Хорошо темперированный клавир

И.ГЕЛЬФАНД, А.ШЕНЬ

Все знают, что одну и ту же мелодию можно играть в разных тональностях. Но что означают слова «одну и ту же»? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с другого: что такое мелодия? Формально говоря, мелодия – это сыгранные друг за другом звуки разной высоты. А что такое высота звука?

С точки зрения физики, звук – это колебания воздуха. Высота звука определяется *частотой* колебаний, т.е. количеством колебаний в секунду. Камертон, колеблющийся 440 раз в секунду (физики говорят «440 герц»; название единицы частоты дано в честь немецкого физика Генриха Герца), дает ноту *ля* первой октавы.

На слух бóльшая частота соответствует более высоким нотам. Очень низкие и очень высокие звуки становятся уже неслышимыми. Считается, что человек может услышать звуки в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц (хотя на самом деле у разных людей эти границы могут быть разными; с возрастом диапазон слышимых частот уменьшается).

Звук низкой частоты, который мы не слышим, иногда называют «инфразвуком», высокой – «ультразвуком». С помощью ультразвуков разговаривают друг с другом дельфины.

Частота тока в электросети – 50 герц, т.е. 50 колебаний в секунду (это относится к Европе, в Америке – 60 герц). Если из-за неисправности сетевой фон проникает в звуковой тракт магнитофона, слышно низкое гудение.

Задача 1. Натягивая струну сильнее, мы изменяем частоту колебаний. Как вы думаете, увеличивается частота или уменьшается? Попробуйте сделать это с натянутой ниткой.

Задача 2. Зажимая струну (например, гитары) пальцем, мы как бы уменьшаем ее длину, почти не меняя натяжения. Как вы думаете, что происходит с высотой звука?

Задача 3. Пластинку на 33 оборота поставили на 45; как изменится частота всех записанных на ней звуков?

Задача 4. Где в рояле более низкие ноты – слева или справа? Как это связано с формой рояля?

Задача 5. Комар зудит почти как камертон. Сколько взмахов в секунду делают его крылья?

Задача 6. Как вы думаете, кто издает более высокий звук – комар или большая муха?

Глава из книги: И.Гельфанд, А.Шень. Алгебра. – М.: МЦНМО, 2009.

Оказывается, что на слух в первую очередь воспринимаются *отношения частот* соседних звуков мелодии, а не сами частоты. Лишь немногие люди с «абсолютным слухом» (далеко не у всех музыкантов он есть) могут отличить взятую на рояле ноту *ля* от ноты *соль*. Однако почти каждый человек после небольшой практики легко отличит интервал *ре*—*ля* (квинта, отношение частот *ре* : *ля* = 2 : 3) от *ре*—*соль* (кварта, отношение частот *ре* : *соль* = 3 : 4).

Задача 7. Найдите отношение частот соседних нот *соль* и *ля*, используя эти данные.

Теперь мы можем сказать, какие мелодии звучат одинаково (отличаясь лишь «тональностью») – это те, в которых одинаковы *отношения частот*.

Задача 8. Мелодия *ля*—*ми*—*ля* (нисходящая) состоит из трех нот с частотами 440, 330 и 220 герц. Какими будут частоты, если сыграть такую же (с теми же отношениями частот) мелодию, начиная с ноты *ми* (ее частота 330 герц)?

▷ Согласно сказанному, нужно, чтобы

$$440 : 330 : 220 = 330 : x : y.$$

Поскольку

$$440 : 330 : 220 = 4 : 3 : 2,$$

получаем $y = 330 \cdot (1/2) = 165$, $x = 330 \cdot (3/4) = 247{,}5$. Соответствующие ноты называются *ми*—*си*—*ми*. ◁

Посмотрев на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»: одни и те же комбинации белых и черных клавиш повторяются – как говорят, в «разных октавах». Отстоящие на период (на октаву) ноты называются одинаково и отличаются по частоте ровно в 2 раза. Таким образом, ноты ля в разных октавах имеют частоты

$$\ldots 55,\ 110,\ 220,\ 440,\ 880,\ 1760,\ \ldots$$

образующие геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Задача 9. Как много октав может быть у рояля, если все должны быть слышны? (Считайте, что слышны звуки в диапазоне от 20 до 20000 герц.)

Геометрическую прогрессию образуют не только ноты *ля*, но и другие одноименные ноты: ноты *соль* образуют еще одну геометрическую прогрессию (также со знаменателем 2), ноты *фа* – третью и так далее.

Задача 10. Глядя на клавиатуру рояля (рис.1), подсчитайте, сколько всего прогрессий получается (сколько нот в одной октаве).

Ответ. 12 (7 белых клавиш и 5 черных).

Рис. 1

Названия нот: черная клавиша между *до* и *ре* называется *до диез* или *ре бемоль*, между *ре* и *ми* – *ре диез* или *ми бемоль*, и так далее. (Тем самым *диез* обозначает повышение звука, а *бемоль* – понижение.) Музыканты используют значок $\sharp$ для *диеза* и $\flat$ для *бемоля*. Используя их, можно записать: $\text{до}\,\sharp = \text{ре}\,\flat$.

Задача 11. Что должен сделать пианист, чтобы сыграть мелодию с удвоенными частотами всех нот?

▷ Сдвинуть руку вправо на октаву и играть как обычно. ◁

Теперь сыграем на рояле *хроматическую гамму*, нажимая все клавиши (белые и черные) подряд слева направо:

$$\text{до} \to \text{до}\,\sharp = \text{ре}\,\flat \to \text{ре} \to \text{ре}\,\sharp = \text{ми}\,\flat \to \text{ми} \to \text{фа} \to$$
$$\to \text{фа}\,\sharp = \text{соль}\,\flat \to \text{соль} \to \text{соль}\,\sharp = \text{ля}\,\flat \to \text{ля} \to$$
$$\to \text{ля}\,\sharp = \text{си}\,\flat \to \text{си} \to \text{до} \to \ldots$$

Оказывается,

частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию.

Мы увидим, почему так получается, чуть позже.

Задача 12. Считая, что частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию, найдите знаменатель прогрессии.

▷ Обозначим частоту ноты *до* за c, а искомый знаменатель – за q. Тогда $\text{до}\,\sharp = \text{ре}\,\flat$ имеет частоту $c \cdot q$, *ре* имеет частоту $c \cdot q^2$ и так далее:

до	до ♯	ре	ре ♯	ми	фа	фа ♯
c	cq	cq^2	cq^3	cq^4	cq^5	cq^6

соль	соль ♯	ля	ля ♯	си	до
cq^7	cq^8	cq^9	cq^{10}	cq^{11}	cq^{12}

Нота *до* следующей октавы имеет вдвое большую частоту, так что $cq^{12} = 2c$. Отсюда $q^{12} = 2$, $q = \sqrt[12]{2}$ ◁

Музыканты называют интервал между соседними нотами *полутоном*. Октава состоит, таким образом, из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз.

Задача 13. Между нотами *до* и *ре* два полутона (или один тон, как говорят музыканты). Найдите отношение частот этих нот.

Решение. $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = \sqrt[6]{2}$.

Теперь объясним, почему хроматическая гамма дает геометрическую прогрессию. Это необходимо для того, чтобы любую мелодию можно было сыграть, начиная с любой ноты. Поясним это на примере простейшей мелодии из двух нот: *до* и *до диез*. Сыграем ее, начиная с *до диеза*: *до диез* – *ре*. Чтобы эти мелодии звучали одинаково, нужно, чтобы отношения частот были равны:

$$\frac{\text{ре}}{\text{до}\,\sharp} = \frac{\text{до}\,\sharp}{\text{до}}.$$

А это и есть определение геометрической прогрессии.

Задача 14. Для какой ноты x мелодии $\text{до} \to x$ и $x \to \text{до}$ (до следующей октавы, т.е. удвоенной частоты) будут звучать одинаково?

Такой интервал музыканты называют «тритоном». Он как бы делит октаву пополам, на два равных интервала.

Задача 15. Фуга до минор из первого тома «Хорошо темперированного клавира» Баха открывается такой темой (рис.2). Затем эта же тема (с одним изменением) проходит в другой тональности (рис.3). Найдите измененное место. Знаки $\sharp$ или $\flat$ перед нотой означают повышение и понижение на полтона. Обозначения нот указаны на рисунке 4. (Мы просим прощения у музыкантов за то, что записываем мелодию без трех бемолей в ключе, как это принято.)

Вероятно, внимательный читатель уже заметил несогласованность в наших объяснениях.

Задача 16. Зная, что хроматическая гамма есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, найдите отношение частот нот *ре* и *ля* (восходящая квинта).

▷ Между *ре* и *ля* семь полутонов, поэтому отношение частот равно $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$. С помощью калькулятора его легко найти: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1{,}498\ldots$ ◁

Это близко к отношению 3 : 2, которое мы называли раньше, но все же не точно совпадает с ним.

Задача 17. Найдите отношение частот в восходящей квинте *ре* – *соль* и сравните его с отношением 4 : 3, которое мы называли раньше.

▷ $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 1{,}3348\ldots$; $4/3 = 1{,}3333\ldots$ ◁

Рис. 2

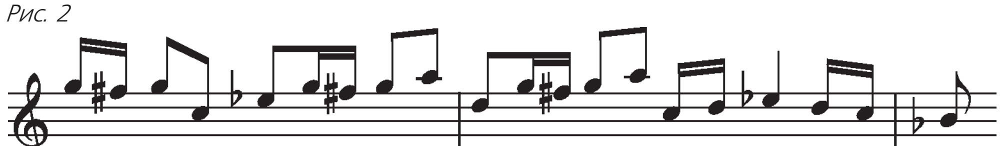

Рис. 3

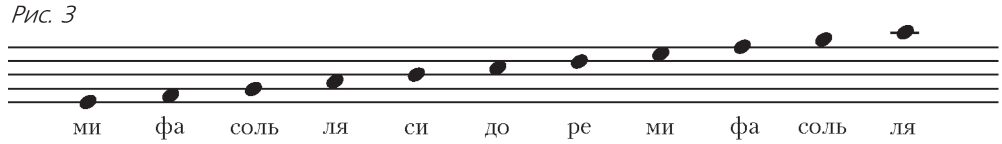

Рис. 4

Так что же такое квинта – отношение частот $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$ или 3 : 2?! В некотором смысле оба ответа правильны. Сейчас мы попробуем объяснить, что имеется в виду.

Если вы услышите одну ноту, а через минуту другую, то не почувствуете гармонии или дисгармонии. Но если сыграть ноты одну за другой или даже обе сразу, то станет слышно, хорошо ли они звучат вместе. Скрипач, настроив одну из струн по камертону (на практике обычно по роялю аккомпаниатора или гобою в оркестре), затем настраивает вторую так: ведя смычком по обеим струнам, он регулирует натяжение второй струны, пока они не будут хорошо («чисто») звучать вместе.

В каком случае две ноты образуют гармоничный интервал? Оказывается, это бывает, когда *их частоты относятся друг к другу как небольшие целые числа.* Почему так получается, мы говорить не будем – для этого нужно знать немного тригонометрии. Вместо этого перечислим некоторые интервалы и их названия (см. табл.1).

Таблица 1

Интервал	Название интервала	Интервал	Название интервала
2 : 1	октава	4 : 3	кварта
3: 2	квинта	5 : 4	большая терция

Задача 18. Вторая нота восходящей мелодии образует с первой октаву, а третья со второй – квинту. Как относятся друг к другу частоты третьей и первой нот?

Ответ. 3 : 1.

Задача 19. Тот же вопрос, если третья нота образует со второй большую терцию.

Такие «чистые» интервалы получаются при игре на скрипке или других инструментах, где можно непрерывно менять высоту звука. На рояле чистых интервалов не получается, поскольку все отношения частот являются степенями числа $q = \sqrt[12]{2}$ (см. табл.2).

Таблица 2

Название интервала	Чистый интервал	Интервал на рояле	
малая терция	6 : 5 = 1,2	1,1892...	q^3
большая терция	5 : 4 = 1,25	1,2599...	q^4
кварта	4 : 3 = 1,333...	1,3348...	q^5
квинта	3: 2 = 1,5	1,4983...	q^7
малая секста	8 : 5 = 1,6	1,5874...	q^8
большая секста	5 : 3 = 1,666...	1,6817...	q^9
октава	2 : 1 = 2	2	q^{12}

Конечно, можно попросить настройщика настраивать рояль иначе – так, чтобы некоторые интервалы были чистыми. Тогда другие интервалы станут еще более далекими от чистых и красивая мелодия, начатая с другой ноты, может звучать ужасно.

До XVIII столетия рояли (точнее, клавесины и органы – современный рояль появился позже) настраивали, стараясь сделать некоторые интервалы чистыми. При этом одни тональности звучали красиво, а другие (как правило, с большим числом черных клавиш) – ужасно, и композиторы старались их избегать, считая, что все равно нормальный органист в них играть не сможет.

Традиция делить тональности на «хорошие» и «плохие» и писать музыку только в хороших была поколеблена великим Бахом, который написал «Хорошо темперированный клавир» – сборник прелюдий и фуг. Он состоит из двух частей. В каждой части – 24 прелюдии и фуги, по одной в каждой мажорной и минорной тональности. Неизвестно, как в точности Бах настраивал свой клавесин – была ли это равномерная темперация, когда хроматическая гамма образует геометрическую прогрессию, или какая-то не вполне равномерная. Но современные исполнители играют его на равномерно темперированных роялях, на которых все интервалы (за исключением октавы) звучат не совсем чисто – но зато одинаково во всех тональностях.

Задача 20. Достаньте запись «Хорошо темперированного клавира» и послушайте.

В заключение обсудим вот какой вопрос: а почему, собственно, в октаве именно 12 нот (полутонов)? Что мешает изготовить рояль с 13 или 7 клавишами в каждой октаве? В этом случае отношение частот соседних нот было бы $\sqrt[13]{2}$ или $\sqrt[7]{2}$. Оказывается, что тогда основные интервалы (3 : 2, 4 : 3 и так далее) будут значительно менее чистыми.

Задача 21. Найдите отношения частот, если в октаве 7 (равноотстоящих) нот. Есть ли среди отношений сколько-нибудь близкие к 3/2 или 4/3? Сравните с приведенной выше таблицей для 12 нот.

Если вы проделаете аналогичные вычисления для других чисел нот в октаве, то убедитесь, что 12 является исключительно удачным выбором – при других (не слишком больших) числах приближения заметно хуже.

Замечательно, что музыканты использовали 12-тоновую систему, ничего не зная о геометрических прогрессиях и не делая никаких вычислений – подобно тому, как пчелы делали аккуратные шестигранные соты задолго до того, как люди установили, что именно такая форма оптимальна.