1. Чётные числа

Целые числа: $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$. Они бывают чётными и нечётными. Число n *чётное*, если оно равно $2m$ для некоторого целого m. Остальные числа называют *нечётными*.

• Можно сказать так: в мешке чётное число n яблок, если их можно поделить поровну (для педантов: не разрезая яблок; величина яблока не учитывается, важно только их количество) между двумя людьми. Или так: если можно разложить яблоки парами. Эти два способа соответствуют умножению m на 2 (две группы по m яблок) или 2 на m (m групп по два яблока). Ещё можно сказать так: n чётно, если $n/2$ целое — но для этого нужно уметь обращаться с дробями (и делить n на 2, даже если нацело не делится).

1.1 Будет ли число 123 чётным? Будет ли число 124 чётным?

▷ Поделим: $123/2 = 61\frac{1}{2}$, нацело не делится, 123 нечётно. А $124/2 = 62$, делится, значит, чётно. ◁

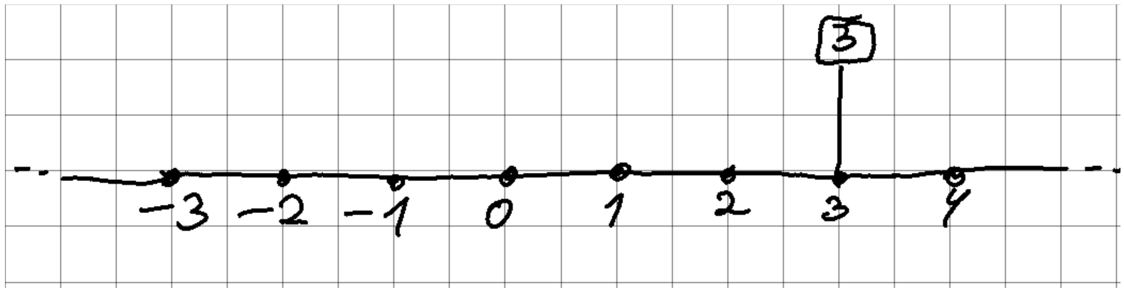
1.2 Будет ли нуль чётным числом, согласно нашему определению?

▷ Да, конечно: ведь $0 = 2 \cdot 0$, то есть $0 = 2k$ при $k = 0$, а число $k = 0$ целое. ◁

1.3 Сколько чётных среди двузначных чисел (от 10 до 99)? Кстати — а сколько всего двузначных чисел? Сколько чётных среди трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

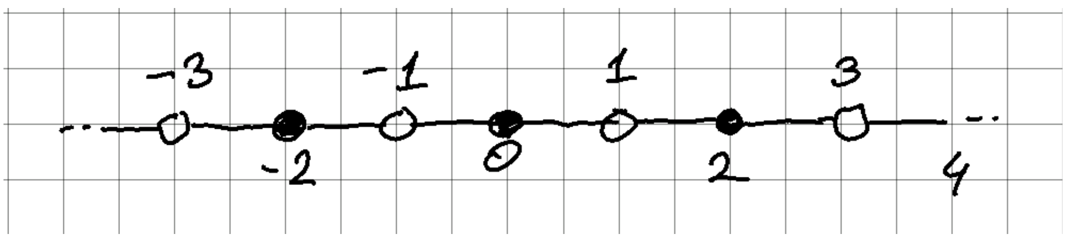
▷ Всего двузначных чисел 90. (Почему? Чисел от 1 до 99 будет, естественно, 99, из них нужно вычесть девять чисел от 1 до 9, которые не двузначные.) Чётные и нечётные числа чередуются и идут парами $10, 11$ (одно чётное, другое нечётное), $12, 13$ и так далее. Последняя пара $98, 99$. Значит, чётных и нечётных поровну (столько же, сколько пар), то есть $90/2 = 45$. Для трёхзначных аналогичное рассуждение даёт ответ 450. ◁

Целые числа удобно изображать на числовой оси — можно представлять себе прямую дорогу с километровыми столбами. Отрицательные числа отмеряют в другую сторону



1.4 Отметьте чётные и нечётные числа на этом рисунке.

▷Они идут через одно (чередуются): между соседними чётными числами две единицы длины, и между соседними нечётными тоже.



◁

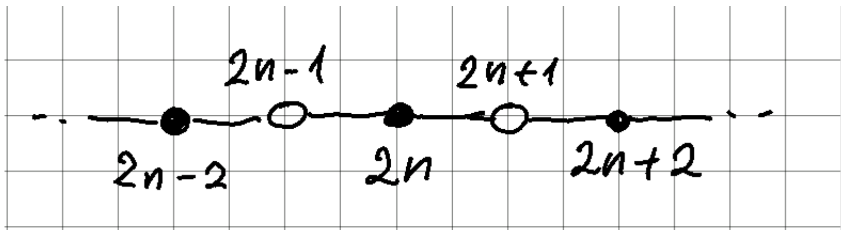
1.5 Будем выписывать положительные чётные числа в порядке возрастания: первое равно 2, второе 4, третье 6 и так далее. Чему равно 1000-е чётное число? Чему равно n-е (читается: «энное») чётное число?

▷ Если мы считаем первым число 2, то каждое число будет вдвое больше своего номера (число увеличивается на 2, когда номер увеличивается на 1), так что тысячное число равно 2000, а n-е число равно $2n$. ◁

1.6 Те же вопросы для положительных *нечётных* чисел: первое равно 1, второе 3, третье 5 и так далее.

▷ По сравнению с чётными числами из предыдущей задачи эти (при том же номере) на единицу меньше, так что будет 1999 и $2n-1$. ◁

Из картинки видно, что чётные и нечётные числа чередуются. Значит, число $2n+1$, соседнее с чётным числом $2n$, будет нечётно. Наоборот, любое нечётное число можно записать как $2n+1$, потому что его сосед слева чётный и его можно записать как $2n$. Получаем общую формулу: $2n$ для чётных чисел и $2n+1$ для нечётных чисел.



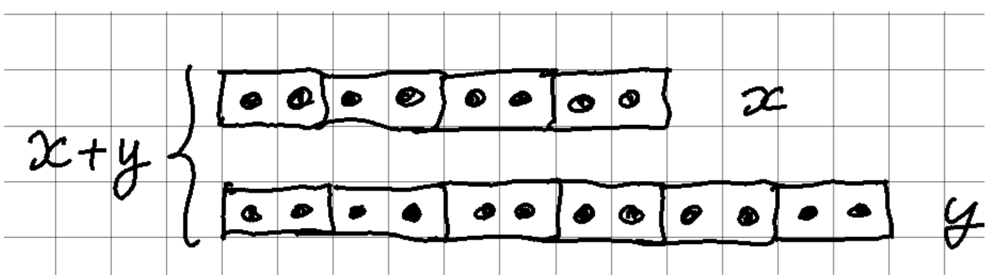
• На самом деле в этом рассуждении, если его проводить более строго, скрыто деление с остатком. Мы к этому ещё вернёмся.

1.7 Маша предлагает другую общую формулу для нечётных чисел: $2n-1$? Права ли она?

▷ Да, конечно — только нумерация отличается на единицу (мы с этой формулой уже сталкивались). ◁

1.8 Всегда ли будет чётной сумма двух чётных чисел?

▷ Если в двух мешках по чётному числу камней, то можно разложить парами все камни из первого мешка, и отдельно все камни из второго мешка. Теперь можно объединить мешки — и все камни тоже разложены парами. Значит, их чётное число.



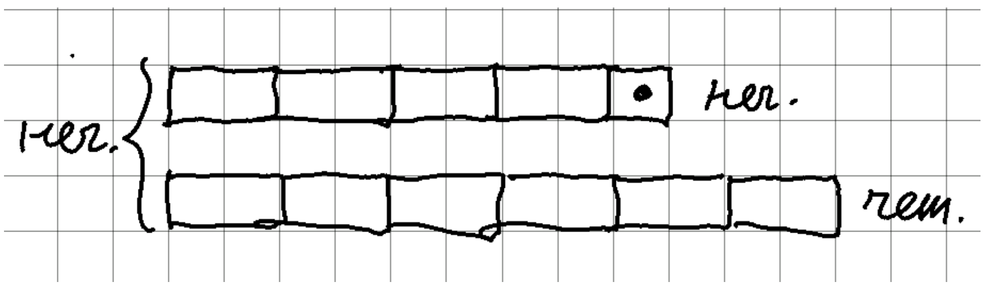
Запишем это более аккуратно. Пусть x, y — чётные числа. Докажем, что число $x + y$ чётно. (Это то, что мы хотим доказать. Теперь доказательство:) По определению чётного числа $x = 2m$, где m — целое число. Аналогично $y = 2n$ с целым n. Тогда $x + y = 2m + 2n = 2(m + n)$. Число $m + n$ целое, поэтому и $x + y$ чётно по определению. Что и требовалось доказать. ◁

$\boxed{\textbf{1.9}}$ Докажите, что разность двух чётных чисел чётна.

▷ Достаточно заметить, что $2m - 2n = 2(m - n)$. ◁

$\boxed{\textbf{1.10}}$ Будет ли чётной сумма чётного и нечётного числа? сумма двух нечётных чисел?

▷ Тут удобно воспользоваться общей формулой. Если сложить чётное число $2m$ и нечётное число $2n + 1$, то получится число $2m + 2n + 1 = 2(m + n) + 1$, то есть $2k + 1$ при $k = m + n$, то есть нечётное число.



Для суммы двух нечётных: $(2m+1)+(2n+1) = 2m+2n+2 = 2(m+n+1)$, то есть чётное число.

◁

Можно свести доказанное в таблицу сложения для чётности и нечётности:

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

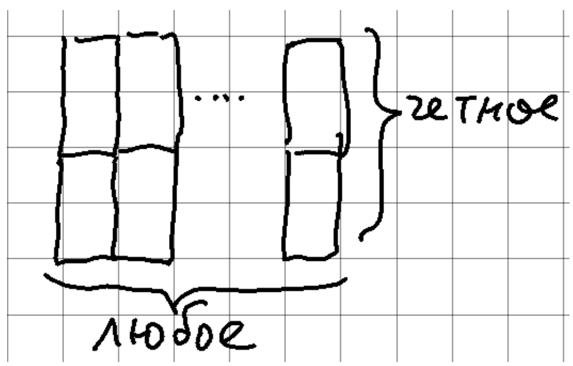
(чётности слагаемых записаны в первой строке и первой колонке, по таблице читаем чётность суммы).

1.11* Аня и Беня играют в такую игру: сначала Аня называет целое число по своему усмотрению (и Беня его слышит), потом Беня. Затем оба числа складывают. Если сумма чётна, выигрывает Аня, если нечётна — Беня. Кому выгоднее эта игра?

▷ Беня может гарантированно выиграть, если назовёт число не той чётности, что назвала Аня (сумма чисел разной чётности нечётна, см. таблицу). ◁

1.12 Составить таблицу умножения для чётности и нечётности. (Другими словами, надо определить, будет ли чётным произведение (а) двух чётных чисел, (б) чётного и нечётного и (в) двух нечётных.)

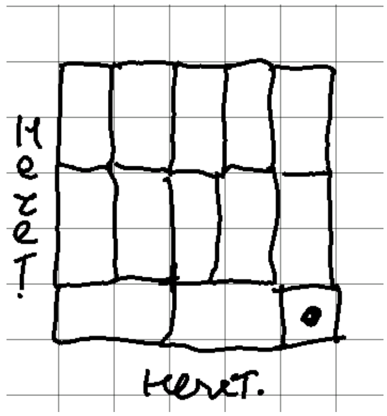
▷ Мы можем сразу заполнить три клеточки, если докажем, что произведение чётного числа на любое целое число чётно. Почему это так? Если мы умножаем чётное число $2k$ на любое число l, то получаем $2k \cdot l = 2(k \cdot l)$, а число $k \cdot l$ целое (произведение двух целых чисел).



Теперь докажем, что произведение двух нечётных чисел нечётно. Здесь тоже полезно воспользоваться общей формулой для нечётных чисел:

$$(2k+1)(2l+1) = 2k \cdot 2l + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1,$$

число $2kl + k + l$ целое, поэтому произведение нечётно.



Можно сказать иначе: произведение двух нечётных чисел — это значит, что мы берём одно нечётное число в качестве слагаемого нечётное число раз. А сумма нечётного числа слагаемых нечётна, потому что (это мы только что видели в таблице сложения) добавление нечётного числа меняет чётность. ◁

×	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

1.13* Аня и Беня играют в такую игру: сначала Аня называет целое число по своему усмотрению (и Беня его слышит), потом Беня. Затем оба числа перемножают. Если произведение чётно, выигрывает Аня, если нечётно — Беня. Кому выгоднее эта игра?

▷ Аня может гарантировать выигрыш, если назовёт чётное число: что бы ни назвал потом Беня, всё равно произведение будет чётно. ◁

1.14* Учитель усадил по кругу вокруг стола 25 учеников своего класса (девочек и мальчиков), причём — говорит он — так, что никакие два мальчика не сидят рядом, и никакие две девочки не сидят рядом. Почему он ошибается?

▷ Потому что из условия следует, что мальчиков и девочек поровну, а число 25 нечётно. Как объяснить, почему мальчиков и девочек поровну? Пусть каждый мальчик повернётся вправо и посмотрит на сидящую справа от него девочку (а там именно девочка, потому что мальчики не сидят рядом, по словам учителя). А каждая девочка повернётся влево и посмотрит на сидящего слева от неё мальчика (а там должен быть именно мальчик). Тогда все сидящие разобьются на пары смотрящих друг на друга, и, значит, мальчиков и девочек должно быть поровну.

Можно ещё сказать так: если девочки вершины многоугольника, то на каждой стороне (между соседними девочками) по условию один мальчик. А в многоугольнике столько же сторон, сколько вершин. ◁

$\boxed{\mathbf{1.15}^*}$ По кругу написано 20 плюсов и 20 минусов в каком-то порядке. Подсчитаем число пар соседних плюсов (места, где плюсы стоят рядом). Аналогично подсчитаем число пар соседних минусов. Почему получится одно и то же число?

▷ Поставим между любыми двумя плюсами незримый минус, а между любыми двумя минусами — незримый плюс. (Между плюсом и минусом ничего не ставим.) Тогда число пар плюсов — это число незримых минусов, а число пар минусов — число незримых плюсов. Почему их поровну? потому что если считать все, и зримые и незримые, то плюсы и минусы чередуются, и их поровну. И зримых поровну, по 20. Значит, и незримых поровну. ◁

$\boxed{\mathbf{1.16}^*}$ *Точным квадратом* называют квадрат целого числа (0, 1, 4, 9, 16,...). Может ли точный квадрат быть чётным, но не делиться нацело на 4?

▷ Не может: точные квадраты бывают у чётных и нечётных чисел. У нечётного числа он нечётный (по таблице), а у чётного числа $2k$ точный квадрат равен $4k^2$ и делится на 4, так что ни те, ни другие не подходят. ◁

$\boxed{\mathbf{1.17}^*}$ Докажите, что точный квадрат не может быть вдвое больше другого точного квадрата, кроме того случая, когда они оба равны нулю.

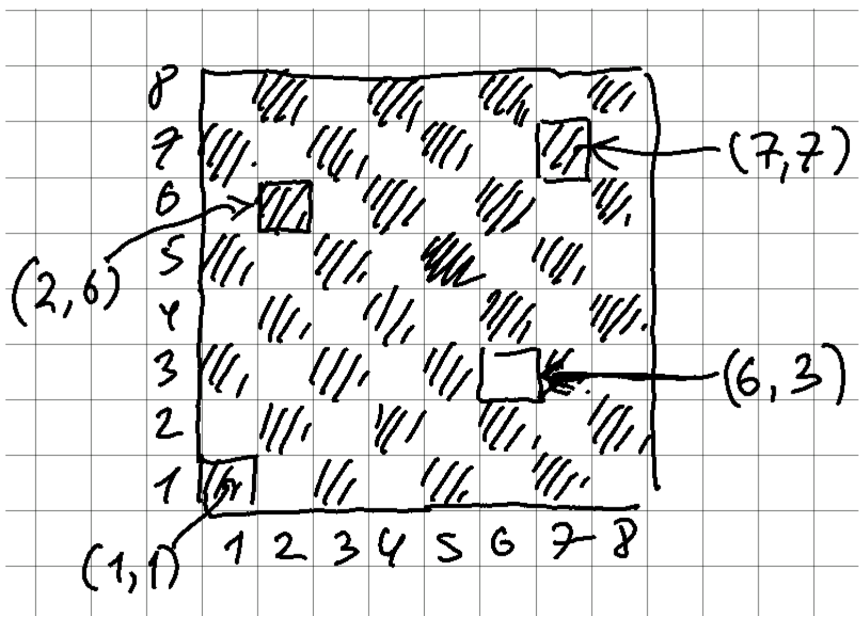
• Это формулируют так: уравнение $x^2 = 2y^2$ имеет единственное решение в целых числах: $x = 0, y = 0$. Отсюда следует, что никакая дробь x/y с целыми числителем и знаменателем не равна в квадрате 2. Как говорят, $\sqrt{2}$ — иррациональное число (не представляется в виде дроби с целым числителем и знаменателем)

▷ Пусть это не так, и есть ненулевое число n, которое одновременно и точный квадрат, и удвоенный точный квадрат: $n = x^2 = 2y^2$ при целых x и y. Тогда n положительно (квадраты отрицательными не бывают). Найдём (идя от нуля и пробуя по очереди все значения n) наименьшее такое число.

Теперь получается ерунда: n чётно (потому что $2y^2$), так что x^2 чётно, поэтому и x чётно (квадрат нечётного числа нечётный), $x = 2k$, тогда $n = x^2 = 4k^2 = 2y^2$, то есть вдвое меньшее число $n/2$ тоже равно и y^2, и $2k^2$.

Можно сказать и иначе: пусть есть дробь с целыми числителем и знаменателем, в квадрате равная 2, то есть $(x/y)^2 = 2$. Сократим эту дробь, пока можно — получим несократимую дробь x/y с тем же свойством $x^2 = 2y^2$. Теперь все четыре варианта чётности и нечётности x и y ведут к противоречию: если x нечётно, то квадрат его нечётный (а справа чётное). Если x чётно и y нечётно, то слева делится на 4, а справа не делится (после деления на 2 получается нечётное y^2), если оба чётны, то дробь сократима. $\lhd$

$\boxed{\textbf{1.18}}$ Клетки шахматной доски обычно обозначают буквами и числами: a1 — левый нижний угол, a8 — левый верхний, h1 — правый нижний и так далее. Будем вертикали тоже нумеровать (вместо букв): тогда левый нижний угол будет $(1, 1)$, левый верхний $(1, 8)$, правый нижний $(8, 1)$ и так далее. Закончите предложение: «клетка (i, j) раскрашена в белый цвет, если...». (По шахматным правилам левая нижняя клетка чёрная.)



$\rhd$ Клетка (i, j) раскрашена в белый цвет, если (и только если, добавили бы педанты) $i + j$ нечётно. В самом деле, при увеличении i или j на единицу число $i + j$ меняет чётность, а клетка меняет цвет. Нижний левый угол $(1, 1)$ чёрный, и сумма чётна. $\lhd$

$\boxed{\textbf{1.19}}$ Будет ли сумма $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ чётной или нечётной? (Ответ можно дать, не вычисляя, чему равна эта сумма.)

▷ Всего у нас 100 чисел, мы их разбиваем на 50 пар (1 и 2, 3 и 4, ..., 99 и 100), в каждой по одному нечётному слагаемому, значит, сумма каждой пары нечётна, всего пар 50, то есть мы складываем 50 нечётных чисел. Их тоже можно сгруппировать в 25 пар, в каждой сумма чётна, и в сумме будет чётное число. ◁

1.20* Может ли прямая пересекать все стороны невыпуклого 13-угольника, не проходя через его вершины?

• Тут надо бы объяснить, что такое невыпуклый 13-угольник — но в задаче можно считать, что есть просто 13 различных точек (вершин) $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$, и мы проводим 13 отрезков (сторон) A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{12}A_{13}$, $A_{13}A_1$.

▷ Прямая, о которой идёт речь, разрезает плоскость на две части. Если сторона многоугольника её пересекает, то её концы (две вершины) с разных сторон. Но если мы 13 раз (нечётное число) переходим с одной стороны на другую, то не сможем вернуться в начальную точку. ◁

1.21 Закончите фразу: «сумма нескольких целых чисел будет чётной в тех случаях, когда в этой сумме чётное число...».

▷ ...нечётных слагаемых. В самом деле, добавление чётного слагаемого не меняет чётности суммы, а добавление нечётного меняет. Начинаем мы с нуля, значит, чтобы получить чётное число, надо менять нечётное число раз. ◁

• Более точно было бы сказать «в тех и только тех случаях, когда», «тогда и только тогда, когда», «если и только если» и т.п. Этот математический жаргон подразумевает сразу два утверждения: (1) если в сумме чётное число ⟨...⟩, то она чётна, и (2) если сумма чётна, то в ней чётное число ⟨...⟩.

1.22* Придя на занятие математического кружка, некоторые школьники пожали друг другу руки. Докажите, что количество тех школьников, которые сделали нечётное число рукопожатий, чётно.

▷ Пусть каждый школьник считает, сколько рукопожатий он сделал, а потом мы мысленно складываем все эти числа. От каждого рукопожатия сумма увеличится на 2 (два слагаемых увеличатся на 1), поэтому она всегда будет оставаться чётной. Значит, в неё чётное число нечётных слагаемых — а это и требуется доказать. ◁

1.23* В классе из 15 школьников каждый считает, что у него в классе есть семь друзей (среди остальных). Докажите, что отношение дружбы несимметрично: найдутся такие два школьника A и B, что A считает B своим другом, а B не считает A своим другом.

▷ Если бы это было не так и отношение дружбы было симметрично, то это было бы как рукопожатия (пусть все пары друзей пожмут друг другу руки), и по предыдущей задаче число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, было бы чётно (а тут все 15 сделали по 7). ◁

1.24* Можно ли заполнить таблицу 7×11 (7 строк и 11 столбцов) целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была бы чётна, а сумма чисел в каждом столбце была нечётна?

▷ Нет: сумму можно считать по строкам и по столбцам. По строкам она будет чётной (даже неважно, сколько строк, достаточно, что в каждой строке чётна), а по столбцам будет сумма 11 нечётных чисел, которая нечётна. ◁

1.25* Чтобы узнать, чётно ли целое положительное число, достаточно посмотреть на его последнюю цифру. Почему?

▷ Потому что многозначное число можно разбить на последнюю цифру и остальное, и это остальное измеряется десятками, поэтому заведомо чётно. ◁

1.26 Докажите, что произведение двух соседних целых чисел всегда чётно.

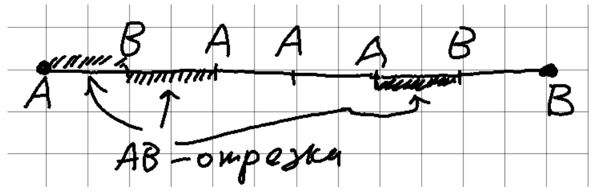
▷ Из соседних двух чисел одно нечётное, а другое чётное, значит, произведение всегда чётно. (А сумма нечётна, хоть в задаче про это и не спрашивается.) ◁

1.27* Запишем степени двойки $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ и степени тройки $(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$. Может ли в этих двух последовательностях чисел встретиться какое-то общее число, кроме 1?

• Это утверждение, если знать про логарифмы, можно сформулировать и так: $\log_2 3$ иррационален.

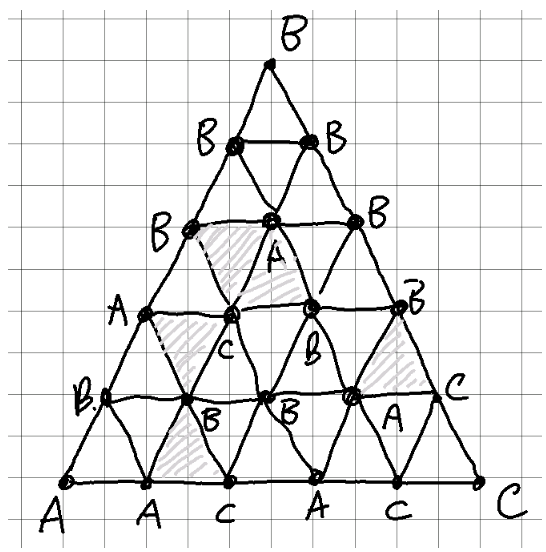
▷ Нет: в первой последовательности все числа чётны, кроме первого, а во второй — все нечётны. ◁

1.28* Отрезок AB разбит на несколько частей промежуточными точками, которые произвольно размечены буквами A или B (каждая точка либо A, либо B). Из этих частей выберем AB-отрезки, то есть те части, у которых концы помечены разными буквами (в любом порядке, так что можно было бы их назвать и BA-отрезками). (а) Докажите, что есть хотя бы один AB-отрезок. (б) Докажите, что общее число AB-отрезков нечётно.



▷ Что один AB-отрезок есть, совсем очевидно: идём слева направо, пока не встретим первую B-точку, перед ней будет AB-отрезок. Почему нечётное число: если идти слева направо, считая AB-отрезки, то появление каждого нового отрезка меняет текущую букву с A на B и обратно. А всего должно быть нечётное число перемен, раз мы начали с A и пришли в B. ◁

1.29* Треугольник ABC разрезан на меньшие (как на рисунке), и их вершины помечены буквами A, B и C произвольным образом (каждая вершина одной буквой). При этом на стороне AB использованы только буквы A и B, на стороне BC — только B и C, на стороне AC — только A и C. Докажите, что есть ABC-треугольники (в вершинах которых все три буквы), и их нечётное число.



▷ Будем действовать несимметрично и считать, скажем, AB-отрезки. Сначала посчитаем их по треугольникам. Каждый ABC-треугольник имеет ровно одну AB-сторону, остальные имеют либо ноль, либо две (если вершины помечены буквами A и B). Если мы сложим все эти количества, то каждый внутренний AB-отрезок будет посчитан дважды, а каждый граничный (они бывают только на стороне AB) будет посчитан один раз. Поэтому *чётность числа*

ABC-треугольников равна чётности числа граничных AB-отрезков, а мы уже знаем, что их число нечётно. $\triangleleft$

• Это утверждение, которое можно обобщить на любую размерность (хотя тетраэдр сложнее разрезать на маленькие тетраэдры, но тоже можно), называется *леммой Шпернера*. Она используется в одном из доказательств *теоремы Брауэра о неподвижной точке*: всякое непрерывное отображение треугольника в себя оставляет хотя бы одну точку на месте. Схема рассуждения такая: если это не так и все точки сдвигаются хотя бы на некоторое расстояние $d > 0$, то разрежем треугольник на такие маленькие треугольники, чтобы вершины каждого переходит в близкие точки (расстояние между образами вершин много меньше d). Теперь пометим вершину буквой A, если она приближается к противоположной стороне BC, аналогично для букв B (приближение к AC) и C (приближение к AB). Поскольку точки не остаются на месте, то к одной из трёх сторон они должны приближаться и букву выбрать можно (могут сразу к двум, тогда выберем произвольно). Теперь разнобуквенный треугольник создаёт противоречие: его вершины куда-то сдвигаются, и примерно в одно и то же место, и не могут сразу приближаться ко всем трём сторонам.

В свою очередь, теорема Брауэра о неподвижной точке применяется в математической экономике (для доказательства существования равновесий в играх, в том числе *равновесия Нэша*).