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$; a, b, c — попарно различные комплексные числа α, α', β, β', γ, γ' — так называемые характеристические показатели в точках a, b, c. Естественно, следует записать уравнения в виде систем.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий Ч. Рёрля к двадцать первой проблеме. С. 220–223).

[2] Математическая энциклопедия. Советская энциклопедия (в пяти томах). М.: 1978–1985).

Проблема номер 22. Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций

Напомним, что автоморфной функцией называется мероморфная,т. е. имеющая только изолированные особенности типа полюсов, функция одного или нескольких комплексных переменных, определённая в связной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^n$), инвариантная относительно дискретной группы Γ автоморфизмов этой области (например, повороты круга $|z| < 1$ на углы $\frac{2\pi}{m} \cdot k$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$) так что

$$f(\gamma(z)) = f(z), \qquad z \in D, \quad \gamma \in \Gamma.$$

А. Пуанкаре доказал, что для любого алгебраического уравнения с двумя переменными найдутся две автоморфные функции одного комплексного переменного z, которые превращают уравнение в тождество по $z \in D$ после подстановки в уравнение вместо переменных.

Затем Пуанкаре предпринял попытку обобщить ту теорему на случай произвольного аналитического соотношения между двумя переменными.

Эту задачу и формулирует Гильберт как двадцать вторую проблему. В 1907 году почти одновременно П. Кёбе и А. Пуанкаре решили упомянутую задачу.

Позже, кроме подхода Пуанкаре, были найдены геометрические подходы к решению (Р. Неванлинна).

Менее разработана проблема униформизации соотношений с более чем двумя переменными.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий Б. В. Шабата к двадцать второй проблеме. С. 224).

Проблема № 23. Развитие методов вариационного исчисления

В данной проблеме Гильберт не формулирует конкретных задач, а говорит о важности вариационного исчисления для всей математики и даже для естествознания в целом. Таким образом, исследования вопросов вариационного исчисления объявляется приоритетным.

Обратимся к комментариям Л. Э. Эльсгольца к двадцать третьей проблеме, содержащимся в многократно цитированной книге «Проблемы Гильберта».

Отмечается, что к началу XX столетия было завершено исследование необходимых, а также достаточных условий в задачах с неподвижными, подвижными границами, в задачах на условный экстремум. Рассматривались задачи с ломанными экстремалями, исследовались поля экстремалей.

В начале XX столетия изучалась в работах Больца, Каратеодори, Блисса и других так называемая задача Больца:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx + g(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0); x_1, y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1)) \to \min$$

при связях

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0,\ \ldots,\ \varphi_m(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0,\ m < n$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0); x_1, y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1)) = 0,\ \ldots,\\
&\psi_p(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0); x_1, y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1)) = 0,\\
&p \le 2n + 2.
\end{aligned}$$

Развивались прямые методы вариационного исчисления, пионером которых следует назвать ещё Л. Эйлера. В 1909 году В. Ритц предложил метод поиска приближенного решения вариационных задач в виде

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \cdot w_k(x),$$

где функции $w_1(x), \ldots, w_l(x)$ заранее выбираются.

В работах Н. Н. Боголюбова (старшего) и Н. М. Крылова получены достаточные оценки погрешности в методе Ритца. При обсуждении девятнадцатой и двадцатой проблем упоминались работы Ладыженской и Уральцевой, в которых использовались прямые методы.

Развивались качественные топологические методы исследования вариационных задач. Основное внимание обращалось на оценки снизу числа решений вариационной задачи и более простой — оценке снизу числа критических точек функции, заданной на замкнутом многообразии и, в некоторых ситуациях на областях евклидовых пространств. В 1925 и 1931 годах такие оценки получил М. Морс. Затем он перенёс эти результаты на оценки числа решений ряда вариационных задач.

В 1927 году Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман оценили снизу число геометрически различных, без учёта кратностей, критических точек с помощью нового топологического инварианта — гомотопической категории. Гомотопическая категория замкнутого множества A относительно содержащего его многообразия M — наименьшее число замкнутых множеств из M, объединение которых содержит A и каждое можно стянуть в точку с помощью непрерывной деформации M. Затем они обобщили этот результат на случай функционалов и оценили число решений ряда вариационных задач. В частности, в 1928 году они доказали, что на всякой трижды дифференцируемой гомеоморфной сфере поверхности существует не менее трёх замкнутых несамопересекающихся геодезических линий различной длины. Совпадение длин возомним лишь при появлении континуума геодезических той же длины (как на сфере). В 1941–1943 годах Люстерник, используя результаты А. Н. Колмогорова и Александера, вычислил длину некоторых функциональных пространств и оценил снизу число решений ряда вариационных задач. Например, доказал, что на поверхности, гомеоморфной n-мерной сфере, существует не менее $(n+1)$ замкнутых несамопересекающихся геодезических.

Понятия вариационного исчисления были перенесены на обладающие некоторыми свойствами функционалы в линейных нормированных пространствах.

Во второй половине XX столетия бурное развитие вариационного исчисления привело к появлению нового раздела математики — теории оптимальных процессов, имеющего важные практические применения. В связи с этим следует назвать прежде всего Л. С. Понтрягина и А. А. Андронова и их последователей и учеников В. Г. Болтянского, Е. Ф. Мищенко, Р. В. Гамкрелидзе, А. А. Фельдбаума, Н. Н. Красовского, А. Г. Бутковского и других. Из зарубежных математиков — Р. Беллмана.

Литература

[1] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969 (комментарий Л. Э. Эльсгольца к двадцать третьей проблеме. С. 225–238).

Рубинштейн Александр Иосифович,
профессор, доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Университета Леса,
141005, Московская обл., Мытищи-5,
1-я Институтская ул., 1, МГУЛ.

Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона

А. И. Щетников

Статья посвящена алгоритму разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства, открытому древнегреческими математиками.

1. Источники, в которых описан “алгоритм Никомаха”

Настоящая статья посвящена алгоритму разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства, открытому древнегреческими математиками. Этот алгоритм известен нам по двум неопифагорейским трактатам II в. н. э. и позднейшим комментариям к ним; однако его безымянный автор жил в гораздо более раннюю эпоху, не позднее III в. до н. э., а скорее всего, даже раньше — предположительно в IV в. до н. э., во времена Платона и его школы.

Самое раннее сочинение, в котором сохранилось описание этого алгоритма — это *Введение в арифметику*, созданное Никомахом Геразским, видным неопифагорейцем, жившим в первой половине II в. н. э. Никомах описывает этот алгоритм весьма подробно, однако это описание лишено каких-либо обоснований и доказательств. Комментируя перевод *Введения в арифметику* на русский язык, я стал называть алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства “алгоритмом Никомаха”. Возможно, это название не слишком удачно, поскольку Никомах не является автором этого алгоритма; однако мы будем пользоваться им ради краткости.

В последующие века *Введение в арифметику* много раз комментировалось и переводилось на другие языки. До нас дошли комментарии Ямвлиха (III в.), Иоанна Филопона (VI в.) и некоторых других авторов. Во всех этих комментариях устройство алгоритма излагается по исходному тексту Никомаха, без восстановления доказательств.

Второе важное для нашей темы сочинение написано Теоном Смирнским, младшим современником Никомаха; это *Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона*. Алгоритм Никомаха описан в нем по той же самой схеме, что и во *Введении в арифметику*, однако более кратко. Эта краткость компенсируется тем, что Теон, в отличие от Никомаха, имеет обыкновение называть тех авторов, у которых он заимствует свои материалы. Он указывает два текста, в которых “алгоритм Никомаха” был описан ранее. Во-первых, это сочинение перипатетика Адраста, жившего в I в. н. э., из которого Теон вообще много чего позаимствовал. Во-вторых, это *Платоник* Эратосфена, знаменитого александрийского ученого, жившего в III в. до н. э. Об Эратосфене у Теона сказано, что он “опустил доказательства”. Зато об Адрасте говорится, что он сопровождал доказательствами некоторые свои рассуждения.

2. Отрывки из “Платоника” Эратосфена

Теон Смирнский в нескольких местах своего *Изложения* пересказывает ряд отрывков из *Платоника* Эратосфена. По содержанию этих отрывков можно предположить, что Эратосфен в *Платонике* уделил большое внимание роли пропорций, отношений и интервалов в философских построениях Платона.

(81) Эратосфен в *Платонике* говорит, что интервал и отношение — не одно и то же, поскольку отношение задается двумя величинами, образующими сопряжение между собой, и оно возникает как

между различными, так и между неразличимыми вещами. К примеру, как чувственно воспринимаемое относится к умопостигаемому, так и мнение к знанию, и здесь различны как умопостигаемое и знание, так и мнение и чувственно воспринимаемое. Интервал же — только между различными, будь то по величине, по качеству, по положению или как-нибудь еще. Поэтому очевидно, что отношение отлично от интервала: ведь отношение половины к двукратному и двукратного к половине не одно и то же, а интервал здесь один...

(83) Эратосфен говорит, что природным началом пропорции является отношение, и оно служит первопричиной упорядоченного рождения. Пропорция исходит из отношения, а началом отношения является равенство. И это очевидно. Во всяком особом роде имеется свой элемент и начало, в который все прочее разрешается, он же неразложим... Для количества элементом служит единица, для размеров — точка, для отношения и пропорции — равенство. Ведь единица неделима по количеству, точка — по размерам, равенство — по множеству отношений...

(107) Эратосфен говорит, что всякое отношение возрастает или по интервалу, или своими членами; но равенству никакой интервал не причастен, так что оно может возрастать лишь своими членами. Взяв три величины, составим из них пропорцию и покажем, что вся математика состоит из количественных пропорций, и что [равенство] является началом, элементом и природой пропорции...

(111) Эратосфен доказывает, что все фигуры также составляются по некоей пропорции, и это составление также начинается с равенства и разрешается в равенство. Но об этом сейчас говорить нет нужды.

3. Классификация числовых отношений

Для понимания дальнейшего надо рассмотреть классификацию соотнесённых количеств, изложенную у (111) Никомаза Геразского и (111) Теона Смирнского. Согласно этой классификации, "для соотнесённого количества наивысшим родовым деле-нием является деление на равенство и неравенство". При этом "неравное подлежит разделению, и одно будет большим, а другое меньшим". И далее, "большее подразделяется на пять видов, каковые суть многократное (πολλαπλάσιον), сверхчастное (ἐπιμόριον), сверхмногочастное (ἐπιμερές)(03), многократно-и-сверхчастное (πολλαπλασιεπιμόριον), многократно-и-сверхмногочастное (πολλαπλασιεπιμερές)" (Введение I 17, 2-7).

Эти пять видов отношения большего к меньшего можно определить с помо-щью описанной в Началах ЕВКЛИДА процедуры отыскания наибольшей общей меры двух величин. Сами греки называли эту процедуру ἀνθυφάιρεσις — по-следовательное взаимное отнятие.

Возьмем две величины $A > B$ и вычтем B из A; теперь мы будем иметь две величины B и $C = A - B$. Если они равны друг другу, то тогда C будет наибольшей общей мерой A и B. В противном случае возьмем B и C и вычтем меньшую величину из большей; мы будем иметь новую пару величин, и т. д. Если это последовательное взаимное отнятие завершится на каком-нибудь шаге равенством получившихся величин, последний остаток и будет служить наибольшей общей мерой начальной пары A, B.

Приведем теперь описание пяти видов отношения большего к меньшему. Всюду ниже $m > 1$, $1 < k < n$, и k взаимно просто с n.

1) Многократное отношение — когда меньший член отношения укладывается в большем целое число раз. В общем виде это отношение представимо как $\frac{m}{1}$.

2) Сверхчастное отношение — когда меньший член укладывается в большем один раз, а образовавшийся остаток нацело укладывается в меньшем члене. В общем виде это отношение представимо как $1 + \frac{1}{n}$.

3) Сверхмногочастное отношение — когда меньший член укладывается в большем один раз, и процедура взаимного вычитания еще не заканчивается на следующем шаге. В общем виде это отношение представимо как $1 + \frac{k}{n}$.

4) Многократно-и-сверхчастное отношение — когда меньший член укладывается в большем более одного раза, а образовавшийся остаток нацело укладывается в меньшем члене. В общем виде это отношение представимо как $m + \frac{1}{n}$.

5) Многократно-и-сверхмногочастное отношение — когда меньший член укладывается в большем более одного раза, и процедура взаимного вычитания еще не заканчивается на следующем шаге. В общем виде это отношение представимо как $m + \frac{k}{n}$.

Что касается отношения меньшего к большему, оно образуется из отношения большего к меньшему перестановкой его членов.

Конечно, вся эта классификация соотнесенных количеств охватывает только отношения, представимые натуральными числами; отношения несоизмеримых величин остаются за ее пределами.

4. “Алгоритм Никомаха”: перевод текста

В 23 главе I книги и 1–2 главах II книги Никомах Геразский описывает алгоритм, позволяющий единообразно и систематически разворачивать все числовые отношения из отношения равенства “как из матери и корня”, а также сводить их к отношению равенства “как элементарной основе для всякого неравенства”.

Книга I, глава XXIII

...И этот стройный и необходимый путь к познанию природы вселенной ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определенное и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределенным, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределенного приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и делаются доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноименность. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, ее порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит ее к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества.

Теперь нам нужно как следует рассмотреть природу этой теоремы, согласно которой можно доказать, что все виды неравенства и их подразделения сводятся к первому и единственному равенству, как к их матери и корню.

Пусть нам даны равные числа по три, и первыми будут единицы, затем три двойки, затем тройки, четверки, пятерки, и сколь угодно далее. И из них, прямо-таки по божественному, а не по человеческому повелению, а иначе сказать — по самой природе, первыми возникают многократные, а из них сперва двукратные, затем трехкратные, затем четырехкратные, затем пятикратные, и этот порядок мы можем продолжать до бесконечности. Вторыми же — сверхчастные, и здесь сначала появляется первый вид, полуторное, за ним сверхтретье, а за ним прямо по порядку идут сверхчетвертное, сверхпятерное и далее аналогично до бесконечности. Третьими — сверхмногочастные, и здесь сначала появляются сверхдвухчастные, а прямо за ними сверхтрехчастные, сверхчетырехчастные, сверхпятичастные, и сколь угодно далее в том же порядке.

И тебе нужны такие правила, которые будут подобны неизменным и нерушимым законам природы, и по которым все вышеназванное будет расходиться во все стороны от равенства без каких-либо исключений. И эти правила таковы: “Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего”. И если ты будешь действовать по этому закону, ты сначала получишь по порядку все виды многократного, исходя из трех членов равенства, и они взойдут и вырастут без твоей помощи и участия; причем непосредственно из равенства возникнет двукратное, затем из двукратного — трехкратное, из трехкратного — четырехкратное, из него — пятикратное, и так далее всегда в том же порядке.

А из этих многократных, если переставить их члены, прямо-таки по природной необходимости применением этих же трех правил возникают сверхчастные, причем не случайно и беспорядочно, но в присущей им последовательности. И из переставленного первого двукратного возникает первое полуторное, из второго трехкратного — второе в своем порядке сверхтретье, и сверхчетвертное — из четырехкратного, и далее названные по именам следующих.

И опять, из этих упорядоченных сверхчастных, если переставить их члены, естественно возникают сверхмногочастные: из полуторного — сверхдвухчастное, из сверхтретьего — сверхтрехчастное, из сверхчетвертного — сверхчетырехчастное, и далее до бесконечности по этой же аналогии.

А если члены не переставлять, то прямо из этих же упорядоченных сверхчастных по тем же правилам возникают многократно-и-сверхчастные: двукратное-и-половинное из первого полуторного, двукратное-и-сверхтретье из второго сверхтретьего, двукратное-и-сверхчетвертное из третьего сверхчетвертного, и так далее.

Итак, из сверхчастных с перестановкой членов возникают сверхмногочастные, а без перестановки — многократно-и-сверхчастные, и это происходит одним и тем же способом и по одним и тем же правилам, но либо с сохранением порядка членов, либо с обращением его, и получившиеся числа показывают остальные сопряжения.

Описанное выше упорядоченное производство, которое идет либо в прямом порядке, либо с перестановкой членов, мы рассмотрим теперь на примерах.

Из сопряжения и пропорции полуторного, переставленного так, чтобы оно начиналось с большего члена, составляется сверхмногочастное сверхдвухтретье сопряжение; а если оно прямо начинается с меньшего члена, то получается многократно-и-сверхчастное сопряжение, а именно двукратное-и-половинное. К примеру, из 9 6 4 получается 9 15 25 либо 4 10 25. Из сверхтретьих, когда они начинаются с большего члена, в сверхмногочастном получается триждысверхчетвертное, а когда с меньшего — двукратное-и-сверхтретье. К примеру, из 16 12 9 получается 16 28 49 либо 9 21 49. Из сверхчетвертных, когда они начинаются с превосходящего члена, в сверхмногочастном получается четыреждысверхпятерное, а когда с меньшего члена, во многократно-и-сверхчастном получается двукратное-и-сверхчетвертное. К примеру, из 25 20 16 получается 25 45 81 либо 16 36 81.

И в том, что получается обоими способами, последний член всегда является одним и тем же квадратом, а первый оказывается наименьшим, и оба крайних всегда являются квадратами.

А относящиеся к другим видам сверхмногочастные или многократно-и-сверхмногочастные получаются иным образом из сверхмногочастных. Так из дваждысверхтретьих, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-дваждысверхтретьи; а когда начинаются с большего — триждысверхпятерные. Так из 9 15 25 получается либо 9 24 64, либо 25 40 64. А из триждысверхчетвертных, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-триждысверхчетвертные; а когда начинаются с большего — четыреждысверхседьмые. К примеру, из 16 28 49 получаются либо 16 44 121, либо 49 77 121. И также из четыреждысверхпятерных, каковы 25 45 81, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-четыреждысверхпятерные, каковы 25 70 196: а когда начинаются с большего — пятьюсверхдевятые, каковы 81 126 196. И аналогичные согласованные результаты можно продолжать до бесконечности.

Книга II, глава I

Элементом называется и является то последнее, из чего все слагается и на что все разлагается (к примеру, буквы являются элементами звучащей речи, ибо из них слагается произносимая речь и на них она в итоге разлагается; а звуки являются элементами мелодии, ибо из них она изначально слагается и на них разлагается; а так называемыми общими элементами всего космоса являются четыре простых тела: огонь, вода, воздух и земля, — ведь из них как из первых состоит вся природа, и на них же мы ее в конце концов мысленно разлагаем). Мы показали, что равенство является элементом для соотнесенного количества; а для количества самого по себе первоначальными элементами являются единица и двойка, из которых как их последних все слагается до бесконечности и на которые мы мысленно все разлагаем.

Мы также показали, что распространение и нарастание неравного идет от равенства, и что оно прямо упорядочено по всем сопряжениям согласно трем правилам. И чтобы показать, что равенство поистине является элементом, осталось продемонстрировать, что разложение завершается на нем же. Рассмотрим для этого нашу процедуру.

Книга II, глава II

Представь себе три члена в любом сопряжении и пропорции, будь оно многократным, или сверхчастным, или сверхмногочастным, ими многократно-и-сверхчастным, или многократно-и-сверхмногочастным, лишь бы только средний член относился к меньшему так же, как больший к среднему. Вычти меньший член из среднего, будь он по порядку первым или же последним, и установи меньший член первым членом твоей новой прогрессии; на второе место установи то, что осталось от второго члена после вычитания; а потом вычти сумму нового первого члена и удвоенного нового второго члена из оставшегося, наибольшего из данных членов, и установи разность третьим членом, — и получившиеся числа будут иметь некоторое новое сопряжение, более примитивное по природе.

И если ты снова таким же способом произведешь вычитание этих трех членов, ты обнаружишь, что они преобразуются в три новых члена более примитивного вида; и ты найдешь, что эта последовательность будет всегда продолжаться, пока не дойдет до равенства. А отсюда с необходимостью становится очевидным, что равенство является элементом для соотнесенного количества.

5. Диаграмма Никомаха для трехчленных сопряжений

Описанный Никомахом алгоритм преобразует трехчленную геометрическую прогрессию (Никомах называет ее “сопряжением и пропорцией”) в две новые трехчленные геометрические прогрессии по следующему правилу: *“Положи первый член равным первому, второй равным* *сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего"*. При этом одна прогрессия получается прямо из исходной, а другая — из исходной при перестановке ее членов в обратном порядке.

Дадим здесь обоснование этого правила. Всякая несократимая трехчленная геометрическая прогрессия имеет вид $a^2 : ab : b^2$, где НОД $(a, b) = 1$ (Евклид, *Начала*, VIII 2). Действие алгоритма будем изображать графически, в виде процедуры с одним входом и двумя выходами (рис. 1). На левом выходе исходная прогрессия преобразуется по правилу Никомаха в трехчленное сопряжение $a^2 : (a^2 + ab) : (a^2 + 2ab + b^2)$, что после группировки членов дает $a^2 : a(a+b) : (a+b)^2$; и это новое сопряжение тоже является геометрической прогрессией. Соответственно на правом выходе при перестановке членов образуется трехчленная геометрическая прогрессия $b^2 : b(a+b) : (a+b)^2$.

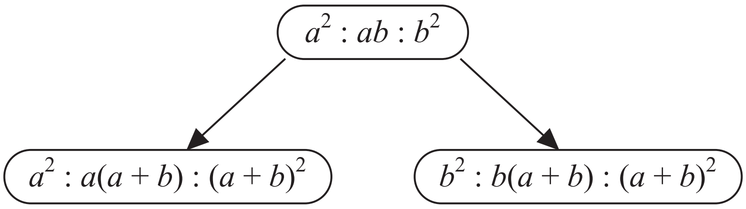

Рис. 1

Подадим на вход алгоритма Никомаха "корневую" тройку из трех единиц и рассмотрим корневое двоичное дерево результатов. На рис. 2 изображены несколько уровней левой ветви этого дерева; правая ветвь симметрична левой, и показывать ее на схеме нет необходимости.

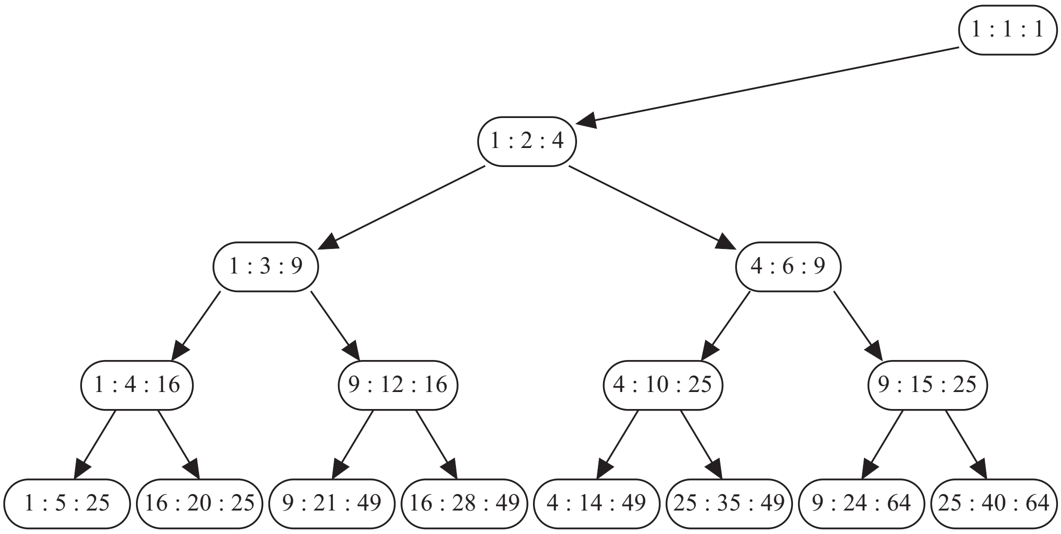

Рис. 2

6. Реконструкция "примитивной" формы алгоритма Никомаха

Теперь мы опишем алгоритм Никомаха в максимально рафинированном виде, не загроможденном дополнительными деталями, а также сформулируем относящуюся к нему фундаментальную теорему и докажем ее. Сам Никомах рассматривает числовые тройки; мы же упростим ситуацию и будем рассматривать числовые пары, задающие отношение соседних членов в трехчленных геометрических прогрессиях. Кроме того, мы не будем переставлять члены в получающихся числовых парах.

В такой интерпретации алгоритм Никомаха превращается в вычислительную процедуру с одним входом и двумя выходами, преобразующую упорядоченную пару натуральных чисел в две другие упорядоченные пары натуральных чисел по следующему правилу: *"на левом выходе левое число равно сумме чисел на входе, а правое число равно правому числу на входе; на правом выходе левое число равно левому числу на входе, а правое число равно сумме чисел на входе"* (рис. 3).

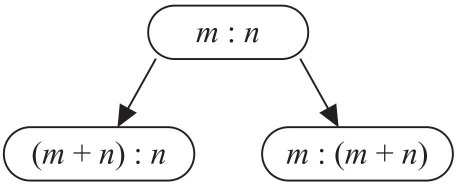

Рис. 3

Подадим на вход алгоритма Никомаха “корневую” пару из двух единиц и рассмотрим двоичное дерево результатов (мы будем называть это дерево “диаграммой Никомаха”). На рис. 4 изображены несколько уровней левой ветви этого дерева; правая ветвь устроена симметрично, и мы ее изображать не будем.

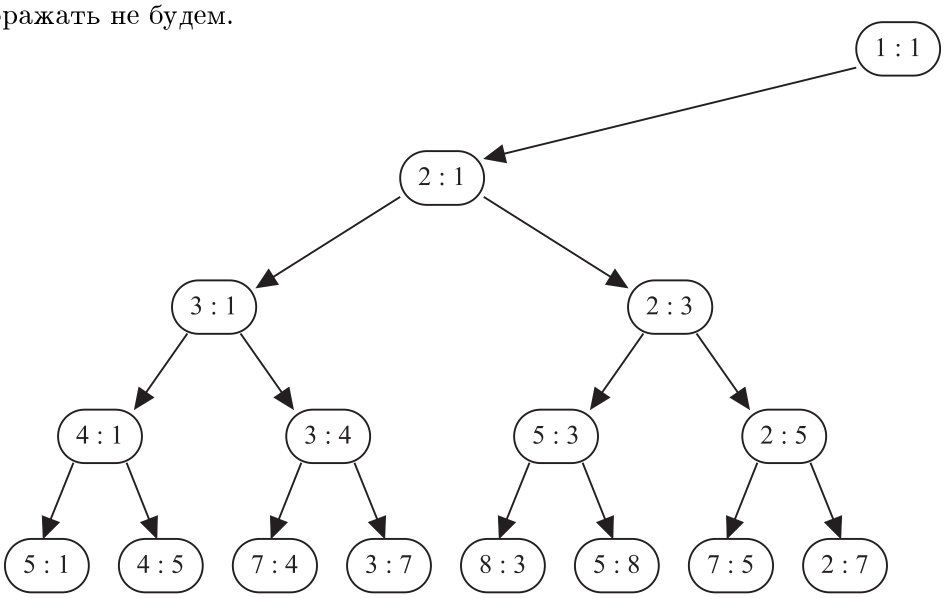

Рис. 4

Для геометрического представления алгоритма Никомаха очень удобна схема “наращивания квадратов”. Представим корневое отношение 1 : 1 единичным квадратом. Далее на каждом шаге алгоритма будем к уже имеющемуся прямоугольнику приставлять квадрат: на левом выходе — по длине прямоугольника, на правом выходе — по его ширине. Порождаемые при этом числовые отношения

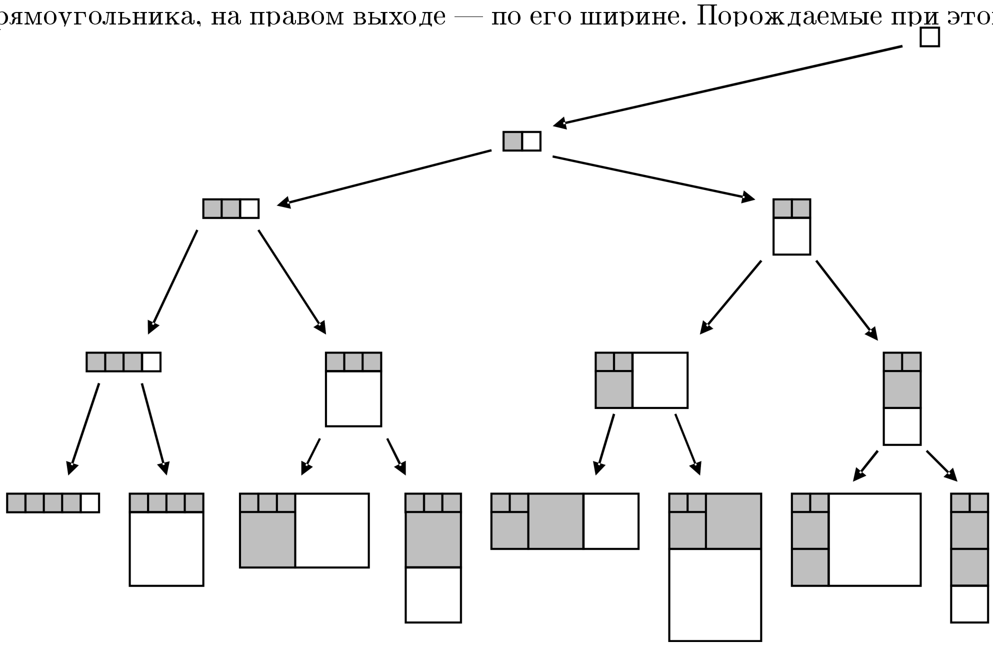

Рис. 5

7. Фундаментальная теорема

Основное свойство диаграммы Никомаха задается следующей теоремой.

Теорема. Диаграмма Никомаха устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех узлов дихотомического дерева и множеством всех упорядоченных пар взаимно простых чисел.

Лемма. Каждому шагу диаграммы Никомаха вверх по направлению к корню соответствует одно элементарное вычитание меньшего числа из большего в алгоритме Евклида для поиска наибольшей общей меры двух чисел.

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что всякие два числа, стоящие в произвольном узле диаграммы Никомаха, являются взаимно простыми. В самом деле, применяя к этим числам алгоритм Евклида, мы будем последовательно подниматься вверх по диаграмме вплоть до корневого узла, в котором находится отношение 1 : 1. Получается, что наибольшей общей мерой чисел рассматриваемого узла является единица, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что всякая упорядоченная пара взаимно простых чисел стоит в одном и только в одном узле диаграммы Никомаха. Действительно, для каждой упорядоченной числовой пары алгоритм Евклида дает последовательность взаимных вычитаний, которую можно описать на языке перемещений по диаграмме Никомаха вверх, к корню: “q_0 шагов вправо; q_1 шагов влево, ... , q_{n-1} шагов вправо, $q_n - 1$ шагов влево, стоп”. (Здесь q_0 может быть равно нулю; если n является четным, то последние $q_n - 1$ шагов делаются влево, если же n является нечетным, то последние $q_n - 1$ шагов делаются вправо.) Эта цепочка шагов, обращенная назад от корня (“$q_n - 1$ шагов вправо, q_{n-1} шагов влево, ... , q_1 шагов вправо, q_0 шагов влево, стоп”) однозначно определяет местоположение данной числовой пары на диаграмме, что и требовалось доказать.

К примеру, несократимое отношение 47 : 14 с помощью алгоритма Евклида разлагается в непрерывную дробь

$$\frac{47}{14} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}}.$$

Последовательность неполных частных 3; 2, 1, 4 задает движение от отношения 47 : 14 к корневому отношению 1 : 1 вверх по цепочке “3 шага вправо, 2 шага влево, 1 шаг вправо, 3 шага влево, стоп”. Поэтому от корневого отношения 1 : 1 к отношению 47 : 14 ведет обращенная цепочка “3 шага вправо, 1 шаг влево, 2 шага вправо, 3 шага влево, стоп” (рис. 6).

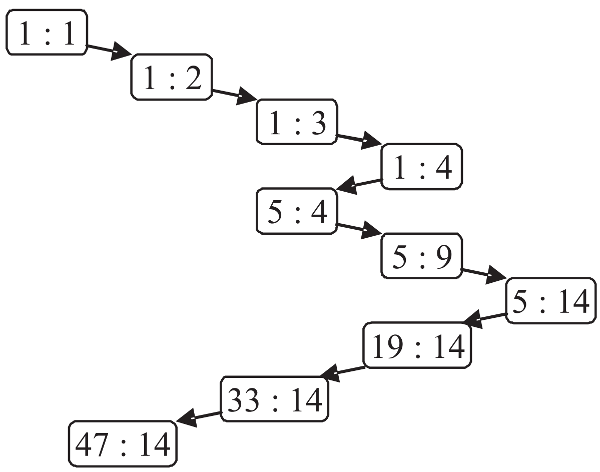

Рис. 6

8. Геометрическое представление алгоритма Никомаха для трехчленных сопряжений

Чтобы понять, почему Никомах рассматривает трехчленные сопряжения, а не более простые в обращении двучленные числовые отношения, вспомним о пифагорейской геометрической интерпретации трехчленной геометрической прогрессии, известной по *Тимею* Платона:

Два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и то, что связано, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция (31b8–c4).

Описанную Никомахом процедуру построения новых трехчленных сопряжений мы изобразим теперь графически (рис. 7), пользуясь приемами "геометрической алгебры", изложенными во II книге *Начал* Евклида.

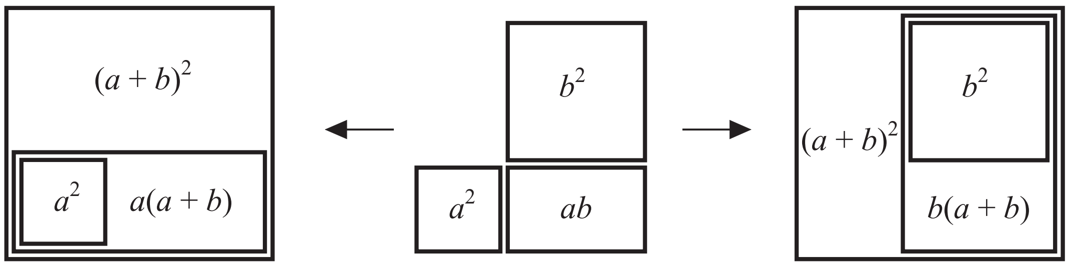

Рис. 7

Представим исходное трехчленное сопряжение в виде двух квадратов a^2 и b^2, построенных на сторонах "сопрягающего" прямоугольника ab. В новых сопряжениях меньший член остается тем же квадратом a^2 или b^2, а в качестве большего члена берется квадрат $(a + b)^2$; при этом "сопрягающим" членом оказывается в первом случае прямоугольник $a(a + b)$, во втором случае прямоугольник $b(a + b)$.

Такие трехчленные сопряжения могут быть помещены на схему "наращивания квадратов" (рис. 8). Здесь каждый отдельный чертеж с рис. 5 достроен до квадрата, и теперь три члена сопряжения суть (a) только что прибавленный малый квадрат, (b) возникший при этом прибавлении прямоугольник, (c) большой квадрат. И если на рис. 5 двучленное отношение задавалось числами единичных отрезков, укладывавшихся по длине и ширине получавшихся прямоугольников, то теперь трехчленное сопряжение задается числами единичных квадратов, укладывающихся в соответствующие квадраты и прямоугольники.

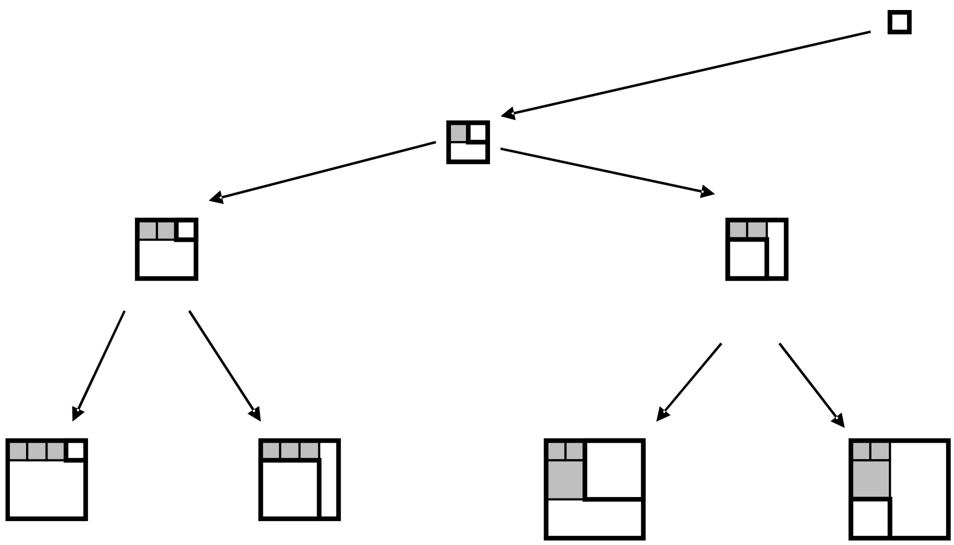

Рис. 8

9. Алгоритм Никомаха как возможная математическая основа неписаного учения Платона

Согласно предположению, выдвинутому в начале 1960-х годов представителями тюбингенской историко-философской школы Г.-И. Кремером (Krämer 1959) и К. Гайзером (Gaiser

1963), пифагорейская система двух бытийных начал — единицы как начала тождества и формы и неопределенной двоицы как принципа инаковости и материи — была положена Платоном в основу его неписаного учения, изустно передававшегося в Академии. (См. также Findley 1974.)

Большая часть античных упоминаний о "неписаных учениях" Платона так или иначе связана с лекцией Платона *О благе*. Аристоксен во второй книге *Гармоники* пишет:

Вот что, по словам Аристотеля, испытали многие, слышавшие лекцию Платона *О благе*: все они пришли узнать о том, что у людей называется благом, — о богатстве, здоровье, силе, вообще о каком-нибудь необычайном счастье. Но это оказались речи о математических науках и числах, о геометрии и астрономии, и наконец о том, что благо есть единое. И речи эти показались им парадоксальными, поэтому одни отнеслись к этому с пренебрежением, другие поносили его (39_8–40_4).

Симпликий в своем *Комментарии к Физике Аристотеля* пишет следующее:

Александр [Афродизийский] сообщает, что согласно Платону, начала всего и самих идей — это единое и неопределенная двойка, которую он называл большим и малым, как об этом упоминает Аристотель в сочинении *О благе*. А тот получил кое-что от Спевсиппа, Ксенократа и от других, присутствовавших на лекции Платона *О благе*; и все они записали и сохранили его мнение, и сообщили, что он пользовался такими началами. И то, что Платон назвал единое и неопределенную двойку началом всего, весьма правдоподобно (ведь это учение пифагорейцев, а Платон во многом следовал за пифагорейцами), и он сделал неопределенную двойку также началом идей, называя ее большим и малым, чтобы обозначить так материю (151_{6-15}).

В другом месте Симпликий еще раз возвращается к этой теме:

Платон называл единое и так называемую неопределенную двойку первыми началами чувственных вещей. Он также утверждал, что неопределенная двойка является умопостигаемой, назвав ее беспредельным; и он положил началами большое и малое, также назвав их беспредельным в своей лекции *О благе*, как об этом сообщают Аристотель, Гераклид и Гестий и другие друзья Платона, присутствовавшие там и записавшие эти загадочные речи (453_{25-29}).

Александр Афродизийский в *Комментарии к Метафизике Аристотеля* (987b33) также ссылается на книгу Аристотеля *Облаге*:

Он сказал, что начала чисел суть единица и двойка. И поскольку среди чисел есть единица и идущие за ней, а эти последние бывают многим и немногим, и первое за единицей содержится в них, он установил ее началом многого и немногого. Но за единицей первой идет двойка, и в ней заключено как многое, так и немногое: ведь двойное — это многое, а половинное — немногое, и они оба содержатся в двойке. А она противоположна единице, поскольку является делимой, а единица неделима. И он пытался показать, что равенство и неравенство являются началами всего сущего и противоположного ему (он ведь доискивался, как свести все к самому простому). Равенство он связал с единицей, а неравенство с избытком и недостатком: ведь неравенство бывает двояким, в большом и в малом, в превосходящем и в недостающем (56_{7-17}).

В свете вышеизложенного мы можем увидеть в алгоритме Никомаха математическую иллюстрацию к неписаному учению Платона, воплощающую тезис о двух началах всего сущего — единице и неопределенной двойке, которая есть большое и малое. В самом деле, здесь весь "космос" рациональных отношений иерархически разворачивается из первоначального отношения равенства в рамках единообразной процедуры дихотомического ветвления. Этому ветвлению нигде не положен предел, поэтому раздвоение путей в каждом узле является в прямом смысле слова неопределенным. Далее, нисходящие пути, идущие в обе стороны от каждого узла, уходят один в сторону большего, а другой в сторону меньшего отношения, к "превосходящему и недостающему". Опять же, отношения, получаемые на некоторых нисходящих путях, могут сколь угодно близко подойти к отношению равенства, никогда не сравниваясь с ним; неопределенность большего и меньшего проявляется также и в этом плане.

Еще раз прочитаем текст, которым Никомах предваряет описание алгоритма:

И этот стройный и необходимый путь к познанию природы вселенной ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определенное и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределенным, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределенного приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и делаются доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноименность. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, ее порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит ее к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества (I 23.4–5).

Сам этот пассаж можно рассматривать как своего рода квинтэссенцию платоновской философии. В нем можно усмотреть отсылки и к *Филебу* с его диалектикой предела, беспредельного и меры, и к мифу о разумной и двух неразумных частях души, который Платон устами Сократа рассказывает в *Федре*, и к многократно повторенному в *Государстве* утверждению о том, что познание математических наук влечет душу от становления к бытию.

У нас есть даже некоторые основания предположить, что первоисточником этого пассажа мог служить текст платоновской лекции *О благе* в передаче Аристотеля. В самом деле, в последнем предложении этого отрывка речь идет непосредственно о благе и этических добродетелях. Надо думать, что "математическая" лекция Платона *О благе* также должна была заканчиваться некоторым схожим выводом, разве что развернутым более подробно.

10. Модель Штенцеля для абсолютных количеств

Безусловный интерес представляет соотнесение приведенной выше реконструкции алгоритма Никомаха с различными моделями идеальных чисел Платона, которые рассматривались в работах Stenzel 1924, 1929, Toeplitz 1929, Becker 1931, 1957 (см. также Паршин 2004 и Маргаритов 2005).

Особенность нашей модели состоит в том, что в ней рассматриваются "соотнесенные количества", а эти авторы пытались строить модели для "количества самого по себе". Наличие двух типов моделей согласуется со следующим свидетельством Никомаха:

Мы показали, что равенство является элементом для соотнесенного количества; а для количества самого по себе первоначальными элементами являются единица и двойка, из которых как их последних все слагается до бесконечности и на которые мы все мысленно разлагаем (II 1.1).

Модель, предложенная Штенцелем, реализует диайретическую схему, изображенную на рис. 9:

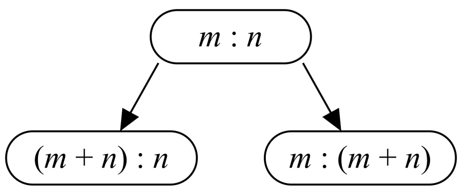

Рис. 9

Здесь для каждого числа n на левом пути строится четное число $2n$, а на правом — нечетное число $2n + 1$. (Греки бы сказали, что четное число строится здесь удвоением, а нечетное — удвоением со вставкой срединной единицы.) Начиная с корневой единицы, по этой схеме выстраивается двоичное дерево, изображенное на рис. 10. В узлах этого дерева расставлены по одному разу все натуральные числа, причем в каждой строке стоят по порядку все числа от 2^n до $2^{n+1} - 1$.

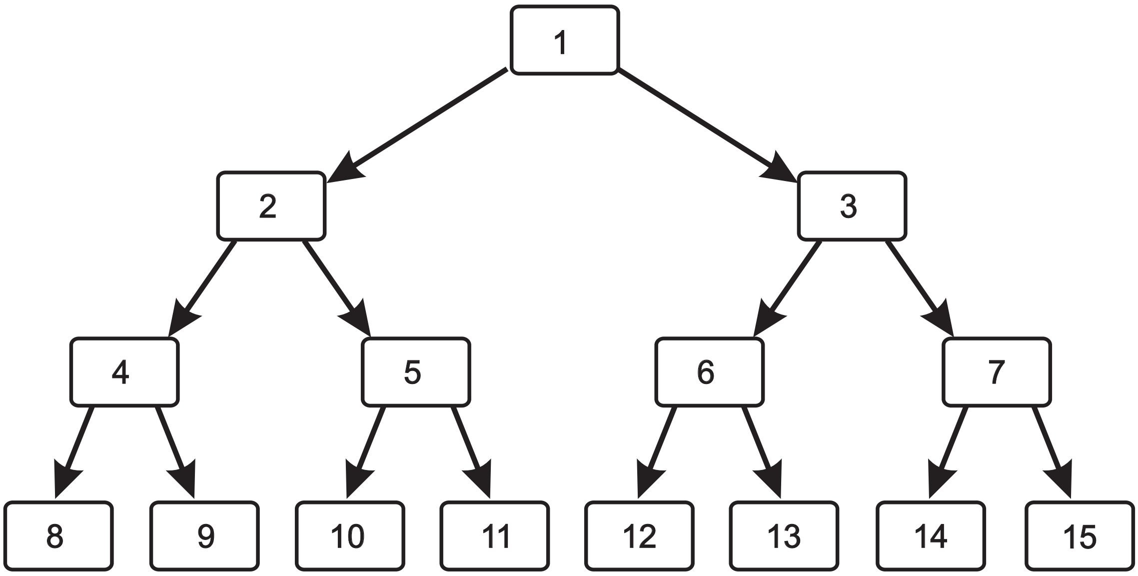

Рис. 10

Если записывать числа на этой схеме не в десятичной, а в двоичной системе счисления, то левой стрелке будет соответствовать приписывание нуля, а правой стрелке — приписывание единицы (рис. 11). Тем самым каждое натуральное число, записанное в двоичной системе счисления, непосредственно кодирует этой записью свое местоположение на двоичном корневом дереве. К примеру, число 1001011 находится в узле, к которому от корневого узла (начальная единица) надо двигаться по пути "влево, влево, вправо, влево, вправо, вправо". Здесь каждому нулю соответствует движение влево, каждой единице — движение вправо.

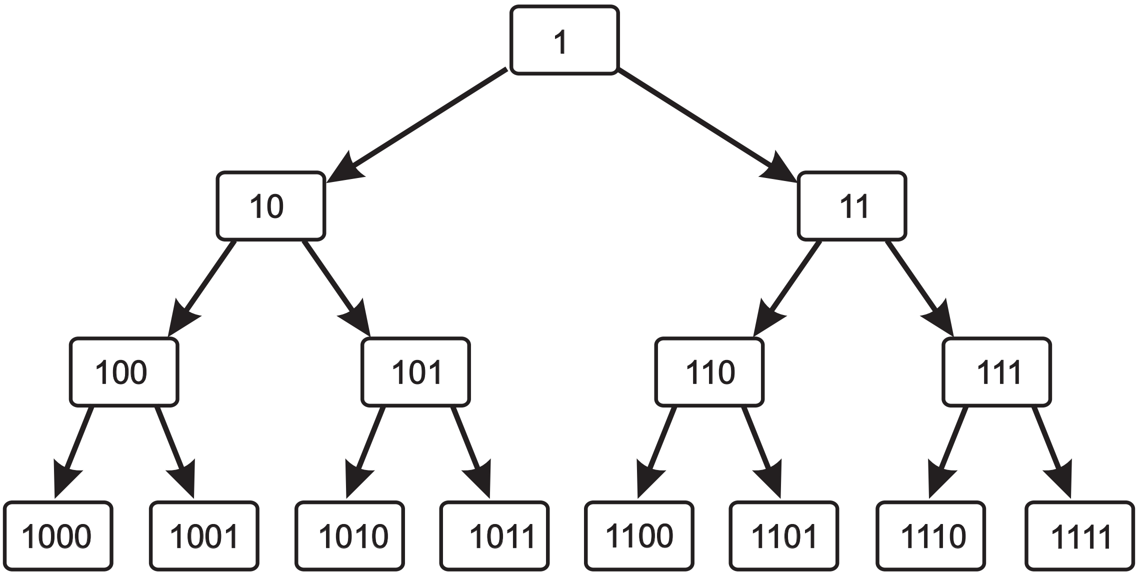

Рис. 11

Предложенная Штенцелем схема диайретического порождения натуральных чисел была построена с целью истолкования ряда смутных указаний, которые Аристотель дает в *Метафизике* касательно идеальных чисел Платона. Никаких описаний этой схемы в античных текстах не сохранилось, так что неизвестно, мыслил ли Платон и его последователи процесс порождения натуральных чисел именно так или как-то иначе. Со схемой порождения всех рациональных отношений дела обстоят существенно иным образом, — ведь мы реконструировали ее по нескольким дошедшим до нас описаниям. Так что обе схемы дополняют друг друга и доставляют материал для дальнейших исследований.

Библиография

Беккер О. Диайретическое порождение платоновых идеальных чисел. *Историко-математические исследования*, **9(44)**, 2005, с. 288–330. (Перевод статьи: Becker O. Die diairetische Erzeugung der Platonischen Idealzahlen. *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B**1**, 1931, s. 464–501.)

Маргаритов В. С. Оскар Беккер и "идеальные числа" Платона. *Историко-математические исследования*, **9(44)**, 2005, с. 282–287.

Паршин А. Н. Идеальные числа Платона (к вопросу об интерпретации). *Владимир Соловьев и культура серебряного века.* М.: Наука, 2004.

Becker O. Zum Problem der Platonischen Idealzahlen (eine Retraktation). *Klassische philologische Studien*, **17**, 1957, s. 1–25.

Findley J. N. *Plato. The written and unwritten doctrines.* London: Routledge & Kegan Paul, 1974.

Gaiser K. *Platons Ungeschriebene Lehre.* Stuttgart: Klett, 1963.

Krämer H. J. *Arete bei Platon und Aristoteles: Zum Wesen und zur Geschichte der platonischen Ontologie.* Heidelberg, 1959.

Stenzel J. *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles.* Leipzig-Berlin, 1924 (Reprinted: Darmstadt, 1959).

Stenzel J. Zur Teorie des Logos bei Aristoteles. *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B**1**, 1929, s. 34–66.

Toeplitz O. Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon. *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, B**1**, 1929, s. 3–33.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта "Школа Пифагора",
Центр образовательных проектов "СИГМА",
Новосибирск.

Email: pythagor@ngs.ru

<u>Информация</u>

От редакции

1. О введении в состав редакционной коллегии Игоря Петровича Костенко

На заседании редакционной коллегии, состоявшемся 13 июля 2007 года, по результатам голосования (5 голосов за, 3 воздержались) в состав редакционной коллегии введен Игорь Петрович Костенко. Поздравляем нового члена редколлегии и желаем ему успешной работы!

Биографическая справка

КОСТЕНКО Игорь Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент; Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС) (филиал в г. Краснодаре) — доцент кафедры "Высшая математика-1". Действительный член Международной педагогической академии.

ЧИТАЕМЫЕ КУРСЫ: общий курс высшей математики для технических специальностей.

ОБЛАСТЬ НАУЧНЫХ ИНТЕРЕСОВ: функциональный анализ, педагогика математики (дидактика учебной книги), история отечественного математического образования.

КОЛИЧЕСТВО ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ: более 85.

НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫЕ ПУБЛИКАЦИИ:

1. О рефлексивности некоторых соединений полуупорядоченных пространств // ДАН. — 1967. — Т. 177, № 4.

2. Почти равномерная сходимость в K-пространствах // Известия ВУЗов. — 1968. — № 2.

3. Признаки совершенности пространств последовательностей // Известия ВУЗов. — 1973. — № 5.

4. О психологии понимания // Вестник высшей школы. — 1986. — № 10.

5. Педагогические проблемы учебника математики // Вестник высшей школы. — 1988. — № 5.

6. Аудиторная самостоятельная работа студентов с учебным текстом // Высшее образование в России. — 1995. — № 1.

7. Вузовский учебник: суть проблемы, корни // Университетская книга. — 1997. — № 6.

8. Вузовский учебник: история реформы-60 // Университетская книга. — 1997. — № 8.

9. Вузовский учебник: монополия антидидактики //Университетская книга. — 1997. — № 9.

10. Стратегическая задача российского образования и политизированная педагогика // "Alma Mater". — 1997. — № 7.

11. Мысли о реформах российского образования // "Alma Mater". — 1999. — № 5. В соавт. с проф. И. П. Выродовым.

12. Проблема проблем // "Alma Mater". — 2000. — № 7. В соавт. с проф. И. П. Выродовым.

13. Система работа кафедры со студентами-заочниками // Труды КубГТУ. — 2000. — Т. VIII.

14. Ностальгия по Киселёву. Сравнение математических умений школьников 90-х и 40-х годов // Учительская газета. — 2001. — № 44. В соавт. с учительницей Н. М. Захаровой.

15. Кризис образования и проблема гуманизации // Материалы конференции “Гуманитаризация среднего и высшего математического образования” — Саранск. — 2002.

16. Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений. Москва-Ижевск Институт компьютерных исследований. 2004, 316 стр.

17. Вузовский учебник математики: узел проблем // Педагогика. — 2005. — № 9.

18. Почему надо вернуться к Киселёву? // Математическое образование. — 2006. — № 3(38).

E-MAIL: kost@kubannet.ru

2. Замеченные опечатки в № 2(42), 2007 г.

Страница 56, ссылка 25. Напечатано: “Фукс Д. Б., Фукс М. Б. *О наилучших приближениях.* — № 11, 1971.”

Следует читать: “Фукс Д. Б., Фукс М. Б. *О наилучших приближениях.* — “Квант”, № 11, 1971.”

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167. E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2007 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2007 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents