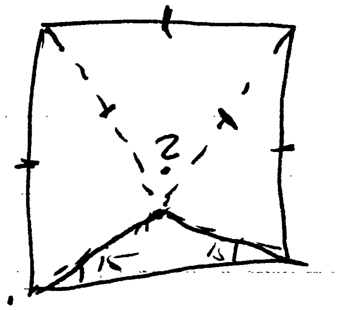
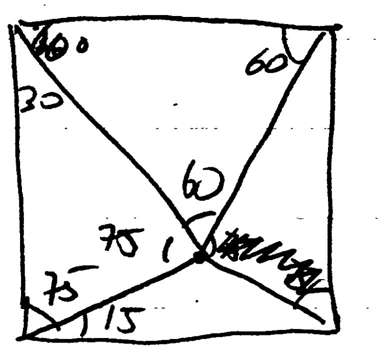
Задом наперёд, совсем наоборот

А. Шень

Построим на стороне квадрата равнобедренный треугольник с углами при основании в 15°, как показано на рисунке. Под каким углом из его вершины видна противоположная сторона?



Эту задачу решить не так просто, если не знать ответ заранее. Оказывается, что искомый угол равен 60°, и установить это совсем просто, если идти с конца.

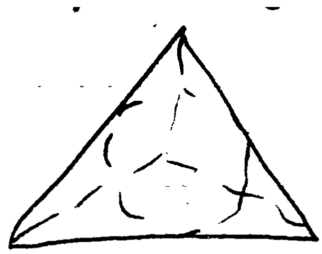


Построим на верхней стороне квадрата равносторонний треугольник (все углы 60°). Его стороны равны сторонам квадрата, так что с боков от него образуются равносторонние треугольники. Угол при вершине в этих треугольниках равен $90° - 60° = 30°$, а углы при основании равны $(180° - 30°)/2 = 75°$, поэтому в нижнем треугольнике углы при основании будут по 15°. По стороне и двум углам заключаем, что это тот самый треугольник, с которого мы начинали. Задача решена.

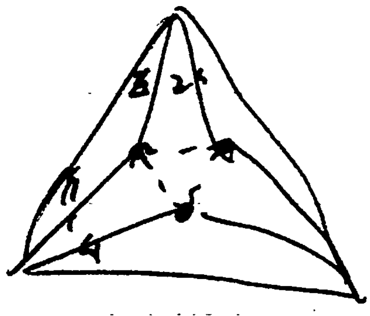
Похожий трюк использовал знаменитый американский математик Джон Конвей[1] в своём доказательстве *теоремы Морли о трисектрисах*[2]. Все знают, что если поделить углы треугольника пополам, проведя биссектрисы, то эти биссектрисы пересекутся в одной точке (центр вписанной окружности).

[1]Любители занимательной математики знают его по игре «Жизнь», но это далеко не единственное и далеко не самое главное его достижение.

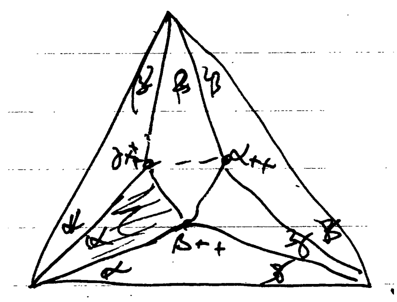
[2]John Conway, On Morley's Trisector Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Fall 2014, p. 3. Похожие доказательства были известны и раньше, но у Конвея получилось совсем простое рассуждение.



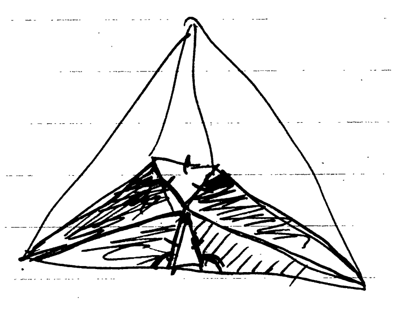
А что будет, если поделить каждый угол на три равные части, проведя *трисектрисы*? Оказывается, что точки пересечения трисектрис, примыкающих к каждой из стороны, образуют равносторонний треугольник (пунктирные линии на рисунке равны). Это утверждение и называется теоремой Морли.



Давайте временно поверим Морли и, считая внутренний треугольник равносторонним, найдём углы всех остальных треугольников. Обозначим третьи части углов треугольника за α, β и γ. Тогда $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ (сумма углов треугольника), так что $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Это уже позволяет найти (выразить через α, β, γ) некоторые углы: третий угол в треугольнике с углами α и γ равен $180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) + \beta = 120^\circ + \beta$. Мы обозначим его β^{++} (считая каждый плюсик прибавлением 60°). Аналогично определяются углы γ^{++} и α^{++}.

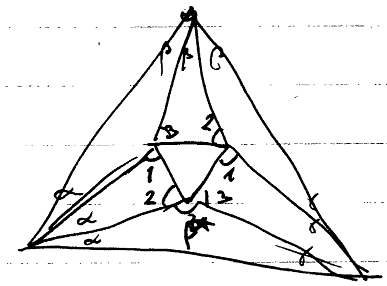


Чтобы определить другие углы, надо вспомнить, что мы провели трисектрисы. Давайте отразим серые треугольники симметрично относительно трисектрис, как показано на рисунке.



Поскольку это трисектрисы, то после отражения стороны этих треугольников пойдёт по нижнему основанию большого треугольника. Мы предположили, что теорема Морли верна и внутренний треугольник равносторонний. Поэтому отмеченные отрезки равны все равны, и треугольник между отражениями будет равнобедренным. Углы при его основании равны, и смежные с ними углы тоже равны. Получаем четыре равных угла.

То же самое можно сделать и у других сторон. Получим три пары равных углов, обозначенные на рисунке как $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Теперь можно составить уравнения:

$$\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 + \alpha = 180^\circ \\ \angle 2 + \angle 3 + \beta = 180^\circ \\ \angle 1 + \angle 3 + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

Сложим все три:

$$2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ,$$

так что

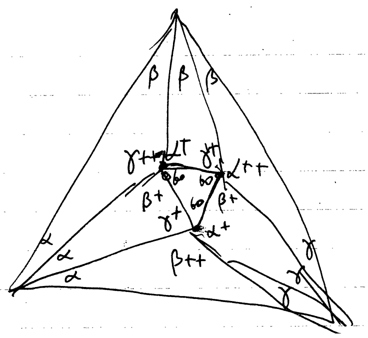
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = (540^\circ - 60^\circ)/2 = 240^\circ.$$

Вычитая каждое из уравнений, получаем

$$\angle 3 = \alpha + 60^\circ;$$
$$\angle 1 = \beta + 60^\circ;$$
$$\angle 2 = \gamma + 60^\circ$$

(в наших обозначениях α^+, β^+, γ^+).

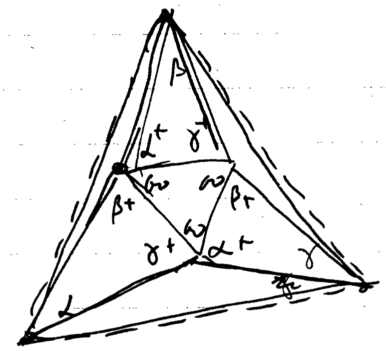
Итак, поверив в теорему Морли, мы нашли все углы.



Можно проверить, что все суммы углов при внутренних вершинах правильны. Скажем,

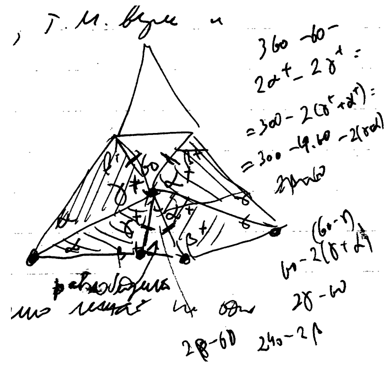
$$\alpha^{++} + \beta^{++} + \gamma^{++} + 60^\circ = (\alpha + \beta + \gamma) + 5 \cdot 60^\circ = 6 \cdot 60^\circ = 360^\circ.$$

Но что это нам даёт? Мы ведь хотим *доказать* теорему Морли, а не *воспользоваться* ей для отыскания углов, о которых нас и не спрашивают!



А вот что. Забудем про исходный треугольник и вырежем из бумаги равносторонний треугольник. Сторону его можно взять произвольной; обозначим её за a. Затем вырежем ещё три треугольника, у которых одна из сторон равна a, а углы такие, как на предыдущем рисунке, и окружим ими равносторонний треугольник в соответствии с нашей схемой. Если мы докажем, что в возникающем пунктирном треугольник нарисованные линии будут трисектрисами, то отсюда будет следовать теорема Морли: мы построили треугольник с углами 3α, 3β и 3γ, подобный исходному, и для которого теорема Морли верна. Поскольку углы сохраняются при подобии, она будет верна и для исходного треугольника.

Итак, осталось доказать, что действительно возникают трисектрисы. Для этого снова отразим симметрично наши треугольники относительно будущих трисектрис, и докажем, что четыре жирные точки на рисунке действительно лежат на одной прямой.



Это легко сделать подсчётом углов: четыре отмеченных отрезка равны, нижний белый треугольник равнобедренный, угол при вершине равен

$$360^\circ - 60^\circ - 2\alpha^+ - 2\gamma^+ = 360^\circ - 60^\circ - 240^\circ - 2(\alpha+\gamma) = 60^\circ - 2(\alpha+\gamma) = 60^\circ - 2(60^\circ - \beta) = 2\beta - 60^\circ,$$

а углы при основании

$$(180^\circ - (2\beta - 60^\circ))/2 = 120^\circ - \beta.$$

Вместе с углами рядом $(\beta+)$ они дают $(60^\circ + \beta) + (120^\circ - \beta) = 180^\circ$, то есть четыре точки действительно лежат на одной прямой.

На этом доказательство теоремы Морли по Конвею завершается.