Н. Н. Константинов, О несамопересекающихся кривых на плоскости, *Матем. сб.*, 1961, том 54(96), номер 3, 253–294

О несамопересекающихся кривых на плоскости

Н. Н. Константинов (Москва)

§ 1. Формулировка результатов

1.1. В настоящей работе рассматриваются некоторые свойства несамопересекающихся кривых, расположенных на ограниченном куске эвклидовой плоскости. Эти свойства с некоторой новой точки зрения характеризуют плоскость в отношении того, насколько она является «топологически просторным» множеством.

Настоящая работа содержит два формально не связанных результата.

1) Построен пример кривой ограниченной кривизны* и бесконечной длины, несамопересекающейся и расположенной на ограниченном куске плоскости, обладающей тем свойством, что каждая окрестность каждой ее точки пересекается с кривой более, чем по одной компоненте.

2) Для формулировки второго результата (сформулированного в теореме А, пункт 1.5) введем несколько вспомогательных понятий.

1.2. Пусть O — открытый круг диаметра 1, а A и B — концы некоторого его диаметра. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две несамопересекающиеся ломаные, каждая из которых имеет одним концом точку A, другим — B и вся, за исключением этих точек, принадлежит O. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные отображения отрезка $[0, 1]$ оси t на дуги соответственно Γ_1 и Γ_2, при которых выполняются следующие условия:

$$f_1(0) = A, \quad f_2(0) = A, \quad f_1(1) = B, \quad f_2(1) = B.$$

Число

$$\delta(\Gamma_1, \Gamma_2) = \inf_{f_1, f_2} [\sup_{t \in [0,1]} \rho(f_1(t), f_2(t))],$$

где нижняя грань берется по совокупности всевозможных отображений $f_1(t)$ и $f_2(t)$, удовлетворяющих вышеназванным условиям, называется *отклонением дуг* Γ_1 и Γ_2.

1.3. Таким образом определенное отклонение отличается от расстояния по Фреше тем, что здесь не требуется монотонности функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Отклонение удовлетворяет всем аксиомам метрики, что легко проверяется.

---

* Кривая $r(t)$ $(0 \leqslant t < +\infty)$, построенная в настоящей работе, обладает непрерывно вращающейся касательной $r'(t)$ и ограниченной кривизной в следующем смысле: существует число $\rho > 0$ такое, что для каждого $t_0 > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что все точки $r(t)$, где $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$, лежат вне суммы двух открытых кругов радиуса ρ, касающихся с разных сторон кривой $r(t)$ в точке $r(t_0)$. Однако из приведенной в § 2 конструкции видно, что тем же способом можно построить кривую, обладающую кривизной в обычном смысле в каждой точке, причем эта кривизна ограничена по всей кривой.

1.4. Множество R ломаных $\{\Gamma\}$, соединяющих внутри круга O точки A и B, сделаем метрическим пространством, положив расстояние между его элементами равным их отклонению в вышеопределенном смысле. Оказывается, это пространство не является вполне ограниченным: существует бесконечное множество его элементов, попарно удаленных более, чем на $\frac{1}{2}$ (пример см. в п. 1.6).

Далее рассматривается одно условие, при котором подпространство пространства R будет вполне ограниченным. Для его формулировки введем понятие вращения ломаной от точки до точки. Пусть c_i — отрезки, из которых состоит ломаная Γ, занумерованные в порядке их расположения на Γ от точки A к точке B, причем отрезки будем считать направленными в соответствии с этим порядком. Пусть α_i — угол между векторами c_i и c_{i+1}, причем берется угол, меньший π, и он считается положительным, если поворот вектора c_i, совмещающий его по направлению с вектором c_{i+1}, производится против часовой стрелки. Пусть x — точка ломаной Γ. Вращением ломаной Γ от точки A до точки x называется $U_\Gamma(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i$, где c_k — отрезок, содержащий x (будем для определенности считать все отрезки c_i, кроме c_0, открытыми слева). В этих терминах для полной ограниченности подпространства пространства R достаточно, чтобы вращение ломаных из этого подпространства было по модулю ограничено некоторой константой равностепенно по всем возможным значениям x и по всем ломаным из этого подпространства. Иначе говоря, имеет место следующая теорема:

1.5. Теорема А. *Пусть ε — произвольное положительное число, Ψ — некоторая совокупность дуг из R, попарно удаленных больше, чем на ε, и пусть N — произвольное положительное число. Пусть $|U_\Gamma(x)| < N$ при всех $\Gamma \in \Psi$ и при всех $x \in \Gamma$. Тогда совокупность Ψ содержит ограниченное число элементов, зависящее от ε и N.*

Следует обратить внимание на то, что в определении вращения ломаной суммируются углы α_i, а не их абсолютные значения.

1.6. Пример, показывающий, что требование ограниченности вращений существенно в теореме А.

На рисунке 1 показано построение бесконечной системы дуг $\{\Gamma_i\}$, попарно удаленных больше, чем на $\frac{1}{6}$. На этом рисунке отрезок AB имеет длину 1; точка c имеет координаты $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$; угол DAO выбирается достаточно малым с тем расчетом, чтобы строящаяся далее спираль не пересекала отрезка AD. Построение осуществляется в два этапа.

Первый этап. Строится система ломаных $\Gamma_0, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2, \widetilde{\Gamma}_3, \ldots$, как показано на рисунке. Все ломаные симметричны относительно серединного перпендикуляра к диаметру AB. Точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ расположены так, что отрезок $D\alpha_k$ составляет $\frac{1}{k+1}$ часть отрезка DO. Точки $O, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ расположены на серединном перпендикуляре к диаметру AB на равных расстояниях друг от друга, равных 0,3.

Второй этап. Кривая $NF_1ME_1\ldots$ представляет собой спираль, накручивающуюся на окружность диаметра $\frac{1}{6}$ с центром в точке c. Спираль должна принадлежать кругу I и не пересекать отрезка AD. Спираль в сумме с отрезком MN делит плоскость на три части. Ту из них, которая ограничена и выходит к отрезку MN, обозначим через Π. Открытую полуполосу, ограниченную лучами Mm, Nn и отрезком MN, обозначим через $\widetilde{\Pi}$. Опре-

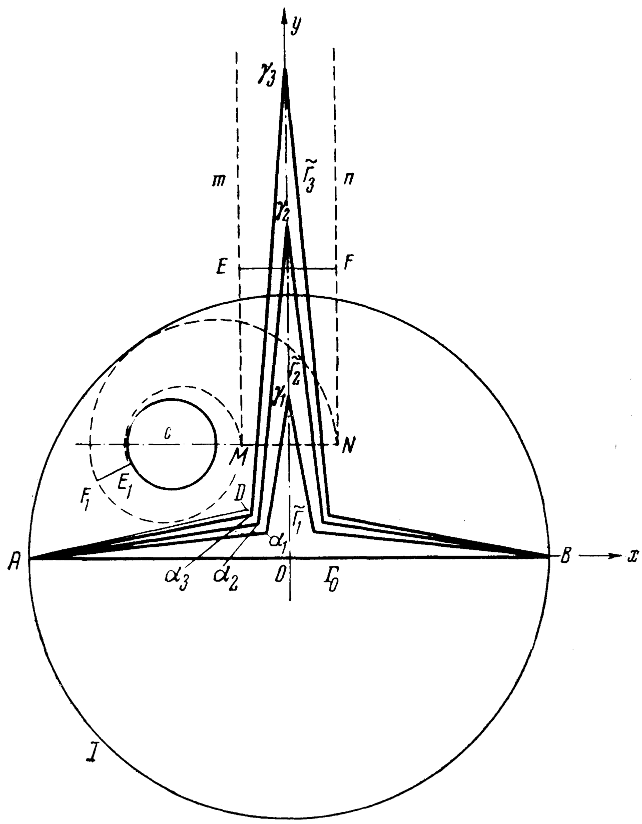

Рис. 1

делим отображение $\widetilde{\Pi}$ на Π следующим образом. Луч Mm укладываем на спираль, начиная от точки M в сторону точки E_1 монотонно с сохранением длины. Затем каждый отрезок, параллельный AB и принадлежащий $\widetilde{\Pi}$, укладываем в Π на отрезок, продолжение которого проходит через точку c и который в Π также протягивается от одной границы Π до другой, причем положение одного конца этого отрезка уже определено укладкой луча Mm. Укладка одного из таких отрезков — EF показана на рисунке: E_1F_1 есть образ отрезка EF. Отрезок MN при этом отображении остается на месте.

Применим теперь это отображение к частям ломаных $\{\widetilde{\Gamma}_i\}$, попавшим внутрь области $\widetilde{\Pi}$. Образно говоря, сматываем в клубок все части ломаных $\{\widetilde{\Gamma}_i\}$, лежащие выше прямой MN, с той целью, чтобы все наши ломаные поместились в круге I. Образы ломаных $\{\widetilde{\Gamma}_i\}$ при этом отображении — это и будут дуги $\{\Gamma_i\}$. Легко видеть, что они попарно удалены больше, чем на $\frac{1}{6}$.

1.7. Ниже вводится ряд понятий, необходимых для формулировки теоремы В (см. п. 1.22). Теорема В есть не что иное, как теорема А, сформулированная в терминах, удобных для доказательства. Формально теорема В — более сильная, чем теорема А (на самом деле они, вероятно, эквивалентны). Вывод теоремы А из теоремы В приведен в пп. 3.38, 3.39.

1.8. Пусть координаты вершин квадрата I суть: $(0, 0)$, $(0, \overline{N})$, $(\overline{N}, \overline{N})$, $(\overline{N}, 0)$, где $\overline{N}$ — некоторое фиксированное целое число. Через $M(K, L)$ обозначим открытый квадрат со сторонами, параллельными осям координат, длина стороны которого равна $\frac{1}{5}$ и центр которого есть точка с координатами K, L, где K и L — целые и $0 \leqslant K \leqslant \overline{N}$, $0 \leqslant L \leqslant \overline{N}$, причем для квадратов, пересекающихся с границей I, будем брать только ту их часть, которая принадлежит I. Рассмотрим теоретико-множественную сумму M этих квадратов. Если отрезок x параллелен одной из осей, не пересекается с M и пересекается с замыканием M ровно по двум точкам — его концам, то будем говорить, что x п р и н а д л е ж и т м н о ж е с т в у $\mathfrak{A}$, и будем называть его $\mathfrak{a}$-о т р е з к о м. Множество $\mathfrak{B}$ состоит из отрезков, каждый из которых параллелен одной из осей и, за исключением, быть может, своих концевых точек, входит в M (коротко — из $\mathfrak{b}$-отрезков). Если упорядоченная простая дуга Γ есть сумма конечного числа отрезков из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то говорят, что Γ в х о д и т в D (является D-дугой). Если при этом первый конец Γ принадлежит I' *, а остальные точки Γ принадлежат I, то говорят, что Γ в х о д и т в D_I (является D_I-дугой).

1.9. Два $\mathfrak{a}$-отрезка называются и з о л о к а л ь н ы м и, если их концы принадлежат одним и тем же компонентам $\overline{M}$.

1.10. З а м е ч а н и е. Тем самым множество $\mathfrak{A}$ разбивается на $2\overline{N}(\overline{N}+1)$ классов. Эти классы мы будем называть л о к у с а м и. Все локусы, параллельные оси x, будем считать направленными в сторону положительного направления оси x; аналогично определяется направление локусов, состоящих из отрезков, параллельных оси y. Пусть a — локус. Под символом $-a$ будем понимать тот же локус, взятый с противоположным направлением. Положим, кроме того, $a = +a$.

1.11. О п р е д е л е н и е. Символ $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k$, где $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — локусы, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ принимают значения $+1$ и -1, называется т р а е к т о р и е й, если для любого натурального i, меньшего k, выполняется условие, что вторые (в смысле направления, определяемого коэффициентом a_i) концы отрезков, принадлежащих локусу b_i, лежат на границе той же компоненты множества $\overline{M}$, на которой лежат первые концы отрезков, принадлежащих локусу b_{i+1} (первые в смысле направления этого локуса, определяемого коэффициентом a_{i+1}). В этой сумме разрешается, чтобы один и тот же локус входил несколько раз.

1.12. Всякая дуга Γ из D или из D_I порождает траекторию, являющую-

*Через A' всегда обозначается граница множества A.

ся последовательностью локусов, к которым принадлежат α-отрезки дуги Γ и которые взяты в том порядке и с тем направлением, с которыми эти отрезки входят в Γ. Эту траекторию мы будем обозначать через $S(\Gamma)$.

1.13. Если $x(t)$ — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на Γ, переводящее концы отрезка в концы Γ и монотонное на каждой компоненте множества $x^{-1}(\Gamma \setminus M)$, то это отображение очевидным образом порождает также траекторию, которую будем обозначать через $S(x(t))$.

1.14. Определение. Две дуги Γ_1 и Γ_2 из множества D называются изолокальными, если $S(\Gamma_1) = S(\Gamma_2)$.

1.15. Определение. Пусть S — траектория. Если $S(\Gamma) = S$, где Γ входит в D, то дуга Γ называется осуществлением траектории S. Если при этом окажется, что Γ входит в D_I, то Γ называется I-осуществлением S.

1.16. Определение. Пусть X и Y — две дуги из множества D. Говорят, что $X \leqslant Y$, если существует такое непрерывное отображение $x(t)$ отрезка $[0, 1]$ на X, переводящее точку 0 в первый конец X, а точку 1 — во второй и монотонное на каждой компоненте множества $x^{-1}(X \setminus M)$, что имеет место равенство $S(x(t)) = S(Y)$. Если при этом $S(X) \neq S(Y)$, то говорят, что имеет место строгое неравенство $X < Y$.

1.17. Замечание. Если $X < Y$ по предыдущему определению, то число α-отрезков дуги X меньше числа α-отрезков дуги Y; поэтому не может быть, чтобы одновременно было $Y < X$. Кроме того, легко видеть, что соотношение $\leqslant$ транзитивно, так что множество D оказывается частично упорядоченным.

1.18. Определение. Дуга Γ из D называется элементарной, если для нее нет меньшей дуги. В этом случае говорят, что она входит в $D^э$. Если при этом Γ входит в D_I, то говорят, что она входит в $D_I^э$.

1.19. Обозначение. В дальнейшем за единицу измерения углов всюду берется прямой угол. Пусть Γ — дуга из D_I; $\{c_i\}$ — все составляющие ее отрезки, занумерованные единой нумерацией, начиная от первого конца Γ. Определим функцию $\overline{K}_\Gamma(c_i)$ как $U_\Gamma(x)$, где x — некоторая внутренняя точка c_i. Функция $\overline{K}_\Gamma(c_i)$, рассматриваемая только на отрезках множества $\mathfrak{A}$, обозначается через $K_\Gamma(c_i)$.

1.20. Обозначение. Если E — некоторое множество дуг из D или из D_I, то ${}^N E$ — множество тех дуг из E, для которых $|K_\Gamma(c_i)| \leqslant N$ $(\Gamma \in E)$ для всех отрезков c_i из множества $\mathfrak{A}$, входящих в эту дугу.

1.21. Соотношение эквивалентности, введенное в п. 1.14, определяет разбиение множества D и всех его подмножеств на классы, которые мы будем называть классами изолокальности.

1.22. Теорема В. *Число классов изолокальности множества ${}^N D^э$ конечно при любом N (это число оценивается через N и размеры квадрата I).*

§ 2. Пример к пункту 1.1, 1)

2.1. Рассмотрим бесконечную последовательность, составленную из букв a, b и c по следующему правилу. Первые 4 элемента последовательности суть $abac$. Первое a, b и c считаются дежурными на первом шаге.

Второй шаг состоит в том, что после c пишем опять aba (читаем построенную часть, предшествующую c, в обратном порядке), так что получается $abacaba$, причем на втором шаге снимаем дежурство с первого a, а последнее a теперь считается дежурным, так что всего дежурных букв опять 3. На третьем шаге к построенной части последовательности добавляем ее часть, заключенную между первой дежурной буквой второго шага, включая ее, и последней дежурной буквой второго шага, не включая ее, причем эту часть мы прочитываем справа налево и пишем ее на конце построенной

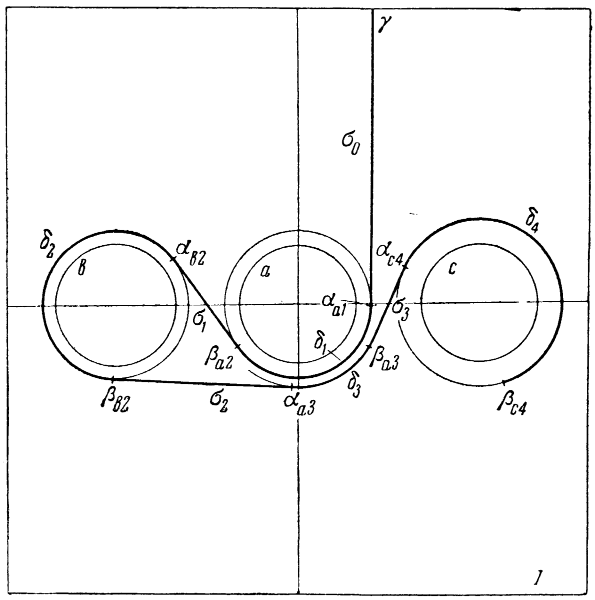

Рис. 2

части. Получается $abacababacab$. После этого снимаем дежурство с первого дежурного второго шага и объявляем последнюю букву части нашей последовательности, построенной на третьем шаге, дежурной третьего шага. Если выполнен k-й шаг построения, причем на k-м шаге какие-то три буквы являются дежурными, в том числе последняя буква, то на $(k+1)$-м шаге к построенной части добавляем прочитанную справа налево ее часть, заключенную между первой и последней дежурными буквами k-го шага, причем в эту часть первая дежурная буква включается, а последняя не включается. После этого мы снимаем дежурство с первой дежурной буквы k-го шага и объявляем последнюю букву построенной на $(k+1)$-м шаге части дежурной $(k+1)$-го шага. Построенная бесконечная последовательность называется р а с п и с а н и е м.

2.2. Пусть a, b, c — окружности единичного радиуса, центры которых лежат на оси x, причем центр окружности b лежит в точке -3, центр окружности a — в точке 0 и центр окружности c — в точке $+3$. Пусть квадрат I имеет стороны, параллельные осям, центр его находится в начале координат и длина его стороны равна 10. Кривую, которую мы будем строить, обозначим через L. Пусть концы отрезка σ_0 суть точки $\gamma\left(1\frac{1}{4},\ 5\right)$ и $\alpha_{a1}\left(1\frac{1}{4},\ 0\right)$. Точка γ есть первая точка кривой L, отрезок σ_0 входит в L. Отрезок $[0, 1]$ множества $T = [0, \infty)$ отобразим линейно на σ_0 так, чтобы точка 0 попала в точку γ. Дальше мы будем пристраивать к σ_0 куски, каждый из которых представляет собой либо часть окружности, либо отрезок. Сразу договоримся, что все множество T, за исключением отрезка $[0, 1]$, мы будем отображать на кривую L за вычетом отрезка σ_0 таким образом, что $t \in T$ будет служить на $L \setminus \sigma_0$ натуральным параметром.

2.3. Проведем окружности $a_{1\frac{1}{4}}$ и $b_{1\frac{1}{4}}$, концентрические соответственно с окружностями a и b и имеющие радиусы, равные $1\frac{1}{4}$. Пусть σ_1 — отрезок общей касательной этих окружностей, заключенный между точками касания, причем берется внутренняя общая касательная с отрицательным угловым коэффициентом (см. рис. 2). Концы этого отрезка — точки β_{a1} и α_{b2}. Нижнюю из дуг $(\alpha_{a1}, \beta_{a1})$ окружности $a_{1\frac{1}{4}}$ обозначим через δ_1. Присоединяем к L дугу δ_1 и отрезок σ_1. Рассмотрим окружность $a_{1\frac{3}{8}}$; здесь число $1\frac{3}{8}$ есть среднее арифметическое между радиусом окружности $a_{1\frac{1}{4}}$ и числом $1\frac{1}{2}$, которое является точной верхней гранью радиусов всех окружностей, участвующих в построении. σ_2 — отрезок общей касательной окружностей $b_{1\frac{1}{4}}$ и $a_{1\frac{3}{8}}$, как указано на рисунке; точки β_{b2} и α_{a3} — концы этого отрезка; δ_2 — дуга $(\alpha_{b2}, \beta_{b2})$ окружности $b_{1\frac{1}{4}}$, лежащая слева от своих концов. Дугу δ_2 и отрезок σ_2 также включаем в L. $c_{1\frac{3}{8}}$ — окружность, концентрическая с окружностью c и имеющая радиус $1\frac{3}{8}$; σ_3 — отрезок общей внутренней касательной окружностей $a_{1\frac{3}{8}}$ и $c_{1\frac{3}{8}}$, имеющий положительный угловой коэффициент; δ_3 — дуга $(\alpha_{a3}, \beta_{a3})$ окружности $a_{1\frac{3}{8}}$, выбранная так, как указано на рисунке. Дугу δ_3 и отрезок σ_3 также включаем в L. $a_{1\frac{7}{16}}$ — окружность, концентрическая с окружностью a и имеющая радиус $1\frac{7}{16}$, являющийся средним арифметическим между радиусом окружности $a_{1\frac{3}{8}}$ и числом $1\frac{1}{2}$. σ_4 — отрезок общей внешней касательной к окружностям $c_{1\frac{3}{8}}$ и $a_{1\frac{7}{16}}$, как указано на рисунке; точки β_{c4} и α_{a5} — его концы; δ_4 — дуга $(\alpha_{c4}, \beta_{c4})$ окружности $c_{1\frac{3}{8}}$, лежащая справа от своих концов. Дугу δ_4 и отрезок σ_4 также включаем в L.

2.4. Дальнейшее построение происходит следующим образом. Дуга L строится из кусков окружностей, концентрических с окружностями a, b и c, и из их общих касательных таким образом, что в точках сопряжения существует касательная; радиусы окружностей, участвующих в построении, заключены между 1 и $1\frac{1}{2}$; каждая такая окружность участвует в построении не более, чем одной своей дугой. Если каждой участвующей в построении дуге поставить в соответствие букву a, b или c, в зависимости от того, какой из окружностей a, b или c эта дуга концентрична, то полученная последовательность букв должна совпасть с расписанием, построенным в п. 2.1. Если в дугу L включена дуга некоторой окружности, концентрической с a, b или c, например с a, и эта дуга имеет радиус, меньший, чем все до сих пор участвовавшие в построении дуги окружностей, концентрических с этой дугой, то направление, в котором эта дуга обходит свой центр, противоположно тому направлению, с которым этот центр обходила уже участвовавшая в построении концентрическая с ней дуга наименьшего радиуса. Если мы включаем в L дугу, концентрическую, например, с a, которая имеет радиус, меньший, чем все участвовавшие до нее в построении дуги, с ней концентрические, то радиус этой дуги равен среднему арифметическому между наименьшим радиусом участвовавших до этого концентрических с ней дуг и числом 1. Если мы включаем в L дугу, концентрическую, например, с a, которая имеет радиус, больший, чем все участвовавшие до нее в построении дуги, с ней концентрические, то радиус этой дуги равен среднему арифметическому между наибольшим радиусом участвовавших до этого концентрических с ней дуг и числом $1\frac{1}{2}$. В остальных случаях включаемая в L дуга, концентрическая, например, с a, имеет радиус, средний арифметический между двумя соседними радиусами дуг, уже участвовавших в построении.

2.5. Легко видеть, что условиями пункта 2.4 все построение дуги полностью определено. L является бесконечной дугой, кривизна которой не больше 1. Остается показать, что каждая точка дуги L, следующая за α_{a1}, обладает свойством 1) п. 1.1.

Из определения расписания видно, что каждая дежурная на некотором шаге буква обладает тем свойством, что последовательность букв, ей предшествующих, читаемая справа налево от нее до самой первой буквы, в точности совпадает с последовательностью букв, которые от этой дежурной буквы идут направо, если эту последовательность взять такой же длины, как первую. Каждую включаемую в L дугу, которая среди уже включенных концентрических с ней дуг имеет наименьший радиус, вместе с прилегающими к ней двумя касательными, будем называть *поворотной дугой*. Каждая поворотная дуга соответствует дежурной букве расписания. После каждой поворотной дуги λ в L идет некоторая дуга R_λ, которая состоит из дуг окружностей и касательных, соотнесенных дугам окружностей и касательным дуги s_λ, предшествующей этой поворотной дуге. (Дуги окружностей называются *соотнесенными*, если они концентричны друг другу; касательные называются *соотнесенными*, если каждая из дуг, которые соединяет одна из них, соотнесена дуге, соединяемой другой.) Пусть q — последняя точка дуги R_λ, выбранная так, чтобы ее расстояние от точки α_{a1} было не больше $\frac{1}{4}$. Дуги R_λ и s_λ можно перевести друг в друга гомотопически, так что каждая точка передвинется не больше, чем на $\frac{1}{4}$, и в процессе преобразования обе дуги останутся несамопересекающимися и не пересекающими друг друга. Заметим, что поворотные дуги имеют чередующееся направление обхода своего центра, поэтому после каждой поворотной дуги следующая за ней часть дуги L проходит мимо всех точек предыдущей части то справа, то слева. При этом очевидно, что расстояние от части кривой L, предшествующей некоторой поворотной дуге, до соответствующей ей части дуги R_λ, следующей за этой поворотной дугой, стремится к нулю при увеличении номера поворотной дуги. Отсюда следует наше утверждение.

§ 3. Доказательство теоремы В

3.1. Определение. Пусть дуга Γ^1 является частью дуги Γ, $\Gamma^1 \in D$. Если $S(\Gamma^1)$ имеет вид

$$c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_kb_k - c_kb_k - \ldots - c_2b_2 - c_1b_1,$$

где $c_m = \pm 1$, а b_m — локусы, то Γ^1 называется дуплетом дуги Γ. Квадрат множества M, последний для c_kb_k (и первый для $-c_kb_k$), называется центром дуплета. Если существует дуплет дуги Γ, последним отрезком множества $\mathfrak{A}$ которого является отрезок a_i, то a_i называется повторителем. В частности, все отрезки множества $\mathfrak{A}$, принадлежащие второй половине некоторого дуплета Γ, являются повторителями.

Определение. Пусть $\Gamma^1 \subset \Gamma$, $\Gamma \in D$. Если $S(\Gamma^1)$ имеет вид

$$c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_kb_k - c_kb_k - \ldots - c_2b_2 - c_1b_1 + c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_kb_k,$$

то Γ^1 называется триплетом дуги Γ.

3.2. Замечание к плану доказательства теоремы В. Ниже доказаны в числе других два утверждения:

a) Элементарная дуга из D_I не содержит триплетов.

b) Если дуга Γ из D_I не содержит триплетов и функция K_Γ на ней ограничена числом p, то число отрезков множества $\mathfrak{A}$, входящих в Γ, ограничено некоторой функцией от p и $\bar{N}$ (где $\bar{N}$ — сторона квадрата I).

Совокупность этих двух утверждений (из которых следует теорема В) можно рассматривать как краткое изложение плана доказательства теоремы В.

3.3. Лемма. *Пусть в дуге Γ, принадлежащей D или D_I, нет триплетов. Пусть в Γ все отрезки множества $\mathfrak{A}$, начиная с w-го, суть повторители. Тогда в Γ за w-м отрезком следует не более $\frac{(w+1)w}{2}$ отрезков множества $\mathfrak{A}$.*

3.4. Доказательство. Будем считать, что подряд занумерованы все отрезки множества $\mathfrak{A}$, входящие в Γ, и индекс k в записи a_k относится к этой нумерации. Каждому отрезку a_k, $k \geqslant w$, поставим в соответствие дуплет l_k, который есть максимальный из всех дуплетов, обладающих центром, самым левым из центров всех дуплетов, в правую половину которых входит отрезок a_k. a_k есть повторитель, поэтому l_k существует. Число элементов в правой половине l_k меньше k, так как это же верно для левой половины l_k. С ростом k последовательность центров l_k монотонно не убывает и может стоять на месте подряд число раз, не большее, чем номер отрезка из $\mathfrak{A}$, стоящего непосредственно слева от этого центра. Пусть центры l_k и l_{k+1} различны. Отрезок множества $\mathfrak{A}$, стоящий непосредственно слева от центра l_{k+1}, входит в правую половину дуплета l_k. Число отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуплета l_k больше, чем число отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуплета l_{k+1}: в противном случае отрезок множества $\mathfrak{A}$, стоящий непосредственно справа от центра l_k, входил бы в левую половину l_{k+1}, что означало бы наличие триплета. Отсюда следует утверждение.

3.5. Определение. Пусть L — некоторая траектория, имеющая вид

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n, \quad \alpha_i = \pm 1, \quad a_i \text{ — локусы.} \tag{$*$}$$

Порцией этой траектории называется некоторая сумма подряд стоящих слагаемых из $(*)$, следующих либо в порядке роста индекса и написанных со знаком плюс, либо в обратном порядке и написанных со знаком минус. Порции первого типа называются прямыми, порции второго типа — обратными. Если траектория L^* состоит из порций траектории L, причем знаки порций чередуются, и первое слагаемое каждой порции, начиная со второй, есть взятое со знаком минус последнее слагаемое предыдущей порции, то говорят, что L^* сделано из L.

3.6. Лемма. *Если дуга $Y \in D$ не является элементарной, то в ней есть триплет.*

3.7. Доказательство. Пусть X — та элементарная дуга, которая меньше дуги Y. Пусть $x(t)$ — функция, о которой идет речь в определении 1.16 (будем называть эту функцию сближающей X и Y). Пусть

$$S(X) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k,$$

где $a_i = \pm 1$, b_i — локусы. Ясно, что траектория, порождаемая $x(t)$, устроена следующим образом: сначала идет некоторое количество членов, совпадающих с первыми членами траектории $S(X)$; пусть последний член этой группы есть $a_i b_i$; затем идет группа подряд стоящих членов $S(X)$ с убывающими индексами и с обратными знаками, начиная с члена — $a_i b_i$; пусть последний член этой группы есть — $a_m b_m$, $m \leqslant i$; затем идет начинающаяся с $a_m b_m$ группа подряд стоящих членов $S(X)$ с возрастающими индексами и с их собственными знаками, и так далее до тех пор, пока t не достигнет значения 1. Последний член трактории $S(x(t))$ есть $a_k b_k$. Полученная таким образом траектория есть $S(Y)$. Очевидно, она сделана из $S(X)$ (см. определение 3.5).

В этой траектории, записанной указанным образом, возьмем наименьшую по длине порцию. В смежных с ней порциях выделим части, смежные с нашей порцией и равные ей по длине. Наша порция плюс эти две части образуют триплет дуги Y. Лемма доказана.

3.8. Определение. Пусть дуги A и B из D имеют начала в одном квадрате из множества M. Пусть они не имеют общих точек кроме, быть может, общего начала, и пусть a_i, b_i — составляющие их отрезки множества $\mathfrak{A}$, занумерованные в соответствии с порядком, положительным на этих дугах. Если a_1 и b_1 принадлежат разным локусам, то область близости дуг A и B — $\tilde{O}(A, B)$ по определению пуста. Пусть $S(a_1) = S(b_1)$. Тогда открытый прямоугольник, двумя сторонами которого служат a_1 и b_1, входит в $\widetilde{O}(A, B)$. Дальше область близости $\widetilde{O}(A, B)$ строим по индукции. Пусть a_p и b_p принадлежат одному локусу и прямоугольник, заключенный между a_p и b_p, входит в $\widetilde{O}(A, B)$. Пусть a_{p+1} и b_{p+1} существуют и изолокальны. Если прямоугольник, заключенный между ними, не пересекается с соответствующим прямоугольником для a_p, b_p, то этот прямоугольник входит в $\widetilde{O}(A, B)$; в противном случае построение заканчивается. Если a_p или b_p — последний отрезок своей дуги или если a_{p+1} и b_{p+1} не изолокальны, то построение заканчивается. Квадрат множества M, которому принадлежат вторые концы отрезков a_p и b_p, называется конечным квадратом области близости $\widetilde{O}(A, B)$; квадрат же, которому принадлежат начала отрезков a_1 и b_1, называется начальным квадратом области близости $\widetilde{O}(A, B)$; эти квадраты обозначаются соответственно через $m^{\text{к}}(A, B)$ и $m^{\text{н}}(A, B)$. Каждому прямоугольнику, включенному в $\widetilde{O}(A, B)$, припишем номер, равный номеру двух его сторон a_i и b_i.

Пусть G — область множества $M \setminus A \setminus B$, ограниченная дугой α из A, дугой β из B и дугами δ и γ из M'. Если δ и γ — отрезки и если они являются сторонами двух прямоугольников, включенных в $\widetilde{O}(A, B)$ (эти прямоугольники, очевидно, будут обладать соседними номерами), то область G также включаем в $\widetilde{O}(A, B)$ и, кроме того, включаем в $\widetilde{O}(A, B)$ отрезки δ и γ без концов. В прямоугольнике со сторонами a_i, b_i, включенном в $\widetilde{O}(A, B)$, определим функцию $\psi_{AB}(x, y)$ следующим образом. На малой стороне этого прямоугольника, ближайшей к началу дуг A и B, положим $\psi_{AB}(x, y) = i - 0{,}9$. На другой малой стороне этого прямоугольника положим $\psi_{AB}(x, y) = i - 0{,}1$. На всем прямоугольнике $\psi_{AB}(x, y)$ линейна. Определим эту функцию в областях, принадлежащих M и включенных в $\widetilde{O}(A, B)$, следующим образом. Пусть G — такая область, δ и γ — отрезки ее границы, принадлежащие M' (в приведенных выше обозначениях). $\psi_{AB}(x, y)$ в этой области определяется как непрерывная функция. Кроме того, на отрезках δ и γ она должна непрерывно сопрягаться с $\psi_{AB}(x, y)$, определенной на смежных с G прямоугольниках, причем требуется, чтобы в $\overline{G}$ $\psi_{AB}(x, y)$ достигала максимума и минимума на δ и γ. Рассмотрим теперь риманову поверхность $O(A, B)$ функции $\psi_{AB}(x, y)$. При построении $\widetilde{O}(A, B)$ может оказаться, что какой-то входящий в $\widetilde{O}(A, B)$ прямоугольник, заключенный между a_i и b_i, пересекается с прямоугольником, заключенным между a_m и b_m; m и i отличаются более, чем на 1. Но на нашей римановой поверхности этого не может быть.

3.9. Определение. Пусть Γ входит в D и дуги A и B суть две половины некоторого дуплета в Γ. Если все отрезки дуг A и B из $\mathfrak{A}$ входят в границу $\widetilde{O}(-A, B)$, то дуплет (A, B) называется чистым.

3.10. Лемма. *Пусть $\Gamma \in D$. Пусть Γ содгржит триплет (A, B, C), $S(A) = S(-B) = S(C)$. Если этот триплет не содержит никакого другого триплета, то каждый из дуплетов (A, B) и (B, C) является чистым.*

3.11.1. Доказательство. Пусть один из дуплетов (A, B) и (B, C) не является чистым. Пусть, например, это будет дуплет (A, B). Рассмотрим область $O(-A, B)$ и квадрат $m^{\text{к}}(-A, B)$. Будем отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуг A и B нумеровать, начиная от смежных отрезков дуг A и B. Пусть последний отрезок дуги B, входящий в границу $O(-A, B)$, есть b_i; b_i

не является последним отрезком множества $\mathfrak{A}$ дуги B, так как (A, B) не есть чистый дуплет.

Пусть процесс построения области $O(-A, B)$ закончился тем, что один из отрезков a_{i+1} и b_{i+1} оказался лежащим между a_i и b_i. Если это — отрезок a_{i+1}, то дугу A обозначим через X; если же это есть b_{i+1}, то B обозначим через X. Будем непрерывно укладывать дугу X, начиная от ее $i+1$-го отрезка, на $O(-A, B)$.

3.11.2. Непрерывно укладывать дугу Y на $O(-A, B)$ означает следующее. Уложить один отрезок множества $\mathfrak{A}$, принадлежащий проекции на плоскость одного из составляющих $O(-A, B)$ прямоугольников, на этот прямоугольник — значит положить на нем $\psi_{-AB}(x, y)$ равным $\psi_{-AB}(x, y)$ в проектирующихся на этот отрезок точках этого прямоугольника. Если ξ и η — концы двух отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги Y, между которыми нет на Y отрезков множества $\mathfrak{A}$, то разность значений функции ψ_{-AB} в этих точках не превышает 0,2. На отрезках множества $\mathfrak{B}$ дуги Y, один конец которых является концом уже уложенных отрезков множества $\mathfrak{A}$ (кроме случая, когда этот конец принадлежит первой малой стороне первого или второй малой стороне последнего составляющего $O(-A, B)$ прямоугольника), таким же образом определим $\psi_{-AB}(x, y)$, следя за непрерывным сопряжением с $\psi_{-AB}(x, y)$ на уже уложенных отрезках. Далее определим $\psi_{-AB}(x, y)$ на смежных с ними отрезках и т. д. Таким образом, функция ψ_{-AB} будет определена на всей дуге Y, кроме, быть может, некоторого множества дуг, входящих в Y и принадлежащих $\mathfrak{B}$, концы которых (оба или один) принадлежат либо первой малой стороне первого, либо второй малой стороне последнего из прямоугольников области $O(-A, B)$. Эти дуги мы будем называть к о н ц е в ы м и д у г а м и. Если в этом процессе все отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги Y уложились и на всей дуге Y, кроме концевых дуг, $\psi_{-AB}(x, y)$ определена и непрерывна, а на концах концевых дуг $\psi_{-AB}(x, y)$ имеет значение, равное значению на соответствующей малой стороне первого или последнего прямоугольника области $O(-A, B)$ и если на $O(-A, B)$ не существует общих точек Y и $A \cup B$, а концевые дуги Y не пересекаются с теми составленными из отрезков множества $\mathfrak{B}$ дугами, которыми заканчиваются A и B, то говорят, что д у г а Y н е п р е р ы в н о у л о ж и л а с ь н а $O(-A, B)$.

3.11.3. Если дуга X не целиком укладывается на $O(-A, B)$, то она выходит из $O(-A, B)$ только через второй конец этой области, так как начала дуг $-A$ и B соединены. Пусть последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги X, такой, что вся часть дуги X от отрезка a_{i+1} (или b_{i+1}) до него уложилась на $O(-A, B)$, есть k-й, $k > i$. Но тогда часть дуги X от первого ее отрезка до i-го меньше, чем часть от первого до k-го, откуда следует, что в дугу X входит триплет, а это противоречит условию леммы. Следовательно, дуга X не выходит из $O(A, B)$. Пусть k — номер последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ этой дуги. (Он является последним номером как для дуги A, так и для дуги B.) Тогда дуга, состоящая из системы отрезков $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_k$ и отрезков дуги C, соответствующих отрезкам $b_k, b_{k-1}, \ldots, b_{i+1}$ дуги B в дуплете (B, C), и из соединяющих их отрезков множества $\mathfrak{B}$ дуги Γ, больше, чем дуга, содержащая $b_1, \ldots, b_i$, откуда следует, что она содержит триплет. Этот триплет меньше, чем триплет (A, B, C), так как он не содержит дуги A.

3.11.4. Пусть процесс построения области $O(-A, B)$ закончился тем, что оба отрезка a_{i+1} и b_{i+1} оказались изолокальными отрезкам a_i и b_i, причем каждый из отрезков a_{i+1} и b_{i+1} не лежит между отрезками a_i и b_i. Часть дуги A, начинающуюся с a_{i+1}, обозначим через $A1$; для дуги B введем аналогичное обозначение $B1$. Рассмотрим $O(-A1, B1)$. Пусть последний отрезок дуги B, участвующий в построении $O(-A1, B1)$, есть b_t.

3.11.5. Рассмотрим риманову поверхность Σ функции $\psi_{A1,B1}(x, y)$. Уложим на нее прямоугольник со сторонами a_i, b_i; затем уложим прямоугольник со сторонами a_{i-1}, b_{i-1} так, чтобы укладка была непрерывной. Далее продолжаем укладку прямоугольников $O(-a_j, b_j)$, $j < i$, в сторону убывания индексов. Укладку проводим до тех пор, пока прямоугольник $O(-a_j, b_j)$ укладывается целиком на Σ при условии непрерывного сопряжения с уже уложенными прямоугольниками. Пусть $r+1$ — номер последнего в этом процессе уложившегося на Σ прямоугольника. Может случиться, что $r=0$, если дуги A и B уложились на $O(-A1, B1)$ целиком. Прямоугольник с номером r, если $r>0$, уже не укладывается на Σ. Это происходит потому, что одна из дуг A или B при переходе от $r+1$-го отрезка к r-му выходит за пределы $O(-A1, B1)$. Она может выйти только через конечный квадрат $O(-A1, B1)$. Это очевидно, так как в области близости для двух смежных прямоугольников выполняется условие, что обе стороны одного лежат вне другого. Пусть s — номер прямоугольника из $O(-A1, B1)$, внутрь которого уложился прямоугольник $O(-a_{r+1}, b_{r+1})$. Дуга $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_i$ больше или равна дуге $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_s$. Так как строгое неравенство не может иметь места (ибо в противном случае в дуге $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_i$ содержался бы триплет), то эти дуги изолокальны. (В случае $t-i \geqslant i$ дуга $a_i, a_{i-1}, \ldots, a_1, b_1, \ldots, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{2i}$ есть триплет, содержащийся в данном, что невозможно по условию леммы. Остается случай $t-i<i$. Это значит, что $r>0$.)

3.11.6. Допустим, что процесс построения $O(-A1, B1)$ закончился любым обстоятельством, кроме того, что каждый из отрезков a_{t+1} и b_{t+1} не идет между a_t и b_t. Пусть, например, a_{t+1} лежит внутри $O(-a_t, b_t)$. Уложим этот отрезок на поверхность Σ. Будем дальше непрерывно укладывать на Σ отрезки $a_{t+2}, a_{t+3}, \ldots$ и остановим этот процесс тогда, когда мы либо дойдем до конца дуги A (случай α), либо дойдем до отрезка a_u такого, что следующий за ним отрезок a_{u+1} уже не укладывается на Σ (случай β).

3.11.7. Дуга A при переходе от отрезка a_u к a_{u+1} выходит из $O(-A1, B1)$ через $m^{\text{к}}(-A1, B1)$.

Действительно, допустим противное, тогда первую точку отрезка a_{i+1} и последнюю точку отрезка a_u можно соединить внутри M дугой, не пересекающей части σ дуги A, соединяющей эти же точки, так как σ не выходит из Σ. Следовательно, отрезок a_i не лежит между a_{i+1} и a_u, иначе при движении по дуге A от a_i в сторону убывания индекса мы должны были бы либо выйти из Σ через $m^{\text{н}}(-A1, B1)$, либо не выйти вовсе; но это невозможно, как сказано выше. Следовательно, a_u

лежит между a_i и a_{i+1}, но тогда a_{u+1} также можно уложить на Σ, непрерывно сопрягая с уложенным на Σ отрезком a_u, что противоречит предположению. Утверждение 3.11.7 доказано.

3.11.8. Пусть имеет место случай β. Тогда часть дуги A, содержащая отрезки $a_{i+1}, \ldots, a_t$, строго меньше части, содержащей отрезки $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_t, \ldots, a_u$, а это означает, что во второй из этих дуг содержится триплет.

Пусть имеет место случай α. Тогда из отсутствия триплетов в дуге A следует, что дуга X, содержащая отрезки $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_t, \ldots, a_k$ (k — номер последнего отрезка дуги A), сделана из дуги Y, содержащей отрезки $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_t$ (см. определение 3.5), таким образом, что длины последовательных порций траектории $S(Y)$, составляющих $S(X)$, монотонно убывают. Тогда, вследствие изолокальности A и B, последнее верно и для структуры дуги B, а из изолокальности B и C вытекает, что это верно и для C. Пусть $b_m, \ldots, b_k$ — отрезки дуги B, соответствующие последней из рассмотренных порций. Тогда три дуги: z_1, содержащая отрезки $b_{2m-k-1}, \ldots \ldots, b_{m-1}$; z_2, содержащая отрезки $b_m, \ldots, b_k$, и z_3, содержащая отрезки $c_k, \ldots, c_m$, составляют триплет, меньший данного.

3.11.9. Пусть как a_{t+1}, так и b_{t+1} лежат вне $O(-a_t, b_t)$. Тогда мы построим $O(-A2, B2)$, где $A2$ и $B2$ — части дуг A и B, начиная с отрезков a_{t+1} и b_{t+1} соответственно, причем для $O(-A2, B2)$ верны те же соображения, что и для $O(-A1, B1)$, и так далее, до тех пор, пока не дойдем до конца дуги B — отрезка b_k. Но тогда окажется, что дуга, содержащая отрезки $b_1, \ldots, b_i$, меньше, чем дуга, содержащая отрезки $b_1, \ldots, b_k$ и часть дуги C, соответствующую в дуплете (B, C) отрезкам $b_k, b_{k-1}, \ldots \ldots, b_{i+1}$ дуги B. Но отсюда опять следует наличие триплета, содержащегося в дугах B и C. Лемма доказана.

3.12. Определение. Пусть $\Gamma \in D$, (A, B, C) — некоторый триплет в Γ, такой, что каждый из дуплетов (A, B) и (B, C) является чистым. Если изменение функции $K_\Gamma(a_i)$ при переходе от последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги A к первому отрезку множества $\mathfrak{A}$ дуги B имеет знак, противоположный знаку изменения этой функции при переходе от последнего $\mathfrak{a}$-отрезка B к первому $\mathfrak{a}$-отрезку C, то триплет называется нормальным. Если эти знаки совпадают, то триплет называется ненормальным.

3.13. Лемма. *Пусть $\Gamma \in D$. Пусть в Γ содержится нормальный триплет (A, B, C). Пусть, кроме того, существует некоторое множество L дуг из D, не пересекающих Γ. Пусть $\mathfrak{M}$ — теоретико-множественная сумма всех дуг из L. Пусть некоторая точка $\xi \in \mathfrak{M}$ соединена с концам A ломаной Δ_1, принадлежащей $m^{\text{н}}(-A, B)$, причем Δ_1 не имеет общих точек с $\mathfrak{M}$ и с Γ, кроме концов дуги Δ_1; Δ_1 подходит к Γ с той стороны, которая является внутренней по отношению к области $O(-A, B)$. Пусть имеется еще аналогичная ломаная Δ_2 для дуг B и C, соединяющая точку $\eta \in \mathfrak{M}$ с концом B, и ломаная Δ_3, которая соединяет некоторую точку $\zeta \in \mathfrak{M}$ с концом C со стороны, внешней по отношению к $O(-B, C)$. (Понятие внешней и внутренней стороны имеет в данном случае определенный смысл.)*

Тогда существует дуга Γ^1, меньшая Γ, которая порождает траекторию, отличающуюся от $S(\Gamma)$ только тем, что вместо $S(A, B, C)$ в

$S(\Gamma^1)$ *содержится только* $S(C)$, *и существует система дуг* L^1, *такая, что*:

1) *Существует взаимно однозначное соответствие системы* L^1 *и системы* L, *при котором соответствующие дуги всегда изолокальны.*

2) *Если* X *и* Y — *дуги из* L, X^1 *и* Y^1 — *соответствующие им дуги из* L^1 *и отрезки* $a_i \in X$ *и* $b_k \in Y$ *совпадают, то соответствующие им отрезки* $a_i^1 \in X^1$ *и* $b_k^1 \in Y^1$ *также совпадают; если же* a_i *и* b_k *не совпадают, то и* a_i^1 *и* b_k^1 *не совпадают.*

3) *Существует гомеоморфизм* χ *теоретико-множественной суммы* $\mathfrak{M}^1$ *дуг* L^1 *и множества* $\mathfrak{M}$, *при котором каждый отрезок множества* $\mathfrak{A}$, *входящий в* $\mathfrak{M}^1$ *и принадлежащий некоторому множеству дуг* L^1, *переходит в отрезок, принадлежащий соответствующим дугам системы* L *и в этих дугах имеющий тот же номер, что и в* L^1.

4) $\mathfrak{M}^1$ *не пересекается с* Γ^1.

5) *Точку* $\xi^1 \in \mathfrak{M}^1$, *соответствующую при гомеоморфизме* χ *точке* $\xi \in \mathfrak{M}$, *можно соединить ломаной* Δ_1^1 *с последней точкой дуги* C^1, *причем ломаная* Δ_1^1 *принадлежит* M *и не имеет общих точек с* Γ^1 *и с* $\mathfrak{M}^1$, *кроме своих концов.*

6) *Имеет место утверждение, аналогичное* 5), *для точки* $\eta^1 \in \mathfrak{M}^1$ *и ломаной* Δ_2^1, *соединяющей* η^1 *с началом дуги* C^1.

7) *Имеет место утверждение, аналогичное* 5), *для точки* $\zeta^1 \in \mathfrak{M}^1$ *и ломаной* Δ_3^1, *которая соединяет* ζ^1 *с концом дуги* C^1.

3.14.1. Доказательство. Пусть общее число отрезков множества $\mathfrak{A}$, составляющих A (а следовательно, также B и C), равно k. Пусть Π_k — прямоугольник, участвующий в построении $O(-A, B)$, большие стороны которого суть смежные на Γ отрезки дуг A и B. Следующий за ним прямоугольник, участвующий в построении $O(-A, B)$, есть Π_{k-1}, и так далее. При такой нумерации последний участвующий в построении $O(-A, B)$ прямоугольник есть Π_1. Пусть, для определенности, приращение функции $K(c_i)$ при переходе от последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги A к первому отрезку множества $\mathfrak{A}$ дуги B положительно (следовательно, при переходе от B к C оно отрицательно, ввиду нормальности триплета). Пусть R — множество всех точек дуги Γ и дуг системы L, которые лежат внутри Π_1. Пусть β_1 — сторона прямоугольника Π_1, лежащая на границе $m^\kappa(-A, B)$. Пусть ω_1 — расстояние от β_1 до множества всех отрезков, концы которых не лежат на $\overline{\beta_1}$ и которые сами входят или в $\mathfrak{M}$, или в Γ, или в Δ_1, Δ_2, или в Δ_3. Рассмотрим дугу λ, которая в Γ соединяет B с C. Пусть ω_2 меньше расстояния от λ до сторон $m^\kappa(-A, B)$, на которых не лежат концы λ, и меньше расстояния от λ до суммы всех отрезков, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Γ, Δ_1, Δ_2 и Δ_3, кроме самой дуги λ и отрезков, концы которых принадлежат $\overline{\lambda}$. Пусть $\omega_3 = \min(\omega_1, \omega_2)$. Рассмотрим прямоугольник s_{β_1}, который лежит в $m^\kappa(-A, B,)$, одна сторона которого есть β_1, а другая сторона равна $\frac{\omega_3}{2}$. Рассмотрим $\frac{\omega_3}{2}$-окрестность дуги λ и возьмем только ту часть ее t_λ, которая принадлежит $m^\kappa(-A, B)$. Рассмотрим ту из областей, на которые λ разделяет t_λ, которая лежит с той же стороны от λ, с которой $O(-A, B)$ лежит от Γ (слева, в силу нашего предположения). Эту область обозначим через s_λ. Пусть ω_4 — расстояние от первого отрезка c_1 множества $\mathfrak{A}$ дуги

C до всех отрезков, входящих в $\mathfrak{M}$, Γ, Δ_1 Δ_2 и Δ_3, кроме отрезков, имеющих общий конец с c_1. На стороне квадрата $m^{\kappa}(-A, B)$, которой принадлежит β_1, отложим отрезок δ_1 длины $\omega_5 = \min(\omega_3, \omega_4)$ от второго конца λ в сторону от β_1. Этот отрезок входит в границу s_λ. Рассмотрим отображение u отрезка β_1 на отрезок δ_1, линейное и сохраняющее ориентацию. Пусть τ есть сторона прямоугольника $s_{\beta_1} \setminus s_\lambda$, параллельная β_1. Пусть s — односвязная подобласть $s_{\beta_1} \bigcup s_\lambda$, содержащая отрезки τ_1 и δ_1 в составе своей границы. Рассмотрим такой гомеоморфизм f_1 $\overline{s_{\beta_1}}$ в $\overline{s}$, который на отрезке β_1 совпадает с u, а отрезок τ оставляет неподвижным. Кроме того, потребуем, чтобы при этом отображении образ пересечения $s_{\beta_1} \bigcap (\mathfrak{M} \bigcup \Gamma)$ состоял из конечного числа отрезков множества $\mathfrak{B}$ и чтобы дуги Δ_1 и Δ_3 (если они пересекаются с s_{β_1}) перешли в ломаные. Очевидно, такое отображение существует. Отображение u распространим на весь прямоугольник $\overline{\Pi_1}$ следующим образом. Пусть некая прямая l, параллельная β_1, пересекает Π_1. Отложим на l от c_1 в сторону от Π_1 отрезок δ_1^l длины ω_5; u отображает отрезок $l \bigcap \Pi_1$ линейно и с сохранением ориентации на отрезок δ_1^l. При этом, в силу определения числа ω_5, $u(R)$ не пересекается с $\mathfrak{M}$ и с Γ. Сторону Π_1, параллельную β_1, обозначим через α_2.

3.14.2. Если $k = 1$, то после того, что сделано в пункте 3.14.1, мы рассмотрим дугу λ_k, которая в Γ соединяет a_k с b_k. Рассмотрим область G, ограниченную дугой λ_k и отрезком α_2. В этой области, по условию леммы, лежит дуга Δ_1. Возьмем ту часть s_γ ω_4-окрестности конца отрезка c_1, которая лежит в M и в то же время по левую сторону от дуги Δ_3, если считать на Δ_3 направление от Γ к $\mathfrak{M}$ положительным. По определению числа ω_4, в s_γ нет точек из Γ и из $\mathfrak{M}$. Рассмотрим гомеоморфизм f множества $G \bigcup \alpha_2$ в множество $s_\gamma \bigcup u(\alpha_2)$, при котором $f(\alpha_2) = u(\alpha_2)$, множество $f(\Gamma \bigcup \mathfrak{M})$ состоит из конечного числа отрезков множества $\mathfrak{B}$ и $f(\Delta_1)$ есть ломаная. Ясно, что $f(\Delta_1)$ принадлежит M, не пересекает Γ, $\mathfrak{M}$ и $f(\mathfrak{M} \bigcup \Gamma)$ и соединяет внутри s_γ точку $f(\xi)$ с концом дуги C. $f(\xi)$ обозначим через ξ^1, $f(\Delta_1)$ — через Δ_1^1. Дугу Δ_2 можно преобразовать так, чтобы, сохраняя все свойства, указанные в формулировке леммы, она соединяла $\mathfrak{M}$ с началом дуги C; обозначим преобразованную ломаную Δ_2 через Δ_2^1. Соединим стороны прямоугольника s_{β_1}, не параллельные β_1, отрезком множества $\mathfrak{B}$, не пересекающим преобразованных множеств. Возьмем сумму этого отрезка, дуги λ и дуги, соединяющей в Γ a_1 с отрезком, предшествующим в Γ отрезку a_1 (или, если a_1 — первый отрезок дуги Γ, то с границей I). Выделим в этой сумме наименьшее ее связное подмножество σ, соединяющее c_1 с отрезком, предшествующим в Γ отрезку a_1 (или с началом Γ). После этого выбросим из множества $\mathfrak{M}$ множества $R \bigcap \mathfrak{M}$, $s_{\beta_1} \bigcap \mathfrak{M}$ и $G \bigcap \mathfrak{M}$ и добавим $u(R \bigcap \mathfrak{M})$, $f_1(s_{\beta_1} \bigcap \mathfrak{M})$ и $f(G \bigcap \mathfrak{M})$. Множество, полученное в результате этого преобразования, обозначим через $\mathfrak{M}^1$. Аналогичное преобразование произведем с дугой Γ и обозначим полученную дугу через $\widetilde{\Gamma}^1$. Выбросим из $\widetilde{\Gamma}^1$ ту ее часть, которая соединяет концы дуги σ, и добавим дугу σ. Полученную дугу обозначим через Γ^1. Теперь множества $\mathfrak{M}^1$, L^1, Γ^1, Δ_1^1, Δ_2^1, Δ_3^1 и точки ξ^1, η^1 и ζ^1 ($\eta^1 = \eta$, $\zeta^1 = \zeta$) удовлетворяют всем требованиям леммы.

3.14.3. Допустим, что $k \neq 1$. Дугу, которая в Γ соединяет первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги A со вторым, обозначим через λ_{A2}: аналогично через λ_{-B2} обозначим дугу, которая соединяет первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги — B со вторым, через λ_{C2} — дугу, которая соединяет первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги C со вторым. Отрезок, соединяющий не принадлежащие α_2 концы дуг λ_{A2} и λ_{-B2}, обозначим через β_2. Область, ограниченную дугами α_2, λ_{A2}, β_2 и λ_{-B2}, обозначим через G_2. $u(\alpha_2)$ обозначим через γ_2.

3.14.4. Рассмотрим теперь какую-нибудь односвязную область P, лежащую в M, граница которой содержит отрезки γ_2 и β_2. Определим в $\overline{P}$ непрерывную функцию $\psi_P(x, y)$, равную расстоянию от точки (x, y) до суммы γ_2 и β_2. График этой функции, расположенный в трехмерном пространстве, обозначим через $\widetilde{P}$. $\widetilde{P}$ представляет собой замкнутую односвязную двумерную область. Рассмотрим гомеомофизм f_2 $\overline{G}_2$ в $\widetilde{P}$, при котором β_2 остается неподвижной, а $f_2(\alpha_2) = u(\alpha_2)$. Произведем следующую перестройку множества $\mathfrak{M}$ и дуги Γ. R заменяем на $u(R)$, множество $(\mathfrak{M} \cup \Gamma) \cap G_2$ — на $f_2((\mathfrak{M} \cup \Gamma) \cap G_2)$, а $(\mathfrak{M} \cup \Gamma) \cap s_{\beta_1}$ — на $f_2((\mathfrak{M} \cup \Gamma) \cap s_{\beta_1})$.

3.14.5. То, что получилось из дуги Γ и множества $\mathfrak{M}$ в результате преобразования, обозначим через ${}^1\Gamma$ и ${}^1\mathfrak{M}$ соответственно. Вообще все, что подверглось преобразованию, мы будем обозначать той же буквой, что и до преобразования, но снабжать индексом 1 слева вверху. Очевидно, что каждая дуга из множества L перешла в результате преобразования в изолокальную ей дугу. Вообще, если в формулировке леммы 3.13 в условиях 1) — 7) все индексы 1, стоящие справа вверху, заменить на индекс 1, стоящий слева вверху, то все свойства 1) — 7) будут выполняться, но только ${}^1\Gamma$ и ${}^1\mathfrak{M}$ лежат не на плоскости, а в пространстве, которое получается, если к плоскости подклеить график функции $\psi_P(x, y)$. При этом взаимная ориентация на плоскости отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуг A, B и C, соответствующих друг другу в дуплетах $(-A, B)$ и $(B, -C)$, сохраняется та же, что и до преобразования, так что структура областей близости этих дуплетов сохраняется. Если спроектировать преобразованные множества на плоскость, то дуги системы ${}^1L$ и дуга ${}^1\Gamma$ окажутся самопересекающимися, дуги системы ${}^1L$ станут пересекать дугу ${}^1\Gamma$ и в системе ${}^1L$ появятся лишние пересечения дуг. Все эти пересечения будут происходить только в квадрате множества M, которому принадлежит область P.

3.14.6. Пусть ω_7 — расстояние от λ_{c_2} до множества всех отрезков множеств $\mathfrak{M}$, Γ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, кроме отрезков, имеющих общий конец с λ_{c_2}. Пусть $s_{\lambda_{c_2}}$ — та часть ω_7-окрестности дуги λ_{c_2}, которая принадлежит M и лежит по левую сторону от λ_{c_2}, если смотреть в положительном направлении дуги Γ. Пусть s_{γ_2} — та часть ω_4-окрестности второго конца отрезка c_1, которая лежит в M по левую сторону от λ_{c_2}. $s_2 = s_{\gamma_2} \cup s_{\lambda_{c_2}}$ есть связное открытое множество, принадлежащее M и не пересекающееся с $\mathfrak{M}$, с Γ и с дугами Δ_1, Δ_2 и Δ_3. Отрезок границы s_2, примыкающий ко второму концу λ_{c_2} и принадлежащий M', обозначим через $\widetilde{\delta}_2$. Пусть ω_8 — расстояние от c_2 до множества всех не имеющих с ним общего конца отрезков всех множеств $\mathfrak{M}$, Γ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, $f_1(\mathfrak{M} \cup \Gamma)$, $u(R \cap (\mathfrak{M} \cup \Gamma))$ (т. е. от множеств, первоначально данных и преобразованных на всех предыдущих шагах построения, исключая последний гомеоморфизм f_2; это замечание существенно для индукции). Пусть δ_2 — часть отрезка $\widetilde{\delta}_2$ длины ω_8, идущая от конца λ_{c_2}. Существует односвязная область, принадлежащая s_2, граница которой содержит отрезки γ_2 и δ_2; обозначим эту область через $\widetilde{s}_2$. Рассмотрим гомеоморфизм $\widetilde{f}_2$ области $\widetilde{P}$ в $\widetilde{\widetilde{s}}_2$, при котором отрезок γ_2 остается на месте, а отрезок β_2 преобразуется в δ_2 линейно и, кроме того, $\widetilde{f}_2\,({}^1\mathfrak{M} \bigcup {}^1\Gamma)$ состоит из конечного числа отрезков множества $\mathfrak{B}$, и $\widetilde{f}_2\,({}^1\Delta_1 \bigcup {}^1\Delta_3)$ (если дуги Δ_1 и Δ_3 лежат в G_2) состоит из конечного числа отрезков. После этого обозначим через R_2 множество $\Pi_2 \bigcap ({}^1\mathfrak{M} \bigcup {}^1\Gamma)$. На Π_2 определим отображение u_2 следующим образом: через точку $E \in \Pi_2$ проводим прямую l, параллельную β_2, и на ней откладываем от c_2 в направлении от Π_2 отрезок длины ω_8 и отображаем $l \bigcap \Pi_2$ линейно с сохранением ориентации на этот отрезок. Теперь выбросим из множества ${}^1\mathfrak{M}$ множества $\widetilde{P} \bigcap {}^1\mathfrak{M}$, $R_2 \bigcap {}^1\mathfrak{M}$ и прибавим $\widetilde{f}_2\,(\widetilde{P} \bigcap {}^1\mathfrak{M})$ и $u_2\,(R_2 \bigcap {}^1\mathfrak{M})$. Аналогично поступим с Γ. Множества, полученные в результате этого преобразования, будем обозначать теми же буквами, что и до преобразования, но с индексом 2 слева вверху. После этого преобразования все лишние пересечения множеств, преобразованных на первом шагу, имевшие место в квадрате множества M, содержащем G_2, исчезают.

3.14.7. Если $k=2$, то поступаем вполне аналогично тому, как описано в п. 3.14.2 в случае $k=1$, и тем самым лемма для этого случая будет доказана. Дальше доказательство ведем по индукции, поступая на каждом шагу вполне аналогично тому, как описано в п. п. 3.14.3, 3.14.4, 3.14.5, 3.14.6, пока не дойдем до прямоугольника Π_k и закончим построение способом, изложенным в п. 3.14.2. Легко видеть, что все утверждения леммы будут при этом выполнены. Лемма доказана.

3.15. Определение. Пусть $\Gamma \in D$, $\Delta \in D$. Пусть Γ и Δ не имеют общих точек. Пусть Γ представляет собой чистый дуплет $(-A, B)$ и Δ содержит хотя бы один $\mathfrak{a}$-отрезок и может быть непрерывно уложена на $O\,(-A, B)$ (см. п. 3.11.2). Пусть $\xi \in M$. Говорят, что точка ξ расположена $(+)$-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к дуге Δ, если

1) либо существует ломаная $l \in D$, содержащая хотя бы один отрезок множества $\mathfrak{A}$, которую можно непрерывно уложить на $O\,(-A, B)$, и при этом все $\mathfrak{a}$-отрезки l лягут в такие прямоугольники $O\,(-A, B)$, в которых при нашей укладке нет отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги Δ, которая на поверхности $O\,(-A, B)$ при этой укладке не имеет общих точек с Δ, кроме, быть может, одного своего конца, и которая соединяет точку ξ с первой точкой дуги Γ;

2) либо существует состоящая из отрезков множества $\mathfrak{B}$ дуга $l \in D$, соединяющая ξ с первой точкой A, которая не имеет общих точек с концевыми дугами Δ, относящимися к этому же концу $O\,(-A, B)$.

Точка ξ расположена $(-)$-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к Δ, если аналогичной ломаной можно соединить точку ξ с последней точкой дуги A.

3.16. Лемма. *Пусть $\Gamma \in D$, $\Delta \in D$. Пусть Γ и Δ не имеют общих точек. Пусть Γ представляет собой чистый дуплет $(-A, B)$. Пусть α, β и γ — точки дуги Δ, причем α и β суть концы. Пусть дугу Δ можно уложить непрерывно на $O\,(-A, B)$. Пусть точки α и γ будут при этой* *укладке расположены (+)-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к дуге Δ, а точка β расположена (—)-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к дуге Δ. Пусть между каждыми двумя из этих точек на Δ есть отрезок множества $\mathfrak{A}$. Тогда дуга Δ содержит нормальный триплет.*

3.17.1. Доказательство. Если дуга Δ содержит лишь три отрезка множества $\mathfrak{A}$, то утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всевозможных дуг Δ, содержащих меньше, чем k, отрезков множества $\mathfrak{A}$. Пусть теперь Δ содержит k отрезков множества $\mathfrak{A}$, и пусть дуга Δ ориентирована от α к β.

3.17.2. Будем говорить, что дуга $X \in D$ уложилась на $O(-A, B)$ монотонно, если на римановой поверхности функции $\psi_{-AB}(x, y)$ каждый прямоугольник, составляющий $O(-A, B)$, содержит при этой укладке не больше одного отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги X.

3.17.3. Если дуга X, концы которой ξ и η расположены первый (+)-открыто, а второй (—)-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к X, уложилась в $O(-A, B)$ не монотонно, то в X найдется такая дуга Y, содержащаяся в X, что пара дуг Γ, Y обладает всеми свойствами пары Γ, Δ, сформулированными в лемме 3.16.

Действительно, занумеруем отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги X таким образом, чтобы положительным направлением на X было направление от ξ к η. По условию леммы, найдутся дуги l_ξ и l_η, соединяющие точки ξ и η с концами A и обладающие свойствами, перечисленными в п. 3.15. Пусть i — такое число, что i первых отрезков дуги X обладают тем свойством, что каждый из них при нашей укладке попадает в составляющий $O(-A, B)$ прямоугольник, не содержащий других отрезков X (считается, что $O(-A, B)$ расположена на римановой поверхности функции $\psi_{-AB}(x, y)$), а $i+1$ первых отрезков дуги X уже не обладают этим свойством. В частности, если уже первый отрезок дуги X не обладает этим свойством, то $i=0$. Первый конец $i+1$-го отрезка дуги X обозначим через α_x. Дугу, являющуюся суммой l_ξ и куска дуги X от первой точки до α_x, обозначим через l_{α_x}. Рассмотрим содержащую точку α_x малую сторону того составляющего $O(-A, B)$ прямоугольника, на который уложился $i+1$-й отрезок X. На этой стороне лежит конец хотя бы одного отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги X, отличного от $i+1$-го, согласно определению числа i. Из всех таких концов рассмотрим ближайший по плоскости к α_x (или один из ближайших, если их два) и обозначим его через γ_x. Отрезок $[\alpha_x, \gamma_x]$ параллельно перенесем так, чтобы один его конец остался на l_{α_x}, другой — на X, в сторону от $i+1$-го отрезка дуги X, причем пусть сдвиг меньше расстояния от содержащей этот отрезок стороны квадрата M до множества всех не имеющих своего конца на этой стороне отрезков множества $\mathfrak{B}$, принадлежащих Γ, X и l_ξ. Концы подвинутого отрезка обозначим через ${}^1\alpha_x$ и ${}^1\gamma_x$. Рассмотрим кусок дуги l_{α_x} от начала ее до точки ${}^1\alpha_x$, добавим к ней отрезок $[{}^1\alpha_x, {}^1\gamma_x]$ и отрезок $[{}^1\gamma_x, \gamma_x]$. Полученную дугу обозначим через l_{γ_x}, а $X \setminus l_{c_x}$ — через Y. Точки α_x и γ_x расположены (+)-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к дуге Y. Точку η обозначим через β_x. Для пары дуг Γ и Y выполняются условия нашей леммы, если за точки α, β и γ взять, соответственно, α_x, β_x и γ_x.

3.17.4. Если последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги Δ лежит в таком составляющем $O(-A, B)$ прямоугольнике, в котором нет других отрезков Δ, то можно этот отрезок вычесть из Δ и прибавить к l_β; при этом мы получим дугу, удовлетворяющую условиям леммы, с числом отрезков $k-1$, и лемма доказана.

Пусть теперь в этот прямоугольник уложились еще какие-нибудь отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги Δ. Рассмотрим кратчайший отрезок δ, принадлежащий M', который соединяет конец σ последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги Δ с концом τ одного из этих отрезков. Отрезок δ подвинем, не меняя его направления, в сторону от последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги Δ, аналогично тому, как это описано в п. 3.17.3, и убедимся, что τ расположено $(-)$-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к Δ. На Δ между β и τ найдется отрезок множества $\mathfrak{A}$; это ясно из способа нахождения точки τ. Часть $[\gamma, \beta]=B_3$ дуги Δ расположена монотонно в $O(-A, B)$: иначе, согласно п. 3.17.3, в ней нашлась бы дуга, удовлетворяющая условиям леммы, с числом отрезков множества $\mathfrak{A}$, меньшим, чем k. Следовательно, точка τ лежит в Δ между α и γ. Каждая из дуг $B_1=[\alpha, \tau]$ и $B_2=[\tau, \gamma]$, содержащихся в дуге Δ, также, по тем же причинам, расположена монотонно в $O(-A, B)$. Следовательно, (B_1, B_2) и (B_2, B_3) суть чистые дуплеты. Если бы первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги B_3 лежал между первым отрезком множества $\mathfrak{A}$ дуги B_1 и последним отрезком множества $\mathfrak{A}$ дуги B_2, то точка β не была бы расположена $(-)$-открыто в $O(-A, B)$ по отношению к Δ. Аналогичное утверждение имеет место для последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги B. Отсюда следует нормальность триплета (B_1, B_2, B_3). Лемма 3.16 доказана.

3.18. Лемма. *Если дуга Γ принадлежит D_l и если в Γ нет нормальных триплетов, то всякий минимальный (т. е. не содержащий других триплетов) триплет (A, B, C), содержащийся в Γ, устроен таким образом, что дуга C и вся часть дуги Γ, следующая за C, непрерывно укладываются на $O(-A, B)$.*

3.19.1. Доказательство. Пусть последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги A лежит между последними отрезками множества $\mathfrak{A}$ дуг $-B$ и C. Продолжим укладку дуги Γ, начиная от последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги A, который уже уложен, в сторону начала Γ. Пусть последний в этом процессе отрезок, уложившийся на $O(-B, C)$, есть x_i. Пусть X — часть дуги Γ, содержащая отрезок x_i, последний отрезок дуги B и все отрезки, расположенные на Γ между ними. Рассмотрим дугу Y, которая получается из X с помощью малой деформации дуги B и смежных с ней отрезков $\mathfrak{B}$, при которой все отрезки сдвинутой дуги остаются параллельными соответствующим отрезкам дуги B до сдвига, а вся дуга Y оказывается принадлежащей D и укладывается на $O(-B, C)$, причем первый отрезок сдвинутой дуги B укладывается на последний прямоугольник $O(-B, C)$. Такая деформация, очевидно, существует. Для дуги Y, очевидно, выполняются все условия леммы 3.16. Следовательно, в Y содержится нормальный триплет. Но тогда и в X содержится нормальный триплет, что противоречит условию нашей леммы.

3.19.2. Если последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги C не лежит между первыми отрезками множества $\mathfrak{A}$ дуг $-A$ и B, то сразу получаем, что приращения функции $K_\Gamma(c_i)$ при переходе от A к B и от B к C таковы, что наш триплет является нормальным. Пусть последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги C лежит между первыми отрезками множества $\mathfrak{A}$ дуг $-A$ и B. Будем дугу C непрерывно укладывать на $O(-A, B)$, начиная от последнего отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги C, который укладываем на первый прямоугольник $O(-A, B)$.

3.19.3. Дуга C уложится при этом монотонно. Действительно, в противном случае первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги C уложится не на последний прямоугольник области $O(-A, B)$. Значит, последний отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги B, если продолжать укладку Γ после C в сторону начала Γ, уложится на некий прямоугольник $O(-A, B)$. Двигаясь дальше по B в сторону начала Γ, мы дойдем до отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги B, смежного в Γ с одной из сторон прямоугольника $O(-A, B)$, что противоречит определению областей близости. Следовательно, первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги C лежит между последними отрезками множества $\mathfrak{A}$ дуг $-A$ и B, но тогда из соображений, аналогичных изложенным в п. 3.19.1, следует, что если дугу C и то, что в Γ следует за ней, укладывать на $O(-A, B)$, то вся дуга C и ее продолжение уложатся, а это и составляет утверждение леммы. Лемма доказана.

3.20. Лемма. *Если в дуге $\Gamma \in D_l$ содержится триплет, то Γ не является элементарной.*

3.21. Доказательство. Если в Γ есть нормальный триплет, то, согласно лемме 3.13, можно уменьшить Γ, уничтожив наименьший из нормальных триплетов. Пусть в Γ нет нормальных триплетов. Тогда всякий минимальный триплет состоит, согласно лемме 3.10, из чистых дуплетов, причем он устроен так, как описано в п. 3.18. Пусть (A, B, C) — такой триплет, причем будем для определенности считать, что приращения функции $K_\Gamma(c_i)$ при переходе от A к B и от B к C отрицательны. Занумеруем прямоугольники, составляющие $O(-A, B)$, в таком порядке, чтобы самым внешним, т. е. участвующим в построении в последнюю очередь, был Π_1, затем шел Π_2 и последним был Π_k. Теперь будем производить операции, аналогичные тем, которые мы совершали при доказательстве леммы 3.13. Обозначим через R_1 множество всех отрезков множества $\mathfrak{A}$, входящих в Γ и принадлежащих проекции на плоскость прямоугольника Π_1 за вычетом тех отрезков дуги C и ее продолжения, которые уложились на Π_1 при той непрерывной укладке, о которой шла речь в п. 3.18. Это множество укладываем слева от стороны прямоугольника Π_1, принадлежащей B, в достаточно малую окрестность этой стороны, преобразуя одновременно дуги, составленные из отрезков множества $\mathfrak{B}$, таким образом, чтобы при этой операции в $m^\kappa(-A, B)$ не возникло самопересечений дуги Γ. Само преобразование производится аналогично тому, как это сделано в п. 3.14. Затем через R_2 обозначим множество отрезков множества $\mathfrak{A}$, принадлежащих Γ и лежащих внутри проекции на плоскость прямоугольника Π_2, кроме отрезков, уложившихся на этот прямоугольник; так же перекладываем R_2 и дуги множества $\mathfrak{B}$, соединяющие эти отрезки между собой и с R_1; и так далее до Π_k. При этом, если некий отрезок δ множества $\mathfrak{A}$ дуги C или ее продолжения уложился на Π_i и был переложен как элемент множества R_j, то $|i-j| \geqslant 2$. Поэтому в процессе построения не возникнет противоречий, и, дойдя до Π_k, мы получим несамопересекающуюся на плоскости дугу $\widetilde{\Gamma}^1$, изолокальную с данной. Теперь мы можем соединить первую точку первого отрезка a_1 множества $\mathfrak{A}$ дуги A и первую точку первого отрезка c_1 множества $\mathfrak{A}$ дуги C отрезком σ, входящим в M'; затем подвинем σ так, чтобы он не пересекал преобразованной дуги $\widetilde{\Gamma}'$, принадлежал $\mathfrak{B}$ и имел концы на смежных с a_1 и c_1 отрезках множества $\mathfrak{B}$. Наконец, вычтем из преобразованной дуги $\widetilde{\Gamma}^1$ ее часть, соединяющую концы сдвинутого отрезка, и добавим сам этот отрезок. Полученная дуга Γ^1 меньше дуги Γ и входит в D_l. Лемма доказана.

Из лемм 3.6 и 3.20 вытекает, что, для того чтобы дуга множества D_l была элементарной, необходимо и достаточно, чтобы в ней не содержалось триплетов.

3.22. Для двух изолокальных дуг из D_l функции $K_\Gamma(c_i)$, взятые для соответствующих отрезков, могут не равняться друг другу, так что колебание этой функции, вообще говоря, не определяется траекторией самой дуги.

3.23. Лемма. *Пусть Γ_1 и Γ_2 — дуги из $D_l^э$ и пусть $S(\Gamma_1) = S(\Gamma_2)$. Пусть a_{1k} и a_{2k} — последние отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуг Γ_1 и Γ_2 соответственно. Если a_{1k} не является повторителем в Γ_1 (это равнозначно тому, что a_{2k} не является повторителем в Γ_2), то $K_{\Gamma_1}(a_{1i}) = K_{\Gamma_2}(a_{2i})$ при любом i.*

3.24.1. Доказательство. Пусть $\Gamma \in D_l^э$. Мы будем говорить, что дуплет A покровительствует дуплету B, если их центры не совпадают и один из отрезков множества $\mathfrak{A}$, смежных с центром дуплета B, принадлежит дуплету A. Если A покровительствует B, то число отрезков в B меньше, чем в A: в противном случае здесь существовал бы триплет; следовательно, B не покровительствует A. Говорят, что ранг дуплета равен нулю, если он не покровительствует никакому дуплету. Ранг дуплета равен n, если он покровительствует только дуплетам ранга меньше n и хотя бы одному дуплету ранга $n-1$.

3.24.2. Скачок функции K_Γ при переходе от a_i к a_{i+1} в случае, если a_i и a_{i+1} не изолокальны, вполне определяется локусами, которым эти отрезки принадлежат.

3.24.3. Итак, пусть в условиях леммы a_{1i} и $a_{1(i+1)}$ изолокальны (и, следовательно, a_{2i} и $a_{2(i+1)}$ тоже изолокальны), $K_{\Gamma_1}(a_{1(i+1)}) - K_{\Gamma_1}(a_{1i}) = 2$, а $K_{\Gamma_2}(a_{2(i+1)}) - K_{\Gamma_2}(a_{2i}) = -2$. Таким образом, a_{1i} и $a_{1(i+1)}$ являются средними звеньями некоторого дуплета в Γ_1. Докажем, что это положение противоречиво. Доказательство будем вести индукцией по рангу этого дуплета. Рассмотрим области близости для двух половин этого дуплета для обеих дуг Γ_1 и Γ_2. Эти области близости обозначим соответственно через $O1$ и $O2$. Пусть m^k — конечный квадрат той из этих областей близости, которая оказалась короче.

3.24.4. Пусть $A \in D$ и $B \in D$. Пусть первые l отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги A и первые l отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги B входят в границу $O(A, B)$, и пусть в каждой из дуг A и B, кроме этих l отрезков, есть еще хотя бы по одному отрезку множества $\mathfrak{A}$. Возможны следующие четыре случая расположения отрезка a_{l+1} по отношению к $O(A, B)$:

{1}: a_{l+1} изолокален a_l и b_l, и b_l лежит на плоскости между a_l и a_{l+1};

$\{2\}$: a_{l+1} изолокален a_l и b_l и лежит на плоскости между ними;

$\{3\}$: a_{l+1} не изолокален a_l и b_l;

$\{4\}$: a_{l+1} изолокален a_l и b_l, и a_l лежит на плоскости между a_{l+1} и b_l.

Аналогичные четыре случая могут иметь место для отрезка b_{l+1}. Если для расположения $l+1$-го отрезка той из дуг A и B, которая идет левее, по отношению к $O(A, B)$ имеет место случай $\{i\}$, а для $l+1$-го отрезка второй из этих дуг — случай $\{j\}$, то будем говорить, что **область близости** $O(A, B)$ **кончается способом** $\{i, j\}$.

3.24.5. Для каждой из областей $O1$ и $O2$ отрезок множества $\mathfrak{A}$, являющийся стороной последнего прямоугольника этой области, не является последним отрезком Γ_1 или Γ_2: иначе этот отрезок был бы повторителем. Если же одна из сторон этого прямоугольника есть первый $\mathfrak{a}$-отрезок Γ_1 или Γ_2, то приравниваем этот случай к $\{3\}$. Таким образом, каждая из областей $O1$ и $O2$ кончается одним из способов $\{i, j\}$, определенных в п.3.24.4.

3.24.6. Случаи $\{1,1\}$, $\{1,3\}$ и $\{3,1\}$ невозможны для обеих дуг, так как Γ_1 и Γ_2 — несамопересекающиеся. Случаи $\{2, i\}$ и $\{i, 2\}$ также невозможны для обеих дуг, так как они ведут либо к триплету, либо к тому, что a_k оказывается повторителем. На участке наших дуплетов от их центров до m^k все скачки функций K_{Γ_1} и K_{Γ_2} одинаковы. Если ранг нашего дуплета равен нулю, то это следует из пункта 3.24.2, если же ранг нашего дуплета равен n, то это следует из предположения индукции, так как все дуплеты, центры которых лежат на нашем участке, имеют ранг, меньший, чем n. Поэтому ясно, что наличие случая $\{3,4\}$, $\{4,4\}$, $\{4,3\}$ для одной из дуг Γ_1 и Γ_2 влечет за собой случаи $\{2, i\}$ и $\{i, 2\}$ для другой; поэтому эти случаи также запретны. Случай $\{3,3\}$ для одной из дуг Γ_1 и Γ_2 влечет за собой случай $\{3,3\}$ для другой; отсюда следует, что продолжения обеих половин этих дуплетов принадлежат одному локусу, но тогда m^k не есть конечный квадрат ни одной из областей близости $O1$ и $O2$. Остаются случаи $\{1,4\}$ для Γ_1 и $\{1,4\}$ для Γ_2, а также $\{4,1\}$ для Γ_1 и $\{4,1\}$ для Γ_2. Но эти случаи переходят друг в друга, так что m^k опять не является конечным квадратом ни для $O1$, ни для $O2$. Лемма доказана.

3.25. Дуга Γ множества D_l называется **квазиэлементарной** (что мы обозначим так: $\Gamma \in D_l^q$), если она является суммой трех дуг A, B и C; $A \in D_l$, $B \in D^э$, $C \in D^э$, причем A не содержит нормальных триплетов; в частности, B или C (или обе дуги) могут входить в M.

3.26. Определение. Рассмотрим шестерку дуг, принадлежащих ${}^{N-1}D_l^q$ и имеющих, быть может, общие точки в некотором множестве квадратов из M и общие отрезки из $\mathfrak{A}$. Эта шестерка называется **якорем** $N-1$**-го ранга** (множество якорей $N-1$-го ранга обозначим через ${}^{N-1}R$), причем два таких якоря r_1 и r_2 считаются **эквивалентными**, если существует такое взаимно однозначное соответствие множества дуг, составляющих r_1, и множества дуг, составляющих r_2, что:

1) Соответствующие дуги изолокальны и имеют начала на одной и той же стороне I.

2) Если $X_1 \in r_1$, $Y_1 \in r_1$, соответствующие им дуги из r_2 суть X_2 и Y_2, $a_i^1 \in X_1 \cap \mathfrak{A}$, $b_j^1 \in Y_1 \cap \mathfrak{A}$, отрезки a_i^2 и b_j^2 — отрезки дуг X_2 и Y_2, соответствующие отрезкам a_i^1 и b_j^1, и a_i^1 и b_j^1 совпадают, то то же верно и для a_i^2 и b_j^2, и, обратно, если a_i^2 и b_j^2 совпадают, то и a_i^1 и b_j^1 совпадают.

3) Если $X_1 \in r_1$, $Y_1 \in r_1$, соответствующие им дуги из r_2 суть X_2 и Y_2, дуги l_1 и m_1 составлены из отрезков множества $\mathfrak{B}$, l_1 соединяет в X_1 два отрезка множества $\mathfrak{A}$ и m_1 соединяет в Y_1 два отрезка множества $\mathfrak{A}$, l_2 и m_2 — соответствующие им дуги в X_2 и Y_2, то, при наличии у l_1 и m_1 общей точки, l_2 и m_2 имеют общую точку, и, обратно, если l_2 и m_2 имеют общую точку, то и l_1 и m_1 имеют общую точку.

4) Если a_1 и b_1 — два несовпадающих изолокальных отрезка множества $\mathfrak{A}$ из дуг множества r_1, а a_2 и b_2 — соответствующие им отрезки из r_2, то a_1 и b_1 лежат на плоскости по ту же сторону друг от друга, что и a_2 и b_2.

3.27. Обозначение. Пусть $\Gamma \in D_I$. Через $\Gamma(i)$ обозначим принадлежащую Γ минимальную простую дугу, принадлежащую D_I и содержащую первые i отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ.

3.28. Условие П. Говорят, что для якоря $r \in {}^{N-1}R$, дуги Γ и числа i выполняется условие П, если из того, что существует не пересекающее r I-осуществление дуги $\Gamma(i)$, при котором для всех $k \leqslant i$ $|K_\Gamma(a_k)| \leqslant N$, следует, что существует не пересекающее r I-осуществление дуги $\Gamma(i+1)$, при котором для всех $k \leqslant i+1$ $|K_\Gamma(a_k)|$ также не превышает N и начало $\Gamma(i+1)$ принадлежит той же стороне I, что при первом I-осуществлении.

3.29. Лемма. *Пусть* $\Gamma \in {}^N D_I^2$, $N > 1$. *Пусть для этой дуги* Γ *и некоторого* i *выполнено условие* П *для всякого якоря* $r \in {}^{N-1}R$. *Тогда* a_{i+1} *есть повторитель.*

3.30.1. Доказательство. Пусть a_{i+1} не есть повторитель. Тогда $K_\Gamma(a_k)$ определена однозначно на всех отрезках множества $\mathfrak{A}$, составляющих $\Gamma(i+1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что первый отрезок множества $\mathfrak{B}$, входящий в Γ, параллелен оси x и его левый конец лежит на левой границе I.

3.30.2. Будем строить дуги $\underline{t_b} \in D_I$ и $\underline{t_h} \in D_I$, из которых потом будет сделан якорь. Для определенности рассмотрим построение $\underline{t_b}$; при этом различаются три случая:

$[\alpha]$: $K_\Gamma(a_i) < N-1$;

$[\beta]$: $K_\Gamma(a_i) = N-1$;

$[\gamma]$: $K_\Gamma(a_i) = N$.

В процессе построения считается, что мы имеем дело с некоторым фиксированным I-осуществлением Γ_ν дуги $\Gamma(i+1)$.

В случае $[\alpha]$ дугу $\underline{t_b}$ строим так. b_0 есть отрезок множества $\mathfrak{B}$, первый конец которого принадлежит отрезку d множества $\mathfrak{B}$, идущему в Γ за a_i, причем b_0 перпендикулярен d и не имеет общих точек с $\Gamma(i)$; из двух перпендикулярных направлений выбрано то, которое получается поворотом направления a_i против часовой стрелки. Полагаем $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}(b_0) = K_\Gamma(a_i)$. Отрезок b_1 дуги $\underline{t_b}$ принадлежит $\mathfrak{B}$ и перпендикулярен к b_0, причем второй его конец лежит на той же стороне квадрата M, на которой лежит второй конец a_i. b_2 есть отрезок множества $\mathfrak{A}$, лежащий на одной прямой с b_1. Он параллелен a_i, причем отрезок b_0 делаем настолько коротким, что b_1 не пересекается с $\Gamma(i)$ и между a_i и b_2 нет никаких точек $\Gamma(i)$. Имеем: $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}(b_2) =$

$= K_\Gamma(a_i)+1$, $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}(b_2)<N$. Если $K_\Gamma(a_{i-1})<N-1$, то следующие отрезки дуги $\underline{t_b}$ строим так. Будем обозначать отрезок множества $\mathfrak{A}$, следующий в какой-нибудь дуге X за отрезком x_j множества $\mathfrak{A}$ дуги X, где j относится к сплошной нумерации отрезков дуги X, принадлежащих $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$, через x_j^{+1}. b_2^{+1} возьмем параллельным a_{i-1} (в дуге Γ индекс относится к нумерации только отрезков $\mathfrak{A}$) с той же стороны от a_{i-1}, с какой b_2 лежит от a_i, и столь близко от a_{i-1}, чтобы между ними не было отрезков Γ и отрезка b_2 и чтобы b_2^{+1} не совпадал ни с одним из этих отрезков. Теперь конец отрезка b_2 соединим с началом b_2^{+1} дугой из отрезков множества $\mathfrak{B}$ так, чтобы она не пересекала $\Gamma(i)$; очевидно, это можно сделать. Так строим до тех пор, пока не встретится отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, на котором $K_\Gamma(a_j)\geqslant N-1$. Конец последнего построенного в этом процессе отрезка множества $\mathfrak{A}$ дуги $\underline{t_b}$ обозначим через ξ'.

В случае [β] отрезок b_0 строится так же, как в случае [α]; конец этого отрезка обозначается через ξ', начало — через ξ. $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}$ на нем определяется так же, как в случае [α].

В случае [γ] в качестве b_0 берем достаточно короткий отрезок множества $\mathfrak{B}$, являющийся продолжением a_i, конец его обозначаем также через ξ', начало — через ξ и полагаем $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}(b_0)=K_\Gamma(a_i)-1$.

В случае [α] точку ξ' соединяем ломаной из отрезков множества $\mathfrak{B}$ с отрезком множества $\mathfrak{B}$ дуги Γ, смежным на Γ с отрезком дуги Γ, смежным в процессе построения с последним построенным отрезком $\underline{t_b}$, причем ломаная не должна иметь с $\Gamma(i)$ и $\underline{t_b}$ общих точек, кроме концов; второй конец этой ломаной обозначим через ξ.

3.30.3. Во всех случаях [α], [β] и [γ] из точки ξ' проведем максимальную (в смысле числа отрезков множества $\mathfrak{A}$) не пересекающую $\Gamma(i)$ дугу $\chi\in D$, на всех отрезках множества $\mathfrak{A}$ которой $K_{\underline{t_b}}=N-1$. (Если χ доходит до I', то $N=2$, конец χ лежит на левой стороне I выше точки Γ. В этом случае (и в аналогичных случаях, которые будут встречаться в дальнейшем) продолжение построения см. в п. 3.30.11.) Другой конец ζ этой дуги можно взять на дуге $\Gamma(i)$. Рассмотрим последний отрезок дуги χ (он принадлежит множеству $\mathfrak{B}$); возьмем в нем некоторую внутреннюю точку η. Рассмотрим компоненту m множества M, содержащую ζ. Проведем из центра квадрата m луч в таком направлении, в котором идут все отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги χ (как сказано выше, на этих отрезках $K_{\underline{t_b}}=N-1$), или, если в χ нет отрезков множества $\mathfrak{A}$, в том направлении, в каком они должны были бы идти. Сторону квадрата m, которую пересекает этот луч, назовем σ-стороной и обозначим через σ. Ясно, что точку ζ можно выбрать на такой компоненте $m\cap\Gamma(i)$, которая отделяет η от σ в m. Действительно, в противном случае сумма всех компонент $m\cap\Gamma(i)$ также не отделяла бы η от σ (см. [2]) и можно было бы продолжить дугу χ, увеличив в ней число отрезков множества $\mathfrak{A}$. При этом, очевидно, ζ и ξ будут принадлежать различным компонентам множества $\Gamma\cap M$. Компоненту, содержащую ζ, обозначим через τ.

3.30.4. Компонента множества $\Gamma(i)\cap M$, содержащая ζ, предшествует на Γ компоненте, содержащей ξ. Допустим противное. Рассмотрим минимальный подконтинуум, содержащийся в сумме дуги (ξ, ξ') и дуги $\overline{\chi}$, соединяющий точки ξ и ζ. Он представляет собой простую дугу, которую мы обозначим через μ. Обозначим через λ_Γ простую дугу, принадлежащую Γ, концами которой являются точки ξ и ζ. Из построения видно, что λ_Γ содержит хотя бы один отрезок множества $\mathfrak{A}$. $\Lambda = \lambda_\Gamma \cup \mu$ есть гомеоморф окружности. K_Λ при полном обходе по Λ в направлении, положительном на λ_Γ, либо увеличивается на 4, либо убывает на 4. Допустим, что она растет. На первом отрезке множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, входящем в Λ, положим $K_\Lambda = K_\Gamma$. Будем дальше обходить Λ в указанном направлении. На последнем отрезке множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, входящем в Λ, K_Λ будет либо равно N, либо равно $N-1$; на следующем отрезке дуги Γ, ввиду того, что τ отделяет χ от σ, очевидно, будет либо $K_\Gamma = N+1$, либо $K_\Gamma = N+2$, что невозможно. Теперь допустим, что K_Λ убывает. Это значит, что правая сторона дуги Λ обращена к внутренней области дуги Λ. Но так как дуга $[\xi', \xi]$ подходит к левой стороне Γ, то часть дуги Γ, предшествующая на Γ множеству $\Lambda \cap \Gamma$, лежит внутри этой области, а это противоречит тому, что $\Gamma \in D_l$.

3.30.5. Вышеперечисленные условия не определяют однозначно дугу χ. Существует возможность того, что от различного конкретного выбора дуги χ зависит компонента τ. Если существует несколько вариантов выбора τ, то выберем такое конкретное расположение χ, чтобы соответствующая компонента τ предшествовала на Γ всем остальным. Очевидно, можно считать, что дуга χ и отрезок $[\xi, \xi']$ в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ имеют лишь одну общую точку — конец. Также можно считать, что дуга χ и дуга $[\xi, \xi']$ в случае $[\alpha]$ имеют общий первый отрезок множества $\mathfrak{B}$ и больше не имеют общих точек. Рассмотрим дугу μ, равную для случаев $[\beta]$ и $[\gamma]$ сумме дуги χ и отрезка $[\xi, \xi']$, а для случая $[\alpha]$ представляющую собой минимальный подконтинуум, содержащийся в сумме дуг χ и $[\xi, \xi']$ и соединяющий точки ξ и ζ. Сумму дуги μ и дуги λ_Γ, соединяющей в Γ те же точки, обозначим через Λ. Λ есть гомеоморф окружности.

3.30.6. Определим на Λ функцию $\widetilde{K}_\Lambda(c_i)$, сделав в Λ разрыв в точке ζ и положив на χ $\widetilde{K}_\Lambda = \widetilde{K}_{t_b} + 1$. Тогда на λ_Γ будет $\widetilde{K}_\Lambda = \widetilde{K}_\Gamma$. $\widetilde{K}_\Lambda$ при обходе по Λ в направлении, положительном на λ_Γ, должно увеличиться. Действительно, допустим, что это не так. Совершим обратный обход; при этом K_Λ должно увеличиться. На отрезке множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, предшествующем на Γ точке ξ, K_Γ либо равно $N-1$, либо равно N. Следовательно, найдется отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, на котором K_Γ либо равно $N+1$, либо равно $N+2$; но это невозможно.

3.30.7. μ должна подходить к Γ в точке ζ с той же стороны, что в точке ξ. Допустим противное. Тогда окажется, что часть дуги Γ, предшествующая точке ζ, лежит внутри Λ, что невозможно, так как начало Γ лежит на I'.

3.30.8. З а м е ч а н и е. Утверждения пп. 3.30.6 и 3.30.7 остаются в силе, если дугу χ взять не обязательно максимальной и ее конец ζ взять не на τ, а на какой-нибудь другой компоненте $\Gamma(i) \cap M$, предшествующей на Γ точке ξ, если это можно сделать, не пересекая дуги $\Gamma(i)$.

3.30.9. Рассмотрим теперь отрезок p множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, предшествующий точке ζ. $K_\Gamma(p)$ может равняться $N-3$, $N-4$ и $N-5$. Действительно, из рассмотрения окружности Λ следует, что $K_\Gamma(p)$ может равняться N, $N-1$, $N-2$, $N-3$, $N-4$ и $N-5$. Но значения N *и* $N-1$ невозможны, так как это противоречит структуре множества τ.

Следующий отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги $\underline{t}_b$ берем параллельным p и столь близким к p, чтобы между ними не было отрезков из $\Gamma(i)$ и из построенной части $\underline{t}_b$ и чтобы он не совпадал с отрезками этих множеств, причем берем его по левую сторону от p, если смотреть по направлению p. Далее, соединяем конец этого отрезка, ближайший на плоскости к точке ζ, ломаной $\varkappa$, не пересекающей Γ и состоящей из отрезков множества $\mathfrak{B}$, с дугой χ, причем это можно сделать так, что эта дуга не будет иметь общих точек с дугой μ, кроме своего конца. Затем присоединяем к $\underline{t}_b$ минимальное связное подмножество, соединяющее в сумме χ и $\varkappa$ вновь добавленный к $\underline{t}_b$ отрезок с построенной частью $\underline{t}_b$.

3.30.10. Дальнейшее построение дуги $\underline{t}_b$ ведется аналогично предыдущему. Допустим, что в процессе построения мы опять дошли до отрезка a_j множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, на котором $K_\Gamma \geqslant N-1$. Тогда следующий шаг в построении $\underline{t}_b$ состоит не в том, что мы добавляем отрезок множества $\mathfrak{A}$, параллельный a_j, а в том, что мы строим дугу χ так же, как это описано в пп. 3.30.3. — 3.30.5, и так далее. При этом дуга $\underline{t}_b$ определена однозначно с точностью до малых сдвигов ее отрезков множества $\mathfrak{A}$ и дуг, принадлежащих M, их соединяющих. Докажем, что в рамках этой свободы можно добиться того, что $\underline{t}_b$ будет несамопересекающейся. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда χ_1 пересекается с χ_2, где индексы 1 и 2 относятся к двум случаям построения дуг χ на двух различных этапах построения $\underline{t}_b$.

Допустим, что этап с индексом 1 предшествует этапу с индексом 2. Это значит, что ζ_2 предшествует на Γ как ζ_1, так и ξ_1. Точки ζ_1 и ζ_2 должны лежать в одном квадрате множества M, так как в противном случае можно в точке пересечения χ_1 и χ_2 перейти с одной дуги на другую и продлить более короткую за счет более длинной. Теперь заменим часть дуги χ_1 на часть χ_2 и получим, что компонента τ_1 не была первой достижимой из точки ξ_1 с помощью дуги χ_1 при всех вариантах расположения последней.

3.30.11. Процесс построения $\underline{t}_b$, описанный в пп. 3.30.2 — 3.30.10, может закончиться только тем, что на какой-то стадии $\underline{t}_b$ упрется в левую границу I. Для наших целей удобно, чтобы конец дуги $\underline{t}_b$ принадлежал верхней стороне квадрата I. Для этого мы добавим к $\underline{t}_b$ отрезок, достаточно близкий к левой границе I, верхний конец которого принадлежит верхней стороне I, а нижний можно соединить с концом построенной части $\underline{t}_b$ с помощью дуги, составленной из отрезков множества $\mathfrak{B}$, причем, очевидно, можно сделать так, чтобы ни этот отрезок, ни эта дуга не пересекали $\Gamma(i)$ и построенной части $\underline{t}_b$. Этот добавленный отрезок, очевидно, можно представить как сумму отрезков множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Построение $\underline{t}_b$ закончено.

На последнем отрезке дуги $\underline{t_b}$ значение функции $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}$, очевидно, равно нулю. Таким образом, определенную нами функцию $\widetilde{K}_{\underline{t_b}}(c_i)$ можно определить общим способом, описанным в п. 1.19, если ориентировать дугу $\underline{t_b}$ в направлении от ее конца, лежащего на I'.

3.30.12. Аналогично тому, как в пп. 3.30.2 — 3.30.11 построена дуга $\underline{t_b}$, строим дугу $\underline{t_h}$. Описание построения $\underline{t_h}$ получается из описания пп. 3.30.2 — 3.30.11 заменой понятий, соответствующей зеркальному отражению плоскости в оси x. При этом получается, что $\underline{t_h}$ строится по правую сторону от Γ и имеет конец на нижней границе I и т. д.

При построении $\underline{t_h}$ можно за счет малого сдвига $\underline{t_h}$, не меняющего конструкции построения $\underline{t_h}$, добиться того, что $\underline{t_b}$ и $\underline{t_h}$ не будут иметь общих точек, кроме общей начальной точки.

3.30.13. Доказательство. Часть дуги $\underline{t_b}$, которая есть дуга χ_i на некотором этапе построения, назовем *нерегулярной дугой*. Очевидно, что дугу $\underline{t_h}$ можно строить так, что всякая точка пересечения дуг $\underline{t_b}$ и $\underline{t_h}$ будет принадлежать нерегулярным дугам обеих дуг. Пусть для некоторой точки пересечения α это будут $\nu_1 \subset \underline{t_b}$ и $\nu_2 \subset \underline{t_h}$.

Рассмотрим случай четного N. При этом направления, соответствующие значениям $K_{\underline{t_b}} = N - 1$ и $K_{\underline{t_h}} = -N + 1$, совпадают. Рассмотрим компоненту m_1 множества M, которой принадлежит α. Пусть, для определенности, точка ξ_1 предшествует точке ξ_2 на Γ. Никакая компонента множества $\Gamma(i) \cap M$, достижимая из точки α с помощью принадлежащей M и не пересекающей $\Gamma(i)$ ломаной, не отделяет α от σ — стороны m_1. Если эта компонента следует на Γ за точкой ξ_1, то это вытекает из п. 3.30.4; если же она предшествует ξ_1 (а следовательно, и ξ_2), то это вытекает из пп. 3.30.7 и 3.30.8, так как эта компонента должна была бы быть достижимой от χ_1 и χ_2 с разных сторон. Далее, никакая компонента, достижимая в том же смысле из точки α, не имеет обоих концов на стороне σ так, чтобы α не лежала между ней и σ. Действительно, если эта компонента следует на Γ за точкой ξ_1, то это утверждение имеет место по соображениям, аналогичным изложенным в п. 3.30.4; если же она предшествует ξ_1 и ξ_2, то это утверждение устанавливается с помощью пп. 3.30.7 и 3.30.8 аналогично предыдущему. Следовательно, m_1 не является конечным квадратом дуг χ_1 и χ_2, и в следующем квадрате m_2, пересекаемом χ_1 и χ_2, точки одной из этих дуг будут достижимы от другой дуги, и там можно повторить то же самое рассуждение. Отсюда следует, что никакая компонента множества M не является конечным квадратом для χ_1 и χ_2. Это возможно только, если $N = 2$. Но тогда из соображений, изложенных в п. 3.30.3, получаем, что дуга $\Gamma(i)$ вся помещается между χ_1 и χ_2, что невозможно.

3.30.14. Рассмотрим теперь случай нечетного N. Как и выше, пусть ξ_1 предшествует ξ_2 и m_1 — компонента M, содержащая общую точку дуг χ_1 и χ_2. Обозначим через σ σ-сторону квадрата m_1 по отношению к $\underline{t_b}$. Для компоненты ω множества $\Gamma(i) \cap M$, достижимой из точки $\alpha \in \underline{t_b}$, если ω следует за ξ_1, выполняется следующее условие. (Это доказывается из соображений, аналогичных изложенным в п. 3.30.4.) Обозначим два отрезка множества $\mathfrak{A}$, смежных в Γ с этой компонентой (в порядке их следования в Γ), через c_1 и c_2.

1) Если оба конца ω принадлежат σ, то α лежит между ω и σ.

2) Если общий конец ω и c_1 принадлежит σ, а общий конец ω и c_2 — той стороне τ квадрата m_1, которая получается из σ поворотом m_1 на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, то α лежит в области, ограниченной ω и этими двумя сторонами.

3) Оба конца ω не принадлежат одновременно τ. Это могло бы иметь место только в начальном квадрате дуги χ_1, и мы имели бы $K_\Gamma(c_2) = N + 1$, что невозможно.

Отсюда следует, что m_1 не является начальным квадратом χ_2. Из существования χ_2 следует что m_1 не является конечным квадратом χ_1. Рассмотрим квадрат m_2, следующий за m_1 на дуге χ_1. Так как, по доказанному в п. 3.30.7, $\Gamma(i)$ не разделяет отрезков множества $\mathfrak{A}$, соединяющих в χ_1 и χ_2 квадраты m_1 и m_2, то $\chi_1 \cap m_2$ и $\chi_2 \cap m_2$ достижимы друг до друга внутри m_2 с помощью дуги, не пересекающей $\Gamma(i)$. Тогда к квадрату m_2 применимы все вышеизложенные рассуждения. Утверждение 3.30.12 доказано.

В дальнейших обозначениях нумерация отрезков $\underline{t}_b$ и $\underline{t}_h$ относится только к отрезкам множества $\mathfrak{A}$, причем мы используем обозначения $b_1, b_2, \ldots$ для $\underline{t}_b$ и $h_1, h_2, \ldots$ для $\underline{t}_h$.

3.30.15. Во всех случаях $[\alpha]$, $[\beta]$ и $[\gamma]$ a_{i+1} 1) либо изолокально b_1 или h_1, 2) либо неизолокально ни одному из них и лежит от пары этих отрезков по другую сторону * по сравнению с отрезком a_i. (Это утверждение нетривиально лишь в случае $[\gamma]$; тогда она следует из того, что $K_\Gamma \leqslant N$.) В случае 2) a_{i+1} обозначим через z; в случае 1) через z обозначим тот из отрезков b_1 и h_1, с которым изолокален a_{i+1}.

3.30.16. Если в $\underline{t}_b$ и $\underline{t}_h$ имеются нормальные триплеты, мы заменим $\underline{t}_b$ и $\underline{t}_h$ на некоторые меньшие их дуги, в которых нет нормальных триплетов, причем делать это будем так, чтобы взаимное расположение отрезков a_i, a_{i+1}, b_1, h_1 осталось неизменным. (Под в з а и м н ы м р а с п о л о ж е н и е м понимается порядок концов этих отрезков на границе квадрата множества M, которому принадлежит конец $\Gamma(i)$.) Пусть в $\underline{t}_b$ содержится нормальный триплет. Тогда, согласно лемме 3.13, можно уложить всю картину так, чтобы этот триплет можно было сократить, заменив в нем три изолокальные дуги одной, причем из самой конструкции этих сокращений видно (см. доказательство леммы 3.13), что взаимное расположение указанных выше отрезков не изменится. Может оказаться, что в дуге, полученной из $\underline{t}_b$ в результате преобразования, опять есть нормальный триплет; тогда уничтожаем его тем же способом, и так до тех пар, пока нормальных триплетов не будет. Таким же образом уничтожаем нормальные триплеты в $\underline{t}_h$.

Дуги $\underline{t}_b$ и $\underline{t}_h$ после этого преобразования обозначим через t_b и t_h.

* Слова «по другую сторону от пары отрезков» нужно понимать в том смысле, что концы отрезков a_i и a_{i+1}, лежащие на границе содержащего конец $\Gamma(i)$ квадрата M, разделены на границе M парой точек, являющихся концами b_1 и h_1.

3.30.17. Сумму $t_b \bigcup t_h \bigcup z$ в том фиксированном взаимном расположении всех составляющих их отрезков множества $\mathfrak{A}$, которое получилось в результате построения, обозначим через $\underline{r}$.

$\underline{r} \in {}^{N-1}R$. Действительно, t_b и t_h квазиэлементарны, функция $|K|$ на них всюду меньше N. z, в зависимости от его направления, можно присоединить к одной из дуг t_b и t_h так, чтобы функция $K(z)$, продолженная на него с этой дуги, по модулю не превышала $N-1$, причем полученная дуга будет квазиэлементарной.

Присоединим к $\underline{r}$ еще четыре квазиэлементарные дуги X_1, X_2, Y_1 и Y_2, при этом изменим осуществление дуг t_b, t_h и $\Gamma(i)$, но взаимное расположение отрезков b_1, h_1, a_i и a_{i+1} не будем менять. Построение дуг Y_1 и Y_2 получается из построения дуг X_1 и X_2 заменой, соответствующей зеркальному отражению плоскости в оси x. Ниже излагается построение X_1 и X_2.

Если при построении $\underline{t_b}$ имели место случаи [β] или [γ] и z не совпадает с b_1, то полагаем $X_1 = X_2 = t_b$.

Если при построении $\underline{t_h}$ имели место случаи [β] или [γ] по отношению к $\underline{t_h}$ (т. е. $K_\Gamma(a_i) \leqslant -N+1$), то также полагаем $X_1 = X_2 = t_b$.

Нашей целью является построение такого якоря, на котором нарушается условие П.

3.30.18. Пусть в Г существует дуга, содержащая ровно два отрезка множества $\mathfrak{A}$, один из которых изолокален с a_i, а другой — с a_{i+1}, причем эта дуга лежит слева от a_i и a_{i+1} в смысле положительного направления отрезков a_i и a_{i+1} на Г. Такая дуга называется *криминальной дугой*; ее отрезок, изолокальный с a_i, обозначается через d_{k1}; другой ее отрезок — через d_{k2}; сама дуга — через d_k; конец отрезка d_{k1}, ближайший к d_{k2}, — через ζ_k. Если криминальная дуга отсутствует, то рассматриваются три случая: 1_k) $K_\Gamma(a_{i+1}) = K_\Gamma(a_i) + 1$, 2_k) $K_\Gamma(a_{i+1}) = K_\Gamma(a_i)$ и 3_k) $K_\Gamma(a_{i+1}) = K_\Gamma(a_i) - 1$. Если некоторая дуга в t_b обладает всеми свойствами криминальной дуги, то такая дуга называется *t_b-криминальной*.

3.30.19. В случае [α] пусть существует t_b-криминальная дуга. Среди всех таких дуг возьмем ближайшую на плоскости к отрезкам a_i и a_{i+1} и обозначим ее через d_{bk}; отрезки множества $\mathfrak{A}$, ее составляющие, — соответственно через d_{bk1} и d_{bk2}; конец отрезка d_{bk1}, ближайший на t_b к d_{bk2}, — через ζ_{bk}. $K_{t_b}(d_{bk1}) = K_{t_b}(b_1) - 2$: иначе дуга d_{bk} не была бы ближайшей. Если существует t_b-криминальная дуга, то существует криминальная дуга. Действительно, пусть $S(t_b(t))$ изолокально с $S(\underline{t_b})$ (см. п. 1.16). При каком-то t точка $t_b(t)$ переходит с d_{bk2} на d_{bk1}, так что в $\underline{t_b}$ есть дуга ψ, изолокальная с d_{bk}. Эта дуга изолокальна с дугой из Г, смежной с ней в процессе построения $\underline{t_b}$, так как на отрезках Г, по которым строилась ψ, K_Γ было не больше, чем $K_{t_b}(b_1)$.

3.30.20. Если в случае [α] не существует криминальной дуги, то полагаем $X_1 = X_2 = t_b$. В случаях [β] и [γ] при отсутствии криминальной дуги дуги X_1 и X_2 строятся следующим образом. В случае 1_k) отсутствие криминальной дуги означает, что можно точку ξ', не пересекая $\Gamma(i)$, соединить ломаной, составленной из отрезков $\mathfrak{B}$, с такими не пересекающими $\Gamma(i)$ отрезками p и q, изолокальными соответственно a_i и a_{i+1}, которые лежат по левую сторону от a_i и a_{i+1} в смысле положительного направления отрезков a_i и a_{i+1} на Γ и для которых все отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги $\Gamma(i+1)$, изолокальные p, лежат на плоскости по одну сторону от p и, аналогично, все отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги $\Gamma(i+1)$, изолокальные q, лежат на плоскости по одну сторону от q. Рассмотрим квадрат со стороной 0,9, две стороны которого содержат p и q. Сторону этого квадрата, параллельную p, обозначим через p'; сторону, параллельную q, — через q'. Рассмотрим отрезок s множества $\mathfrak{A}$, изолокальный p' и лежащий в своем локусе ближе к центру этого квадрата, чем все изолокальные с ним отрезки дуги $\Gamma(i+1)$, и отрезок u, изолокальный q' и лежащий в своем локусе ближе к центру квадрата, чем все изолокальные с ним отрезки $\Gamma(i+1)$. Все отрезки p, q, s и u можно соединить между собой ломаными, состоящими из отрезков множества $\mathfrak{B}$ и не пересекающимися с $\Gamma(i+1)$. Присоединим к t_b построенную выше дугу, соединяющую t_b с полученным множеством, и само это множество; это и есть $X_1 \bigcup X_2$; будем обходить добавленную часть в следующем порядке: p, u, s, q; ближайший к s конец отрезка q есть конец X_1. q и построенную выше дугу, соединяющую q с t_b, присоединим к t_b. Это есть X_2. На всех отрезках множества $\mathfrak{A}$ дуги X_1 будет $K_X \leqslant N-1$. При этом если $N=2$, то на последнем отрезке X_1 $|K_X|$ превысит $N-1$. Для этого случая возьмем в качестве последнего отрезка дуги X_1 первый конец отрезка s, а отрезки s и q присоединим к X_2. Во всех этих случаях полученные дуги входят в ${}^{N-1}D_l^q$. В случае 2_k) отсутствие криминальной дуги означает, что можно пристроить к t_b перпендикулярный к a_i (и a_{i+1}) отрезок $\rho \in \mathfrak{A}$, который отходит от Γ влево и не пересекает $\Gamma(i+1)$. Этот отрезок можно присоединить к t_b. Полученная дуга входит в ${}^{N-1}D_l^q$. t_b с этим отрезком и дугой, составленной из отрезков множества $\mathfrak{B}$, соединяющей этот отрезок с t_b и не пересекающей $\Gamma(i+1)$, есть $X_1 = X_2$. В случае 3_k) отсутствие криминальной дуги означает, что существует либо параллельный a_i, либо параллельный a_{i+1} отрезок $\rho \in \mathfrak{A}$, отходящий от точки ξ' влево от Γ, который можно соединить с t_b ломаной, составленной из отрезков множества $\mathfrak{B}$ и не пересекающей $\Gamma(i+1)$. Присоединяем к t_b этот отрезок и эту ломаную. Полученная дуга и есть дуга $X_1 = X_2$.

Теперь для всех трех случаев $[\alpha]$, $[\beta]$ и $[\gamma]$ остается рассмотреть только случай, когда криминальная дуга существует. В случае $[\alpha]$ из существования криминальной дуги следует существование t_b-криминальной дуги, отделяющей криминальную дугу от a_i и a_{i+1}; иначе часть дуги Γ от a_i до ζ_k образовала бы петлю, внутри которой должна лежать вся t_b. В случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ из отсутствия криминальной дуги, очевидно, следует отсутствие t_b-криминальной дуги; мы этим уже воспользовались, утверждая, что дуги X_1 и X_2 можно сделать несамопересекающимися.

3.30.21. Точку ξ' в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ и точку ζ_{bk} в случае $[\alpha]$ обозначим через ω. Включаем в дугу X всю дугу t_b до точки ω. Дальше ведем X по отрезкам множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вдоль Γ по левую сторону от Γ в сторону, положительную на Γ. Построение ведется аналогично построению пункта 3.30.2; при этом мы следим, чтобы никакие из рассмотренных выше отрезков множества $\mathfrak{A}$, в том числе отрезки дуг t_b и t_k и отрезки дуг Y_1

и Y_2, построенных справа от Γ, не отделяли пристраиваемые отрезки дуги X от соответствующих им отрезков Γ; сами эти пристраиваемые отрезки обозначим через $x_1, x_2, \ldots$, так что x_1 изолокален d_{k1} и ничем от него не отделен. Построение прекращаем тогда, когда: 1) или на следующем отрезке после последнего построенного K_X больше $N-1$ (берется функция K_X, продолженная с t_b при движении по t_b в сторону от I'); 2) или дуга, отрезки множества $\mathfrak{A}$ которой суть $z, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, есть дуплет; легко доказать, что такой дуплет является чистым и скачок функции K_X в его вершине — отрицательный; 3) или в процессе построения мы дойдем до конца $\Gamma(i)$.

В случаях 1) и 3) построение X закончено; полагаем $X_1 = X_2 = X$.

В случае 2) пусть $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{\frac{k}{2}} a_{\frac{k}{2}}$, где $\alpha_i = \pm 1$ и a_i — локусы, есть траектория первой половины этого дуплета. Конец k-го отрезка дуги X обозначим через ω_1.

3.30.22. Пусть построение дуги X пункта 3.30.21 закончилось случаем 2). Дальнейшее построение зависит от того, существует ли еще одна криминальная дуга, отделяемая отрезками x_k и x_{k+1} от первой криминальной дуги. Пусть такой дуги не существует. Тогда к X пристроим от точки ω_1 либо прямоугольник p, q, s, u (аналогично тому, как это сделано в п. 3.30.20 в случае 1_k), либо отрезок ρ в случаях 2_k) и 3_k), так же, как это было сделано в п. 3.30.20. Строим две дуги X_1 и X_2, соединенные в конечной точке, отнеся к X_1 всю дугу X и одну часть отрезков этого прямоугольника, к X_2 — всю дугу X и остальные отрезки этого прямоугольника, с таким расчетом, чтобы $|K_{X_1}|$ и $|K_{X_2}|$ не превышали $N-1$. Часть дуги Γ от ζ_k до конца a_i образует петлю, внутрь которой не заходят отрезки множества $\mathfrak{A}$ дуги t_b, предшествующие на t_b точке ξ' в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ и точке ζ_{bk} в случае $[\alpha]$. Поэтому дуги X_1 и X_2 можно сделать несамопересекающимися.

Пусть теперь такая криминальная дуга существует. Ее элементы будем обозначать теми же символами, которые относились к первой криминальной дуге, снабжая их индексом 1 справа вверху. В качестве следующего за x_k отрезка дуги X возьмем изолокальный с d^1_{k1} отрезок y_1 множества $\mathfrak{A}$, ничем не отделенный от d^1_{k1}. Дальше ведем X вдоль Γ так, чтобы пристраиваемые отрезки ничем не были отделены от смежных отрезков Γ. Построение ведем до первого такого номера j, что имеет место одно из следующих обстоятельств: 1) на отрезке множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, следующем за тем, который смежен с y_j, $K_\Gamma \geqslant N-1$; 2) дуга — $x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}$ есть дуплет; этот дуплет будет чистым, и в его вершине скачок K_X будет отрицательным; 3) в процессе построения мы дойдем до конца $\Gamma(i)$; 4) траектория дуги $y_1, \ldots, y_{j-1}$ сделана из траектории $x_{\frac{k}{2}+2}, x_{\frac{k}{2}+3}, \ldots, x_k$, а траектория $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j$ не сделана из траектории $x_{\frac{k}{2}+1}, x_{\frac{k}{2}+2}, \ldots, x_{k+1}$. Если два из этих случаев имеют место одновременно (чего на самом деле не может быть; доказательство этого опускаю), то выбираем тот, у которого больше порядковый номер в настоящем списке.

В случае 4) построение X закончено; X есть сумма части t_b до ω, дуги $[\omega, \omega_1] = x_1, x_2, \ldots, x_k$ и дуги $y_1, y_2, \ldots, y_j$. Полагаем $X_1 = X_2 = X$. Дуга

X квазиэлементарна, так как не существует триплетов в дугах $[\omega, \omega_1]$ и $y_1, y_2, \ldots, y_j$, ибо эти дуги смежны с Γ.

Пусть имеет место случай 2). Рассмотрим область близости $O\omega_1$ дуг $-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_{\frac{k}{2}+1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{j}{2}}$. Число прямоугольников, составляющих эту область, равно наименьшему из чисел $\frac{k}{2}$ и $\frac{j}{2}$. Действительно, легко видеть, что в противном случае имел бы место случай 4). Если в этой области лежат какие-нибудь отрезки множества $\mathfrak{A}$ из $\Gamma(i)$ или какие-либо отрезки множества $\mathfrak{A}$ построенной части X, то изменим расположение этих дуг таким образом, чтобы в случае, если $k < j$, эти дуги легли по другую сторону от $x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{k}{2}}$, если же $k > j$, — по другую сторону от $y_{\frac{j}{2}+1}, \ldots, y_j$. Новое расположение строится способом, которым доказывается лемма 3.13; построение возможно, так как вышеназванные дуги не проходят между первыми концами дуг, на которых построена область близости $O\omega_1$. После этого в квадрате $m^{\kappa}(O\omega_1)$ соединим дуги $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_j$ ломаной из $\mathfrak{B}$; часть суммы этих дуг, заключенную на X между точками пересечения с этой ломаной, выбросим. В оставшейся дуге переименуем отрезки и обозначим их через $x_1, \ldots, x_k$ (новое k равно наибольшему из старого k и j), продолжаем построение в точности так, как это изложено в начале настоящего пункта.

3.30.23. Построение пунктов 3.30.21 и 3.30.22 закончится при одном из следующих обстоятельств.

a) Дуги X_1 и X_2 заканчиваются образующими прямоугольник отрезками p, q, s, u.

b) X заканчивается отрезком ρ.

c) На отрезке множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ, следующем за последним отрезком дуги X, $K_\Gamma \geqslant N-1$.

d) Для последнего отрезка дуги X, y_j, траектория дуги $y_1, \ldots, y_{j-1}$ сделана из траектории $x_{\frac{k}{2}+2}, x_{\frac{k}{2}+3}, \ldots, x_k$, а траектория дуги $y_1, \ldots, y_j$ не сделана из траектории $x_{\frac{k}{2}+1}, x_{\frac{k}{2}+2}, \ldots, x_{k+1}$.

e) Последний отрезок дуги X смежен с a_i.

Построение дуг X_1 и X_2 закончено. В случае $[\alpha]$ построим еще дуги Y_1 и Y_2, которые так же строятся по отношению к t_h, как X_1 и X_2 по отношению к t_b.

Сумма $t_b \cup t_h \cup X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup z$ в том фиксированном взаимном расположении составляющих эти дуги отрезков, которое получилось в результате построения, со всеми их общими отрезками множества $\mathfrak{A}$ и общими точками дуг, составленных из отрезков множества $\mathfrak{B}$, есть искомый якорь $r \in {}^{N-1}R$. (При этом z включается в одну из дуг t_b или t_h.)

3.30.24. Из построения r видно, что существует такое I-осуществление $\Gamma(i+1)$ и такое осуществление r, при которых r не пересекается с $\Gamma(i)$. Докажем, что не существует I-осуществления $\Gamma(i+1)$, не пересекающего r (при этом, в силу определения понятия эквивалентности в ${}^{N-1}R$, не важно, с каким осуществлением r мы имеем дело), при котором начало Γ лежит на левой границе I.

Пусть такое I-осуществление дуги $\Gamma(i+1)$ существует. При этом осуществлении либо $z \in r$ лежит по правую сторону от a_{i+1} (левая укладка дуги $\Gamma(i+1)$), либо по левую (правая укладка). Все относящееся к тому положению $\Gamma(i+1)$, которое получилось в результате построения r, будем называть **нормальным** и в обозначениях отмечать индексом 0 слева внизу; все относящееся к непересекающей r укладке $\Gamma(i+1)$ будем называть **новым** и отмечать индексом 1 слева внизу. Из построения r следует, что всякая новая укладка $\Gamma(i+1)$ обладает тем свойством, что a_i в случае $[\alpha]$ для t_b и t_h лежит либо по другую сторону от h_1, либо по другую сторону от b_1 по сравнению с нормальной укладкой, а в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ для t_b при наличии криминальной дуги — либо по другую сторону от h_1, либо по другую сторону от x_1 по сравнению с нормальным положением. При отсутствии же криминальной дуги в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ для t_b ${}_1a_i$ лежит по другую сторону от h_1 по сравнению с ${}_0a_i$. Для каждого из этих случаев соответственно отрезок $h_1, b_1, \ldots, x_1$ обозначим через λ. В случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ для t_b левая укладка возможна только при наличии криминальной дуги.

Рассмотрим случай $[\alpha]$ для t_b. Для двух вариантов расположения a_i и λ будем строить области близости дуг $-t_b$ и $-\Gamma(i)$. (Положительное направление на t_b взято от I'.) Пусть t — меньшая из длин областей близости для обоих вариантов. Для различных видов окончания построения $O(-t_b, -\Gamma(i))$ введем классификацию обстоятельств, приведенную в п. 3.24.4. Рассмотрим, например, левую укладку.

3.30.25. Случаи ${}_0\{1,1\}$, ${}_0\{1,3\}$, ${}_0\{3,1\}$, ${}_0\{3,3\}$, ${}_1\{1,1\}$, ${}_1\{1,3\}$, ${}_1\{3,1\}$, ${}_1\{3,3\}$ не имеют места по тем же причинам, что в п. 3.24.6. Случаи ${}_0\{2, i)$ и ${}_0\{i, 2\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ невозможны, так как a_i и λ соединены дугой, не пересекающей $\Gamma(i)$ и t_b, и эти случаи привели бы к нормальным триплетам либо в Γ, либо в t_b. В новом положении можно $O(-t_b, -\Gamma(i))$ продлить в сторону первого прямоугольника этой области, прибавив к ней прямоугольник, заключенный между z и a_{i+1}; расширенную область обозначим через ${}_1O$; область $O(-t_b, -\Gamma(i))$ — через ${}_0O$.

Случай ${}_1\{i, 2\}$ невозможен, так как Γ, вследствие отсутствия в ней триплетов, должна была бы выйти из ${}_1O$ со стороны отрезков z и a_{i+1}, но тогда a_{i+1} является последним отрезком некоторого дуплета в Γ. При $K_\Gamma(a_i) \leqslant -N+1$ (т. е. в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$, взятых по отношению к построению t_h) невозможен случай ${}_1\{2, i\}$, так как t_b, вследствие отсутствия в ней нормальных триплетов, должна была бы выйти из ${}_1O$ со стороны отрезков z и a_{i+1}, но тогда в t_b на отрезке, смежном с λ, было бы $K_{t_b} \leqslant -N$. Тогда при $K_\Gamma(a_i) \leqslant -N+1$ случаи ${}_0\{3, 4\}$, ${}_1\{3, 4\}$, ${}_0\{4, 4\}$, ${}_1\{4, 4\}$, ${}_0\{4, 3\}$, ${}_1\{4, 3\}$ невозможны, так как при переходе от одного варианта к другому они переходят в запрещенные типы, и остаются случаи ${}_{0,1}\{4, 1\}$ и ${}_{0,1}\{1, 4\}$, которые переходят друг в друга при переходе от одного варианта к другому, а это означает, что области близости ${}_1O$ и ${}_0O$ обе могли быть продолжены. Следовательно, они продолжаются до конца одной из этих дуг, но, поскольку Γ и t_b оканчиваются на разных сторонах I, из существования обоих вариантов укладки следует, что должны иметь место либо ${}_{0,1}\{i, 2\}$, либо ${}_{0,1}\{2, i\}$.

3.30.26. Рассмотрим случай ${}_1\{2, i\}$ при $K_\Gamma(a_i) \geqslant -N+2$. (Как уже было сказано выше, ни одна из дуг $-\Gamma(i)$ и $-t_b$ не может целиком составлять одну из сторон ${}_1O$ и ${}_0O$, так как концы этих дуг лежат на разных сторонах I; поэтому обстоятельство ${}_1\{2,\ i\}$ в случае $[\alpha]$ обязательно должно иметь место.) Тогда, в силу отсутствия нормальных триплетов в t_b, эта дуга в новом положении после поворота в ${}_1O$ должна в этой области уложиться монотонно и выйти из ${}_1O$ через прямоугольник со сторонами z и a_{i+1}. Следовательно, в t_b образовался чистый дуплет, одна половина которого образует правую границу в ${}_0O$, а другая принадлежит ${}_1O$. Обозначим этот дуплет через T. Скачок функции K_{t_b} при переходе от первой (в порядке на t_b, взятом от I') половины его ко второй — положительный. Рассмотрим первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ дуги T — d_1 и отрезок d_2 множества $\mathfrak{A}$ дуги t_b, предшествующий d_1 на t_b. Эта пара отрезков образует t_b-криминальную дугу. Если эта дуга является ближайшей к a_i и a_{i+1}, т. е. $d_1=d_{bk_1}$, $d_2=d_{bk_2}$, то тем самым доказано, что в новом положении отрезок x_1 лежит справа от a_i, если смотреть по направлению a_i. Если же эта t_b-криминальная дуга не является ближайшей, то ближайшая находится между ней и a_i и a_{i+1}; следовательно, в этом случае и подавно x_1 лежит в новом положении справа от a_i.

3.30.27. Дугу $x_1, x_2, \ldots$ обозначим через E как для случая $[\alpha]$, так и для случаев $[\beta]$ и $[\gamma]$. E^* есть в случае $[\alpha]$ E с добавленным предыдущим отрезком множества $\mathfrak{A}$ дуги t_b; в случаях $[\beta]$ и $[\gamma]$ E^* есть E с добавлением отрезка b_1. Кроме того, добавляем составленную из отрезков множества $\mathfrak{B}$ входящую в X дугу, соединяющую добавленный отрезок с x_1. Этот добавленный отрезок предшествует на E отрезку x_1; обозначим его через x_0. В случае 2) пункта 3.30.21 считается, что отрезок x_{k+1} тоже вошел в E; k здесь—то, которое получилось окончательно, после всех перестроек пункта 3.30.22.

Рассмотрим области близости ${}^1_0O$ и ${}^1_1O$ для обоих вариантов укладки дуги $\Gamma(i)$ и дуги E. Рассмотрим наименьшую длину этих двух областей и исследуем, какими обстоятельствами может заканчиваться их часть, имеющая эту длину.

1. Допустим, что вся дуга E вошла в границы ${}^1_0O$ и ${}^1_1O$. В случае 2) это сразу дает, что a_{i+1} является повторителем. Случай 3), очевидно, невозможен. Случай 1) будет рассмотрен ниже.

2. E не целиком вошла хотя бы в одну границу ${}^1_0O$ или ${}^1_1O$. Обстоятельство ${}_1\{i,\ 2\}$ невозможно, так как сразу получается, что a_{i+1} есть повторитель. Обстоятельство ${}_0\{i,\ 2\}$ невозможно, так как дуга E целиком составляет левую сторону границы области близости самой этой дуги и некоторого куска дуги Γ (по построению E). В этой области нет никаких кусков Γ, которые заходили бы в последний прямоугольник этой области через ее конечный квадрат. (Порядок прямоугольников области взят соответствующим порядку отрезков $x_1, x_2, \ldots, x_k$.) Область ${}^1_0O$ можно расширить, сделав этот кусок дуги Γ ее правой границей. Тогда обстоятельство ${}_0\{i,\ 2\}$ будет иметь место для расширенной области, но из этого следует наличие триплета в Γ.

Пусть имеет место обстоятельство ${}_1\{2,\ i\}$. Пусть e_1 и e_2 — смежные на E отрезки множества $\mathfrak{A}$, первый из которых еще входит в границу ${}^1_1O$, а второй лежит внутри последнего прямоугольника этой области. e_1 и e_2 являются средними отрезками некоторого дуплета T_1 дуги E. Пусть некоторая точка дуги, состоящей из отрезков множества $\mathfrak{B}$ и соединяющей в E e_1 и e_2, есть η. $K_{t_b}(e_2)-K_{t_b}(e_1)=-2$. Пусть H есть E, начиная с отрезка e_2. Дуга H укладывается монотонно на ${}^1_1O$ ввиду элементарности Γ. Область ${}^1_1O$ продолжим прямоугольником, границами которого являются отрезки x_0 и a_{i+1}. Расширенную область обозначим через O_4. Допустим, что H, начиная с отрезка e_2, целиком уложилась на ${}^1_1O$ (до расширения). Тогда не имел места случай 1) пункта 3.30.21, так как H смежна с отрезками, на которых K_{t_b} больше. Случай 3) также, очевидно, не имел места. Пусть имеет место случай 2). Из чистоты дуплетов T_1 и E^* следует, что весь дуплет T_1 принадлежит дуге $x_{\frac{k}{2}+1}, \ldots, x_k, x_{k+1}$. В первой половине дуплета E^* возьмем дуплет, изолокальный дуплету T_1. Он является чистым, и скачок функции K_X в его вершине — положительный. В нормальном положении a_i лежит внутри предпоследнего прямоугольника его области близости и направлен к выходу из нее. Отсюда следует, что a_{i+1} есть повторитель. Допустим, что H не уложилась на O_4. Это значит, что существует число $i<k+1$ (ср. случай 2) пункта 3.30.21), такое, что $z, x_1, \ldots, x_i$ есть дуплет. Полученная после перестроек п. 3.30.22 дуга E^* обладает тем свойством, что никакая содержащаяся в ней дуга, начинающаяся с начала E^*, не является дуплетом. Действительно, дуга $x_0, x_1, \ldots, x_{k_1}, x_{k_1+1}$, построенная на первом шаге, до объединений п. 3.30.22, обладала этим свойством. Если следующая дуга $y_1, \ldots, y_{j+1}$ закончилась случаем 2) пункта 3.30.21 и $j\leqslant k$, то дуга $x_0, x_1, \ldots, x_{k_1}$ не изменила в результате перестройки своей структуры, поэтому она опять обладает этим свойством. Если же $j>k$, то дуга $-x_{k_1+1}, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}$ обладает этим свойством, а потому и после перестройки это свойство опять имеет место.

Итак, остается случай, когда первый отрезок множества $\mathfrak{A}$ второй половины дуплета E^* есть первый отрезок дуги E^*, не входящий в границу ${}^1_1O$. Очевидно, обстоятельства a) и b) пункта 3.30.23 не имеют места, так как иначе укладка была бы невозможна. В новом положении отрезок y_1 лежит справа от a_i, если смотреть по направлению a_i. Окончание построения E^* вида d) пункта 3.30.23 невозможно, так как из рассмотрения нового положения сразу видно, что если дуга $y_1, y_2, \ldots, y_l$ сделана из $x_1, \ldots, x_{\frac{k}{2}-1}$, то дуга $y_1, y_2, \ldots, y_l, y_{l+1}$ сделана из $x_0, x_1, \ldots, x_{\frac{k}{2}}$. При этом используется тот факт, что дуга $x_1, \ldots, x_{\frac{k}{2}}$ не сделана из своей части, а это следует из того, что в противном случае в дуплете E^* содержался бы триплет.

3.30.28. Рассмотрим теперь два варианта областей близости для дуг $-\Gamma(i)$ и $E^1=y_1, y_2, \ldots$. Обозначим эти области через ${}^2_0O$ и ${}^2_1O$. Расширим дугу E^1, включив в нее отрезок $-x_{k+1}$; $E^{1*}=-x_{k+1}, y_1, y_2, \ldots$. Дуга E^1 не может закончиться способом 2) пункта 3.30.21, так как в этом случае она была бы объединена с предыдущей. Таким образом, для последнего отрезка дуги E^1 может иметь место либо случай c), либо случай e) пункта 3.30.23. Аналогично предыдущему построение этих областей не может закончиться при обстоятельствах $_0\{2, i\}$, $_0\{i, 2\}$, $_1\{i, 2\}$. Обстоятельство $_1\{2, i\}$ невозможно, так как это ведет к случаю 2) окончания дуги E^1, что невозможно.

Остаются случаи, когда вся дуга E^1 составляет одну сторону области близости, правую сторону для $\overset{2}{_0}O$ и левую для $\overset{2}{_1}O$. При этом случай e) невозможен, что легко доказывается.

Остается случай c). Этот же случай остался нерассмотренным при исследовании областей $\overset{1}{_0}O$ и $\overset{1}{_1}O$.

3.30.29. Связную часть дуги Γ, изолокальную E^* и смежную с E^*, в процессе построения E^* для случая c) обозначим через Δ_1. Для E^{1*} в случае c) аналогичную дугу также обозначим через Δ_1. Часть дуги $\Gamma(i)$, составляющую левую границу $\overset{1}{_0}O$ для дуги E (и $\overset{2}{_0}O$ для дуги E^1), обозначим через Δ^*. Δ^* с добавленным отрезком a_{i+1} обозначим через Δ_2. Я утверждаю, что на Γ между Δ_1 и Δ_2 нет отрезков множества $\mathfrak{A}$. Это следует из того, что иначе в дуге Γ между Δ_1 и Δ_2 должен был быть отрезок множества $\mathfrak{A}$, на котором $K_\Gamma > N$.

Лемма 3.29 доказана.

3.31. Лемма. *Число классов изолокальности дуг множества $^1D_I^э$ конечно. В каждой дуге из $^1D_I^э$ не больше, чем $\overline{N}(\overline{N}+1)^2+\overline{N}$, отрезков множества $\mathfrak{A}$.*

3.32. Доказательство. Пусть первая точка Γ лежит, например, на левой границе I. Пусть $\Gamma \in {}^1D_I^э$. Первый составляющий Γ отрезок (множества $\mathfrak{A}$) горизонтален. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\overline{N}-1}, a_{\overline{N}}$ — локусы, которые проходит некоторая вертикальная прямая $x=k$, $0 \leqslant k \leqslant \overline{N}$. В траектории дуги Γ любые два слагаемых, содержащие локусы этой группы, не разделены слагаемыми, содержащими локусы не из этой группы; это следует из того, что $|K_\Gamma| \leqslant 1$. Рассмотрим группу S_k всех тех слагаемых траектории $S(\Gamma)$, которые содержат локусы из этой группы. S_k сделана из траектории $a_1+a_2+\ldots+a_{\overline{N}}=T_k$. Рассмотрим все порции траектории T_k, составляющие S_k, в том порядке, в котором они входят в S_k: $d_1, d_2, \ldots, d_l$. Если d_{p-1}, d_p, d_{p+1} — три подряд стоящие порции, то число слагаемых в средней больше, чем хотя бы в одной из остальных двух: иначе в Γ был бы триплет. Значит, последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_l$ устроена следующим образом. Рассмотрим самые длинные порции. Их не больше двух и они стоят в Γ рядом. В обе стороны от них идут монотонные строго убывающие последовательности порций. Всего в S_k оказывается слагаемых не больше $\overline{N}(\overline{N}+1)$. Всего в Γ отрезков множества $\mathfrak{A}$ не больше, чем $\overline{N}(\overline{N}+1)^2+\overline{N}$. Так как эти отрезки взяты из конечного набора локусов, то число классов изолокальности $^1D_I^э$ конечно. Лемма доказана.

3.33. Лемма. *Если дуга $\Gamma \in {}^kD_I$ не содержит нормальных триплетов и ее траектория сделана из траектории дуги $\Delta \in {}^kD_I^э$, содержащей p отрезков множества $\mathfrak{A}$, то Γ содержит не больше, чем $\frac{1}{2}kp(p+1)$, отрезков множества $\mathfrak{A}$.*

3.34. Доказательство. Пусть (A, B, C) — минимальный триплет в Γ (т. е. не содержащий других триплетов), у которого начало дуги A является самым первым на Γ из всех возможных для всех минимальных триплетов. Допустим, что скачки функции K_Γ при переходе от A к B и от B к C — положительные. Γ^* есть часть дуги Γ от начала до конца дуги A. Γ^* изолокальна части дуги Δ; следовательно, Γ^* содержит не больше, чем p, отрезков множества $\mathfrak{A}$. Дуга A тоже содержит не больше, чем p, отрезков множества $\mathfrak{A}$. Пусть после C в Γ идет подряд еще несколько дуг C_2, $C_3, \ldots$, монотонно укладывающихся в $O(-A, B)$, число отрезков множества $\mathfrak{A}$ в каждой из которых — такое же, как в C. Скачки функции K_Γ при переходе от C к C_1, от C_1 к C_2 и т. д. все будут положительны, так как в противном случае появляется нормальный триплет. Следовательно, такая последовательность дуг вместе с A и B может содержать не больше, чем k, элементов, и число отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ к концу последнего отрезка последней дуги этой последовательности не превышает kp. Следующая часть дуги Γ, монотонно уложившаяся в $O(-A, B)$, содержит по крайней мере на единицу меньше элементов множества $\mathfrak{A}$, чем C. Всего в Γ получится не больше $k(p+(p-1)+(p-2)+\ldots)=\frac{1}{2}kp(p+1)$ элементов множества $\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

3.35. Лемма. *Если дуга $\sigma \in {}^kD_l$, не содержащая нормальных триплетов и содержащая p отрезков множества $\mathfrak{A}$, обладает траекторией, из которой сделаны траектории всех дуг некоторого множества $\mathfrak{M}$ квазиэлементарных дуг $\{\Gamma_i\}$, $\Gamma_i \in {}^kD_l^q$, то это множество содержит не больше $f(k, p)$ элементов, где f — некоторая функция.*

3.36. Доказательство. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{M}$. Каждая из дуг Γ^1, Γ^2 и Γ^3, в сумме составляющих Γ, сделана из σ; кроме того, Γ^2 и Γ^3 элементарны. Порции траектории $S(\sigma)$, составляющие $S(\Gamma^2)$, образуют последовательность, в которой длина порций сначала увеличивается, затем уменьшается, аналогично тому, как это имеет место в п. 3.32. Следовательно, Γ^2 содержит не больше $p(p+1)$ отрезков. Γ^1, по предыдущей лемме, содержит не больше $\frac{1}{2}kp(p+1)$ отрезков. Лемма доказана.

3.37. Доказательство теоремы В. Доказательство ведем по индукции. Число классов изолокальности дуг из ${}^1D_l^э$ конечно, согласно лемме 3.31; число отрезков множества $\mathfrak{A}$ в каждой из этих дуг не превышает $\overline{N}(\overline{N}+1)^2+\overline{N}$.

Пусть число классов изолокальности множества ${}^{p-1}D_l^э$ конечно и число отрезков множества $\mathfrak{A}$, входящих в каждую дугу из ${}^{p-1}D_l^э$, не превышает некоторой функции от $\overline{N}$ и p. Тогда, по лемме 3.33, количество неизолокальных дуг, не содержащих нормальных триплетов и входящих в ${}^{p-1}D_l$, также конечно и число отрезков множества $\mathfrak{A}$ в каждой такой дуге не превышает значения некоторой функции от $\overline{N}$ и p. Для каждой дуги из ${}^{p-1}D_l^q$ можно построить не содержащую нормальных триплетов дугу из ${}^{p-1}D_l$, из траектории которой сделана траектория нашей дуги. Тогда, по лемме 3.35, число классов изолокальности множества ${}^{p-1}D_l^q$ конечно, и число отрезков множества $\mathfrak{A}$ каждой такой дуги также не превышает значения некоторой функции от $\overline{N}$ и p. Число дуг из ${}^{p-1}D_l^q$, принадлежащих различным классам изолокальности или отличающихся взаимным расположением отрезков множества $\mathfrak{A}$, также конечно и не превышает значения некоторой функции от $\overline{N}$ и p. То же верно для множества якорей, которые можно из них скомбинировать; обозначим для них эту функцию через $\alpha(\overline{N}, p)$. Рассмотрим какую-нибудь дугу $\Gamma \in {}^pD_I^э$, начало которой принадлежит, например, левой стороне I. Пусть α_i — число различных якорей r из ${}^{p-1}R$ таких, что существует не пересекающее r I-осуществление $\Gamma(i)$, при котором начало Γ лежит на левой стороне I и $|K_\Gamma| \leqslant p$. Последовательность α_i монотонно не возрастает, $\alpha_0 = \alpha(\overline{N}, p)$. В этой последовательности может быть лишь $\alpha(\overline{N}, p)$ участков постоянства. Пусть C — какой-нибудь такой участок. По лемме 3.29, если i — номер не последнего элемента этого участка, то a_{i+1} есть повторитель; следовательно, согласно лемме 3.3, весь участок содержит не больше, чем $\frac{1}{2} k(k+1)$, отрезков, где k — номер второго члена этого участка. Отсюда число отрезков множества $\mathfrak{A}$ дуги Γ не превышает значения некоторой функции от $\overline{N}$ и p; следовательно, число классов изолокальности дуг множества ${}^pD_I^э$ ограничено некоторой функцией тех же аргументов. Тем самым теорема В доказана для дуг из ${}^ND_I^э$.

Для того чтобы доказать ее для ${}^ND^э$, заметим, что можно дугу Γ из ${}^ND^э$ соединить дугой, состоящей из отрезков множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, параллельных оси x, с левой стороной I так, чтобы эта дуга не пересекала Γ в своих внутренних точках. Теперь можно рассматривать сумму этой дуги и Γ как якорь из ${}^{2N+2}R$. Но число различных якорей этого класса конечно, как это установлено выше. Теорема доказана.

3.38. В этом пункте доказывается лемма, нужная для доказательства теоремы А.

Если траектория L^* сделана из траектории L и первое слагаемое L^* есть первое слагаемое L, а последнее слагаемое L^* есть последнее слагаемое L, то будем говорить, что траектория L^* есть параметризация траектории L. Пусть X и Y — две дуги из множества D. Если $X < Y$, то, очевидно, $S(Y)$ есть параметризация $S(X)$. Параметризация параметризации траектории L сама является параметризацией траектории L.

Лемма. *Пусть P — траектория, L_1 и L_2 — две ее параметризации. Тогда существуют параметризация Q_1 параметризации L_1 и параметризация Q_2 параметризации L_2, такие, что они совпадают, если их рассматривать как параметризации траектории P.*

Доказательство. k-му элементу траектории P поставим в соответствие отрезок $[k-1, k]$ оси y; k-му элементу траектории L_1 поставим в соответствие отрезок $[k-1, k]$ оси x; k-му элементу траектории L_2 поставим в соответствие отрезок $[k-1, k]$ оси x. Для каждого элемента x_i траектории L_1 найдем элемент $\alpha_j a_j$ траектории P, из которого сделан элемент x_i. Если x_i и $\alpha_j a_j$ входят в свои траектории с одинаковыми знаками, то нарисуем на плоскости отрезок, соединяющий точки с координатами $(i-1, j-1)$ и (i, j); если же они входят с разными знаками, то соединяем точки $(i, j-1)$ и $(i-1, j)$. Сумма всех таких отрезков называется графиком параметризации L_1. Аналогично строится график параметризации L_2. Каждый из графиков есть простая дуга. Обозначим их через l_1 и l_2.

Нам нужно теперь провести некоторую деформацию ломаных l_1 и l_2 для переведения их в «общее положение». Для описания деформации достаточно указать, куда переходят концы отрезков, составляющих l_1 и l_2. Деформацию проводим так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Концы l_1 и l_2 остаются неподвижными.

2) Концы остальных отрезков, составляющих l_1 и l_2, перемещаются не более, чем на $0,1$.

3) В результате деформации ординаты всех неконцевых точек l_1 и l_2 заключены строго между ординатами концов.

4) Не существует двух точек, являющихся концами отрезков, составляющих l_1 и l_2, и не являющихся концами l_1 и l_2, которые имеют в результате деформации одинаковые ординаты.

Существование такой деформации очевидно. Деформированные графики обозначим через l_1^* и l_2^*.

Пусть точка $q_1(t)$ непрерывно движется по l_1 и одновременно точка $q_2(t)$ непрерывно движется по l_2 ($t \geqslant 0$ — действительный параметр) так, что выполняются следующие условия:

a) $q_i(0)$ есть левый конец l_i^* $(i = 1, 2)$.

b) При любом t $q_1(t)$ и $q_2(t)$ имеют одинаковые ординаты.

c) Если при всех t из интервала (α, β) $q_1(t)$ и $q_2(t)$ не являются концами составляющих l_1^* и l_2^* отрезков, то на всем этом интервале ординаты точек $q_1(t)$ и $q_2(t)$ изменяются монотонно.

d) Если при $t = t_0$ одна из точек $q_1(t_0)$ и $q_2(t_0)$ оказалась концом составляющего l_1 или соответственно l_2 отрезка, то в некоторой окрестности t_0 абсцисса этой точки меняется монотонно.

Это движение может закончиться, очевидно, только тем, что при некотором $t = t_1$ точки $q_1(t_1)$ и $q_2(t_1)$ окажутся на правых концах своих дуг. Теперь деформируем графики l_1^* и l_2^* в их первоначальное положение и соответственно деформируем функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Абсциссы функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ суть искомые параметризации Q_1 и Q_2. Действительно, мы видим, что их ординаты совпадают. Лемма доказана.

3.39. Доказательство теоремы А. Пусть в квадрате со стороной $\frac{2}{\varepsilon}$ число классов изолокальности множества ${}^{N+1}D^{\ni}$ не превышает K. Тогда совокупность Ψ, о которой идет речь в формулировке теоремы А, содержит не более K элементов.

Действительно, допустим, что в совокупности Ψ нашлось $K+1$ элементов. Множество этих элементов обозначим через Ψ^*. Рассмотрим множество E концов всех отрезков, составляющих ломаные из Ψ^*. E есть конечное множество. Круг O, в котором расположены дуги системы Ψ, уложим вместе с дугами на плоскую $\frac{\varepsilon}{2}$-решетку таким образом, чтобы множество E не пересекалось с прямыми вида $x = i\,\frac{\varepsilon}{2}$, $y = i\,\frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а решетка не пересекалась с ломаными. Минимум из расстояния от E до суммы S всех этих прямых и расстояния от решетки до суммы ломаных обозначим через δ. Множество точек, расстояние которых до S больше

$\frac{\delta}{2}$, обозначим через M^*; это множество есть сумма открытых квадратов со сторонами, параллельными осям и равными $\frac{\varepsilon}{2} - \delta$. *$V$-прямоугольником* назовем открытый прямоугольник, двумя сторонами которого служат две стороны каких-нибудь квадратов M^*, в то время как сам прямоугольник не пересекается с M^*. Если из плоскости вычесть множество M^* и сумму всех V-прямоугольников, то останется сумма квадратов, которую обозначим через W. Определим преобразование f плоскости следующим образом. Точка с координатами $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2},\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2}\right)$ преобразуется в точку с координатами $(m,\ n)$. Таким образом, центр каждого M^*-квадрата переходит в центр некоторого квадрата M (см. п. 1.8). Распространим теперь это отображение на весь M^*-квадрат так, чтобы это было растяжение без поворота, переводящее этот M^*-квадрат в соответствующий M-квадрат. Следовательно, для каждого V-прямоугольника определено линейное преобразование двух его противоположных сторон. Это преобразование можно линейно распространить на весь V-прямоугольник так, чтобы он переходил в соответствующий локус. Теперь на всех сторонах каждого W-квадрата определено преобразование, которое, очевидно, можно линейно распространить на весь W-квадрат. $f(\Psi^*)$ целиком лежит в сумме локусов и M-квадратов, причем все концы составляющих $f(\Psi^*)$ отрезков лежат в M-квадратах. Если $f(x)$ и $f(y)$, где x и y — точки плоскости, принадлежат одному M-квадрату или одному локусу, то $\rho(x, y) < \varepsilon$. Вращение ломаных из Ψ^* изменилось в результате преобразования меньше, чем на 1. Каждую дугу из $f(\Psi^*)$ деформируем еще следующим образом, оставляя ее несамопересекающейся: каждый отрезок этой дуги, проходящий через некоторый локус, сделаем параллельным большой стороне этого локуса; каждый кусок этой дуги, принадлежащий некоторому M-квадрату, заменим на близкую дугу, соединяющую те же точки границы этого M-квадрата и состоящую из отрезков множества $\mathfrak{B}$. Преобразованную систему дуг $f(\Psi^*)$ обозначим через Ψ^{**}. Вся система Ψ^{**} помещается внутри квадрата со стороной $\frac{2}{\varepsilon}$. Хордой дуги $\Gamma \in D$ называется элементарная дуга, которая меньше Γ. Все хорды дуг из Ψ^{**} принадлежат ${}^{N+1}D^{э}$. Поэтому в Ψ^{**} найдутся две дуги с одинаковыми хордами. Пусть это будут дуги Γ_1 и Γ_2. Каждая из них является параметризацией своей хорды. По лемме 3.38 найдутся параметризации Q_1 и Q_2 дуг Γ_1 и Γ_2, которые совпадают, если их рассматривать как параметризации хорды. Но это означает, что отклонение дуг $f^{-1}(\Gamma_1)$ и $f^{-1}(\Gamma_2)$ в смысле п. 1.2 меньше ε.

Теорема доказана.

(Поступило в редакцию 4/V 1959 г.)

Литература

1. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1933.
2. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.