Об одной планиметрической задаче и ее пространственном решении

А.ШЕНЬ

Формулировка

Три окружности попарно пересекаются. Для каждой пары пересекающихся окружностей провели их общую хорду (рис.1). Докажите, что три таких хорды проходят через одну точку.

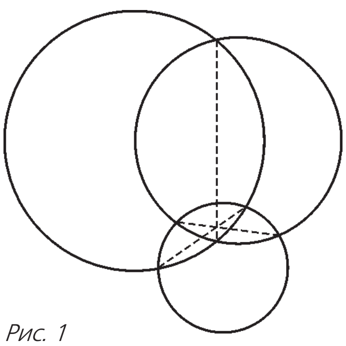

Рис. 1

Эту задачу вполне можно решить, оставаясь в рамках планиметрии (и мы приведем такое решение). Но у нее есть красивое (хотя и не вполне строгое) решение, использующего выход в пространство.

Полусфера на плоскости

Начнем издалека.

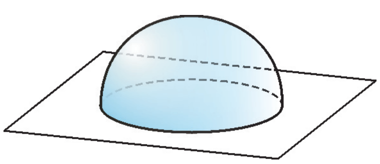

Рис. 2

Разрежем сферу плоскостью, проходящей через ее центр («по экватору»). Получатся две полусферы. Положим одну из них («северное полушарие») на плоскость (рис.2).

Как знают физики, именно такой вид (полусфера) имеет мыльный пузырь на поверхности воды (рис.3).

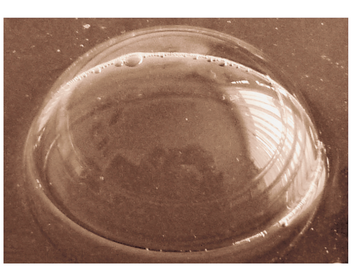

Рис. 3

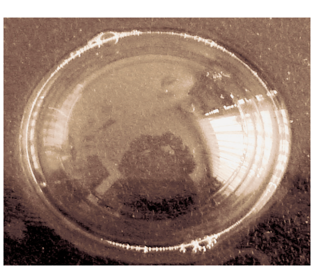

Рис. 4

Если посмотреть на него сверху, то будет видна просто окружность (рис.4).

Две полусферы

Теперь положим на плоскость две полусферы так, чтобы они пересекались (рис.5). Две сферы пересекаются по окружности. Эта окружность лежит в вертикальной плоскости. (В самом деле, она перпендикулярна прямой, соединяющей центры сфер, а в нашем случае центры сфер лежат на плоскости.)

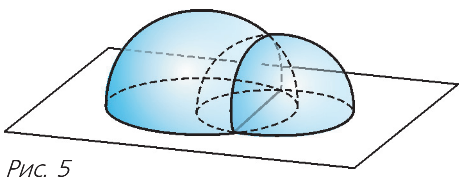

Рис. 5

И снова это хорошо видно на мыльных пузырях (рис.6).

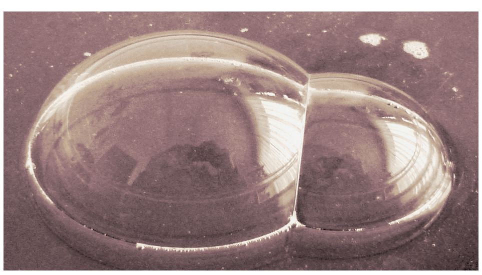

Рис. 6

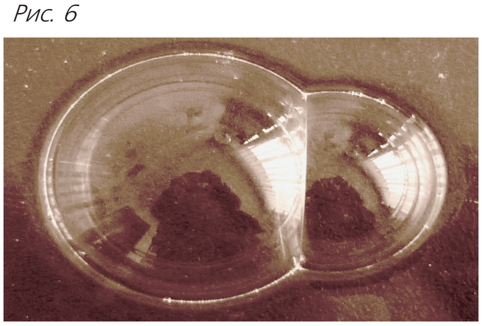

Рис. 7

Посмотрим на это сверху (рис.7): тогда от каждой полусферы мы увидим окружность (точнее, ее часть, лежащую вне другой). Окружность, по которой пересекаются полусферы, превратится в прямую (ведь она лежит в вертикальной плоскости).

Возвращаясь к геометрии, мы видим на этом рисунке две окружности и общую хорду (рис.8).

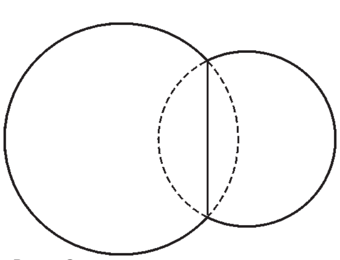

Рис. 8

Решение задачи

Наверно, вы уже поняли, к чему идет дело и как решить нашу задачу с помощью выхода в пространство. Будем считать плоскость горизонтальной, а окружности на ней – изображениями сфер. Тогда линии пересечения сфер (три окружности в вертикальных плоскостях) будут изображены отрезками (общими хордами). Точка пересечения всех трех сфер попадет на эти три отрезка – значит, они проходят через общую точку, что и требовалось доказать.

В качестве иллюстрации к этому решению можно сфотографировать три примыкающих друг к другу пузыря (рис.9).

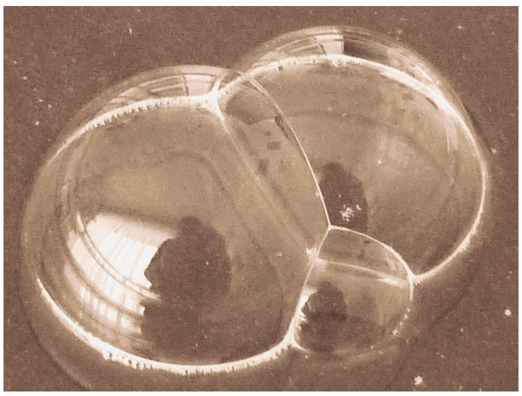

Рис. 9

Вид сверху представляет собой три окружности и три общие хорды, пересекающиеся в одной точке (рис.10).

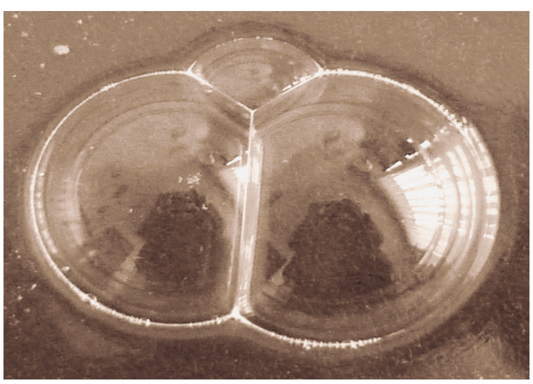

Рис. 10

Точнее говоря, тут видны лишь части эти окружностей и хорд, находящиеся вне других пузырей (внутри пузыри устроены иначе)

Полусфера как график

Это решение можно переделать в двумерное, если рассматривать полусферу как график функции двух переменных. Объясним, что это значит.

Представьте себе, что вы живете внутри полусферы – и ее купол для вас служит потолком. Высота этого потолка в разных точках круглой комнаты разная. Самая большая высота – в центре комнаты (она равна радиусу полусферы). К краю комнаты она уменьшается до нуля (потолок становится стеной).

Как найти высоту потолка над некоторой точкой M? Оказывается, что можно обойтись без лазерного дальномера или лестницы (рис.11). Достаточно провести через точку M прямую на полу, измерить расстояния a и b до стены в обоих направлениях, и найти высоту по формуле $h = \sqrt{ab}$ (она равна, как говорят, среднему геометрическому расстояний a и b).

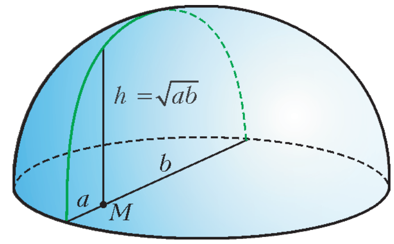

Рис. 11

В самом деле, в вертикальном сечении, проходящем через отрезки a и b, мы получаем прямоугольный треугольник, опирающийся на диаметр окружности сечения (рис.12). В нем высота h равна среднему геометрическому отрезков a и b, на которые она делит гипотенузу, поскольку прямоугольные треугольники AMH и ABH подобны:

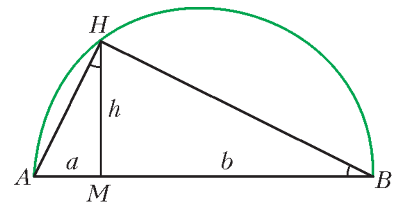

Рис. 12

$$a : h = h : b$$

Степень точки

Заметим, что прямую на полу можно проводить поразному, и отрезки a и b будут разными, но высота должна быть одинаковой, так что произведение ab не зависит от выбора прямой. Раньше эта теорема входила в школьный курс геометрии (теорема об отрезках пересекающихся хорд). Ее можно доказать безо всяких сфер, из подобия треугольников AMA' и BMB' (рис.13):

$$a : a' = b' : b$$

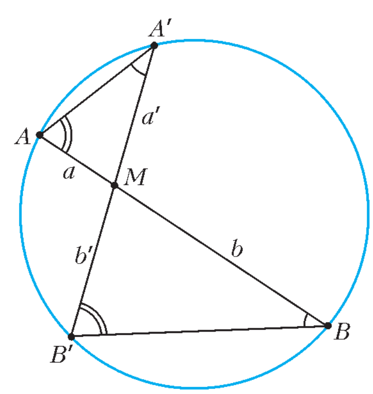

Рис. 13

Произведение отрезков хорды называют *степенью* точки относительно окружности; так, степень точки M равна произведению ab (а также произведению $a'b'$). Таким образом, мы видели, что высота полусферы над точкой равна квадратному корню из степени этой точки.

Вернемся к двум полусферам, опирающимся на две окружности. Представим себе, что мы стоим под линией пересечения этих полусфер (т.е. на общей хорде окружностей). Тогда обе полусферы находятся на одной высоте. Следовательно, *если точка лежит на общей хорде двух окружностей, то ее степени относительно обеих окружностей одинаковы*.

Это, впрочем, ясно безо всяких сфер: если точка лежит на хорде, то ее степень (относительно любой из

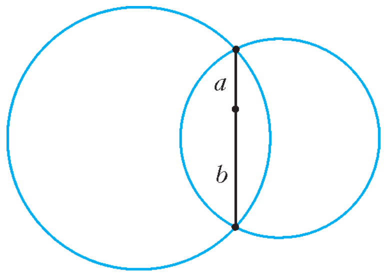

Рис. 14

окружностей) равна произведению отрезков хорды (рис.14).

А если точка лежит сбоку от хорды, то один из отрезков будет общим, а другие будут разными, так что степени тоже будут разными (рис.15).

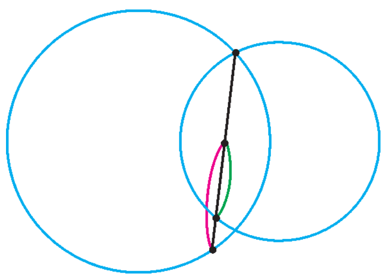
Рис. 15

Планиметрическое решение

Вернемся к исходной задаче и рассмотрим три пересекающихся окружности (1, 2 и 3 на рисунке 16).

Проведем две общие хорды: одну – для окружностей 1 и 3 и вторую – для окружностей 2 и 3. Точки на первой хорде имеют, как мы видели одинаковую степень относительно окружностей 1 и 3, а точки на второй хорде имеют одинаковую степень относительно окружностей 2 и 3. Значит, общая точка этих двух хорд имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей. Поэтому она также лежит на общей хорде окружностей 1 и 2. Что и требовалось доказать.

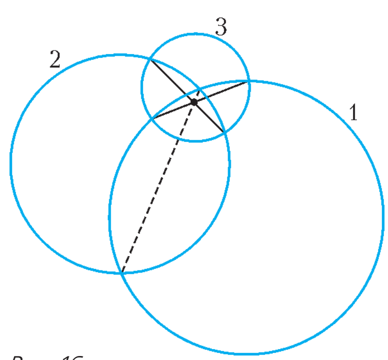

Рис. 16

Это решение можно пересказать так, чтобы оно стало совсем «школьным» и не использовало понятие степени (рис.17).« Проведем две общие хорды AB (окружности 2 и 3) и CD (окружности 1 и 3). Пусть O – их точка пересечения. Проведем прямую через точку O и одну из двух точек пересечения окружностей 1 и 2 (скажем, верхнюю на рисунке) – точку E.

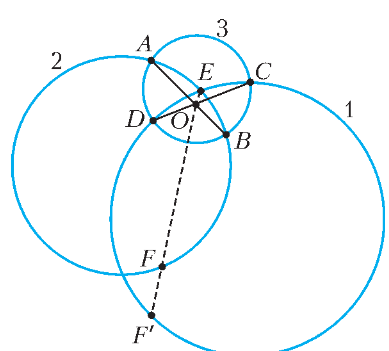

Рис. 17

Если утверждение задачи неверно, то эта прямая пересечет окружности 2 и 1 в различных точках. Назовем их F и F'. Теперь заметим, что

$$EO \cdot OF = AO \cdot OB$$

по теореме об отрезках двух секущих (в окружности 2).

По той же теореме, но уже для окружности 3, равенство можно продолжить:

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD ,$$

и дальше (окружность 1)

$$CO \cdot OD = EO \cdot OF' .$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем

$$EO \cdot OF = EO \cdot OF' ,$$

т.е. F и F' – одна и та же точка, что и требовалось доказать.

Вопросы и задачи

1. Обратите внимание, как расположена пленка, разделяющая мыльные пузыри. В какую сторону она изогнута? В каком из пузырей давление больше? (На наших фотографиях эта пленка видна плохо, так что стоит посмотреть настоящие пузыри.)

2. Чему равна степень точки, находящейся на расстоянии d от центра окружности радиуса r, относительно этой окружности?

3. Мы определили степень для точек внутри окружности. Дайте геометрическое определение для точек вне окружности, чтобы формула задачи 2 оставалась верной.

4. Рассмотрим две окружности (пересекающиеся или нет). Найдите геометрическое место точек, которые имеют одинаковую степень (в смысле предыдущей задачи) относительно этих двух окружностей.

(*Ответ*: это прямая; она называется *радикальной осью* пары окружностей.)

5. Найдите радикальную ось для пары касающихся окружностей.

6. Имеются три попарно касающиеся окружности. Через каждую из точек касания проведена общая касательная к соответствующей паре. Докажите, что три эти прямые проходят через одну точку.

7. Во всех наших рассуждениях мы неявно предполагали, что окружности не только попарно пересекаются, но и все три перекрываются (если точка, лежащая внутри всех трех). Покажите, что хотя наши рассуждения уже не проходят, есть такой точки нет, но все равно три общие хорды (точнее, их продолжения) пересекаются.