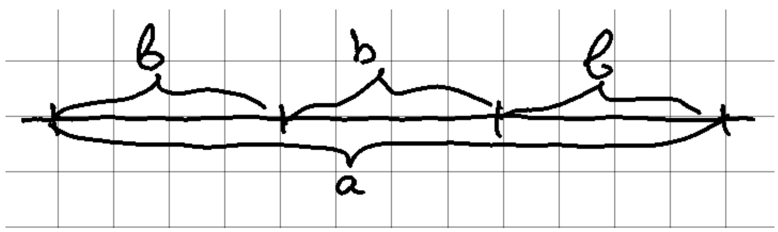
2. Делимость

Чётные числа — это числа, которые делятся нацело (без остатка) на 2, то есть равные $2k$ для какого-то целого k. Аналогично можно определить делимость на 3, 4, 5, ...:

> *целое число a делится на целое положительное число b*, если $a = kb$ для некоторого целого числа k.

Ещё говорят (это значит ровно то же самое), что a *кратно* b (число a является кратным числа b), и что b является *делителем* a.

Обозначение: $b \mid a$ (b делит a).



• Для положительного a это имеет наглядный смысл: в мешке a яблок, и их можно раздать поровну b людям. Или по-другому (переставляя сомножители): a яблок можно разложить на кучки по b яблок, и ничего не останется. Ещё: a рублей можно заплатить купюрами по b рублей.

Слово «кратное» имеет тот же смысл, что в «уплатить штраф в трёхкратном размере»: новая сумма штрафа кратна исходной (втрое больше). Другие родственные слова: «многократно», «неоднократно» и т.п.

2.1 Заполнить пробел: положительное число a кратно b, если на круговом шоссе длиной в b километров мы [...], проехав a километров.

2.2 Сколько целых положительных делителей у числа 18? (Не забудьте 1 и само число 18.)

2.3* Найдите несколько чисел, у которых *нечётное* число целых положительных делителей? Видите ли вы тут какую-то закономерность? Если да, то можете ли её доказать?

2.4 В определении делимости мы требуем, чтобы b было целым положительным числом, но не запрещаем случая $b = 1$. Какие целые числа делятся на 1?

$\boxed{\textbf{2.5}}$ В определении делимости мы разрешаем a быть нулём или отрицательным числом. На какие числа делится нуль? В каком случае $-a$ делится на b?

$\boxed{\textbf{2.6}}$ При определении делимости мы запретили b быть нулём или отрицательным числом. Что было бы, если бы мы не сделали такой оговорки: какие числа делились бы на нуль? какие числа делились бы на -2?

• Иногда люди спорят: делится ли нуль на нуль? Одни говорят, что делится: ведь $2x$ всегда делится на x, зачем же делать исключение для $x = 0$? Другие говорят, что a делится на b, когда a/b — целое число, а $0/0$ смысла не имеет. И те, и другие имеют резон, но в математике смысл терминов зависит от того, как их определить — раз уж мы договорились, что 0 (и вообще никакое число) не делится на 0, значит, не делится. Но другие могут определить иначе. И в этом нет ничего страшного — хотя неудобно: надо уточнять, как понимается слово «делится».

▷ Наиболее известный пример такого рода: является ли нуль натуральным числом? В российской школьной программе не является, но во многих книгах (а также во французской школьной программе) является. Так что надо быть осторожным, если в задаче спрашивается про натуральные числа. ◁

$\boxed{\textbf{2.7}^*}$ В ныне принятом григорианском календаре все годы имеют 365 или 366 дней; во втором случае год называется *високосным*. Правила такие: по умолчанию год N не високосный, но если N делится на 4, то год в порядке исключения будет високосным. Однако если N делится на 100, то в порядке исключения из исключения год не будет високосным — правда, если n делится на 400, то в порядке исключения (опять!) год будет високосным.

Если такой календарь продолжать неограниченно долго, то сколько в среднем будет дней в году?

• Педанты скажут, что среднее (арифметическое) определено для конечного числа лет, а календарь продолжается неограниченно долго. Строго говоря, нужно было бы говорить о пределе — к чему близко среднее арифметическое для очень больших отрезков. Но правильный ответ можно получить и из наглядных соображений, оставив строгое доказательство на будущее.

$\boxed{\textbf{2.8}}$ Докажите, что если два целых числа a и b делятся на целое положительное c, то их сумма и разность делятся на c. Что можно сказать про $a + b$ и $a - b$, если одно из чисел a и b делится на c, а другое — нет? Что можно сказать про $a + b$ и $a - b$, если оба числа не делятся на c?

• Мы потом увидим, что деление чисел на (скажем) делящиеся и не делящиеся на 3 слишком грубое: его надо уточнить и среди не делящихся различать дающие остаток 1 и дающие остаток 2.

2.9 Докажите, что если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

2.10 Докажите, что если хотя бы один сомножитель в произведении двух целых чисел делится на k, то и всё произведение делится на k. Верно ли обратное: если произведение делится на k, то один из сомножителей делится на k?

• Обратное будет верным для случая *простого* k (не разлагающегося в произведение двух меньших). Мы ещё много раз про это будем говорить.

2.11* Числа a, b, c, d — целые положительные, причём $ab = cd$. Известно, что a делится на c. Докажите, что d делится на b.

2.12* Есть четыре целых положительных числа a, b, c, d, причём $ad+bc$ делится на $a+b$. Докажите, что тогда и $ac+bd$ делится на $a+b$.

2.13 В трёхзначном числе все цифры одинаковы (то есть это одно из чисел 111, 222, ..., 999). Докажите, что оно делится на 37.

• Тут не так много чисел, и можно их все перепробовать — но можно обойтись и без этого. Как?

2.14* Шестизначное число состоит из двух одинаковых групп по три цифры (как, скажем, 173173). Докажите, что оно делится на 7, 11 и 13. Что получится, если его последовательно разделить на все эти три числа?

2.15* Покажите, что a^2-b^2 всегда делится на $a-b$ (мы считаем, что числа a и b целые, и $a > b$). Тот же вопрос для a^3-b^3, a^4-b^4 и вообще для a^n-b^n.

• Здесь $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot d \cdot a$ и так далее (a^n — произведение n сомножителей, равных a).

2.16* Пусть m, n — целые числа, и $5m+3n$ делится на 11. Покажите, что $6m+8n$ делится на 11. Покажите, что $9m+n$ делится на 11.

• Мы потом увидим, что такое получается из-за того, что $5/3 = 6/8 = 9$ по модулю 11.

2.17* Имеется n различных целых положительных чисел. Докажите, что любое целое положительное число, которое делится на все эти числа, хотя бы в n раз больше наименьшего из них.

$\boxed{\mathbf{2.18}}^*$ Найти все неотрицательные целые числа n, при которых $5n + 17$ делится на $n + 1$.

$\boxed{\mathbf{2.19}}^*$ Есть 101 целое положительное число. Докажите, что среди них есть два, разность которых делится на 100. Почему?