Дюжина задач о среднем арифметическом

А. ШЕНЬ

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше. Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу, то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в *среднем* на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфеты, и потому хотя бы один должен быть получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идет о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a+b)/2$, среднее трех чисел a, b, c равно $(a+b+c)/3$ и так далее: среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), $a_1, a_2, \ldots, a_9$ – количество конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим сравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить на среднее арифметическое.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20.

2. Найдите среднее арифметическое чисел

$$-19, -18, -17, -16, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20.$$

3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.

4. Когда в комнату вошел четвертый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении 3 : 5.

6. Одного из школьников 7 А класса перевели в 7 Б, отчего средний рост школьников в обоих классах (7 А и 7 Б) увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трех строк и двух столбцов средние арифметические в трех строках равны a, b, c, а среднее арифметическое в первом столбце равно d. Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \le (a_1 + a_3)/2$, $a_3 \le (a_2 + a_4)/2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \le 43$.

Решения задач

1. Сумма всех 20 чисел равна 210, поэтому среднее арифметическое равно $210/20 = 10{,}5$.

2. Тут 19 отрицательных чисел, 20 положительных и ноль, всего 40 чисел. При суммировании все числа, кроме 0 и 20, попарно сокращаются. Значит, среднее арифметическое равно $20/40 = 0{,}5$.

3. Здесь удобно сгруппировать числа в пары: 1 и 1000, затем 2 и 999 и так далее. Получится 500 пар, последняя будет 500 и 501. В каждой паре сумма составляет 1001 и среднее равно 500,5. Поэтому и среднее всех чисел равно 500,5.

4. Сначала среднее арифметическое трех чисел было равно 11, т.е. их сумма равнялась 33. Затем среднее четырех чисел было равно 14, т.е. их сумма равнялась 56. Значит, вошедшему было $56 - 33 = 23$ года.

5. Пусть, скажем, $a < b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Искомая координата x должна составлять пропорцию $(x - a) : (b - x) = 3 : 5$, откуда получаем уравнение $5(x - a) = 3(b - x)$, $5x - 5a = 3b - 3x$, $8x = 5a + 3b$, $x = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$.

6. Да, например, если этот школьник был самым низким в 7 А, но оказался самым высоким в 7 Б. Вообще, такое происходит, если школьник был ниже среднего в 7 А и выше среднего в 7 Б.

7. Такой способ годится, только если во всех классах поровну учеников. Пусть, скажем, в классе А учатся 25 школьников, а в классе Б учатся 29 школьников и средние арифметические в этих классах равны a и b. Тогда сумма всех годовых оценок в классе А равна $25a$, а в классе Б равна $29b$. Сумма всех оценок в двух классах равна $25a + 29b$, и это надо разделить на $25 + 29 = 54$. Поэтому средняя оценка всех семиклассников равна

$$\frac{25a + 29b}{54} = \frac{25}{54}a + \frac{29}{54}b,$$

а не полусумме a и b. Это число называют *взвешенным средним* чисел a и b.

8. Если 1/10 самых богатых жителей города имеют доход в 15 раз больше среднего, то их общий доход в полтора раза больше суммарного дохода всех жителей города, включая их самих.

9. Так как все строки содержат поровну элементов, то среднее арифметическое всех чисел таблицы равно $(a + b + c)/3$. По аналогичным причинам оно равно $(d + x)/2$, где x — неизвестное среднее арифметическое во втором столбце. Отсюда

$$x = \frac{2}{3}(a + b + c) - d.$$

10. Нет, поскольку тогда среднее всех чисел таблицы окажется положительным и отрицательным одновременно.

11. Если раскрыть скобки в произведении

$$(1 + 2 + \ldots + 8 + 9)(1 + 2 + \ldots + 8 + 9),$$

то получится как раз сумма всех чисел таблицы, поэтому она равна 45^2, а среднее равно $45^2/9^2 = 5^2 = 25$. Можно пытаться объяснить этот ответ по-простому: средний сомножитель (среднее арифметическое чисел от 1 до 9) равен 5, и потому среднее произведение равно 25. Но это опасная логика: так можно решить, что среднее чисел $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ равно 5^2, а это совсем не так.

12. Докажем, что $a_i \le i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Для этого рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Два крайних (b_1 и b_{100}) равны нулю, а каждое из остальных не больше полусуммы соседей. Надо доказать, что среди b_i нет положительных. Пусть это не так и пусть наибольшее из них b_i. Оно не может быть крайним, так как с краев нули, поэтому равно полусумме соседей. Соседи не могут быть больше b_i и, значит, равны b_i: рядом с наибольшим стоят тоже наибольшие. Двигаясь к краю, получаем противоречие.