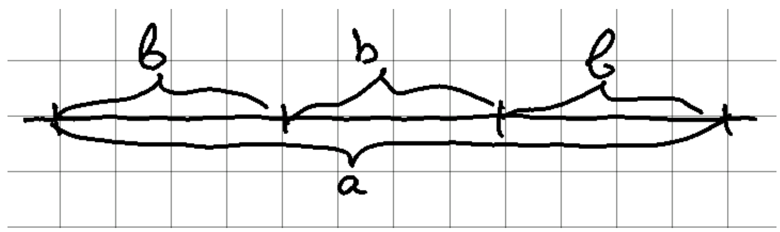
2. Делимость

Чётные числа — это числа, которые делятся нацело (без остатка) на 2, то есть равные $2k$ для какого-то целого k. Аналогично можно определить делимость на 3, 4, 5, ...:

> *целое число a делится на целое положительное число b*, если $a = kb$ для некоторого целого числа k.

Ещё говорят (это значит ровно то же самое), что a *кратно* b (число a является кратным числа b), и что b является *делителем* a.

Обозначение: $b \mid a$ (b делит a).



• Для положительного a это имеет наглядный смысл: в мешке a яблок, и их можно раздать поровну b людям. Или по-другому (переставляя сомножители): a яблок можно разложить на кучки по b яблок, и ничего не останется. Ещё: a рублей можно заплатить купюрами по b рублей.

Слово «кратное» имеет тот же смысл, что в «уплатить штраф в трёхкратном размере»: новая сумма штрафа кратна исходной (втрое больше). Другие родственные слова: «многократно», «неоднократно» и т.п.

2.1 Заполнить пробел: положительное число a кратно b, если на круговом шоссе длиной в b километров мы [...], проехав a километров.

▷ ...сделаем целое число кругов и вернёмся в точку старта. ◁

2.2 Сколько целых положительных делителей у числа 18? (Не забудьте 1 и само число 18.)

▷ Можно в уме перебрать делители: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Видно, что их можно сгруппировать парами 1 и 18, 2 и 9, 3 и 6. (Понятно, по какому принципу они сгруппированы? Произведение в паре 18.) ◁

2.3* Найдите несколько чисел, у которых *нечётное* число целых положительных делителей? Видите ли вы тут какую-то закономерность? Если да, то можете ли её доказать?

▷ Тут помогает группировка делителей числа n в пары: x и y образуют одну пару, когда $xy = n$. Есть единственный случай непарного делителя: когда парный y равен самому x, то есть $n = x^2$. Значит, для точных квадратов делителей нечётное число, а для остальных — чётное. ◁

$\boxed{\mathbf{2.4}}$ В определении делимости мы требуем, чтобы b было целым положительным числом, но не запрещаем случая $b = 1$. Какие целые числа делятся на 1?

▷ Все: поскольку $a = 1 \cdot a$, то $1 \mid a$ при любом a. ◁

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ В определении делимости мы разрешаем a быть нулём или отрицательным числом. На какие числа делится нуль? В каком случае $-a$ делится на b?

▷ (а) Нуль делится на все целые положительные b, так как $0 = 0 \cdot b$, то есть $0 = kb$ при $k = 0$. (б) От изменения знака a делимость не меняется: если a делится на b и $a = kb$ для какого-то k, то $-a = (-k)b$, то есть $a = lb$ при целом $l = -k$. ◁

$\boxed{\mathbf{2.6}}$ При определении делимости мы запретили b быть нулём или отрицательным числом. Что было бы, если бы мы не сделали такой оговорки: какие числа делились бы на нуль? какие числа делились бы на -2?

▷ (а) Без такой оговорки на нуль делились бы числа вида $0 \cdot k$, то есть единственное число нуль. (b) От изменения знака b делимость (в этом новом временном смысле) не меняется: если a делится на b и $a = kb$ для какого-то k, то $a = (-k) \cdot (-b)$, то есть $a = l(-b)$ при $l = -k$. ◁

• Иногда люди спорят: делится ли нуль на нуль? Одни говорят, что делится: ведь $2x$ всегда делится на x, зачем же делать исключение для $x = 0$? Другие говорят, что a делится на b, когда a/b — целое число, а $0/0$ смысла не имеет. И те, и другие имеют резон, но в математике смысл терминов зависит от того, как их определить — раз уж мы договорились, что 0 (и вообще никакое число) не делится на 0, значит, не делится. Но другие могут определить иначе. И в этом нет ничего страшного — хотя неудобно: надо уточнять, как понимается слово «делится».

▷ Наиболее известный пример такого рода: является ли нуль натуральным числом? В российской школьной программе не является, но во многих книгах (а также во французской школьной программе) является. Так что надо быть осторожным, если в задаче спрашивается про натуральные числа. ◁

2.7* В ныне принятом григорианском календаре все годы имеют 365 или 366 дней; во втором случае год называется *високосным*. Правила такие: по умолчанию год N не високосный, но если N делится на 4, то год в порядке исключения будет високосным. Однако если N делится на 100, то в порядке исключения из исключения год не будет високосным — правда, если n делится на 400, то в порядке исключения (опять!) год будет високосным.

Если такой календарь продолжать неограниченно долго, то сколько в среднем будет дней в году?

• Педанты скажут, что среднее (арифметическое) определено для конечного числа лет, а календарь продолжается неограниченно долго. Строго говоря, нужно было бы говорить о пределе — к чему близко среднее арифметическое для очень больших отрезков. Но правильный ответ можно получить и из наглядных соображений, оставив строгое доказательство на будущее.

▷ Из правил видно, что всё повторяется каждые 400 лет (потому что 400 делится и на 4, и на 100). За эти 400 лет было бы 100 високосных, если бы не правило про делимость на 100. Из них надо вычесть четыре раза, когда делится на 100, и один вернуть (когда делится на 400), всего $100 - 4 + 1 = 97$. Значит, 97 раз из 400 добавляется день к невисокосному году в 365 дней, откуда получаем ответ: $365\frac{97}{400}$. ◁

2.8 Докажите, что если два целых числа a и b делятся на целое положительное c, то их сумма и разность делятся на c. Что можно сказать про $a + b$ и $a - b$, если одно из чисел a и b делится на c, а другое — нет? Что можно сказать про $a + b$ и $a - b$, если оба числа не делятся на c?

▷ Пусть a и b делятся на c. Тогда по определению $a = kc$ и $b = lc$ для некоторых целых k и l. Сложим: $a + b = kc + lc = (k + l) \cdot c$, поэтому $a + b$ получается умножением целого числа $k + l$ на c, то есть делится на c. Аналогично для $a - b = (k - l) \cdot c$.

Если a делится на c, а b не делится на c, то сумма $a + b$ не делится на c. Почему она не может делиться на c? Если бы она делилась, то число $b = (a + b) - a$ было бы разностью двух чисел $a + b$ и b, делящихся на c, и по доказанному делилось бы на c (а мы предполагаем, что b не делится).

Аналогично для разности: если, скажем, a делится на c, а b не делится, то разность $a - b$ не может делиться, иначе и $b = a - (a - b)$ делилось бы.

А вот про сумму и разность двух чисел a, b, не делящихся на c, ничего гарантировать нельзя — может делиться, а может и не делиться. Скажем,

$1+4$: два слагаемых не делятся на 3, и сумма 5 тоже не делится. А в $1+8$ оба слагаемых тоже не делятся на 3, а сумма делится. То же самое и с разностью бывает (хотя бы потому, что $a+b$ это $a-(-b)$). $\triangleleft$

• Мы потом увидим, что деление чисел на (скажем) делящиеся и не делящиеся на 3 слишком грубое: его надо уточнить и среди не делящихся различать дающие остаток 1 и дающие остаток 2.

2.9 Докажите, что если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

$\triangleright$ Если a в k раз больше b, а b в l раз больше c, то a в kl раз больше c: из $a=kb$ и $b=lc$ при целых k и l следует $a=k(lc)=(kl)c$, и множитель kl целый, так что a делится на c. $\triangleleft$

2.10 Докажите, что если хотя бы один сомножитель в произведении двух целых чисел делится на k, то и всё произведение делится на k. Верно ли обратное: если произведение делится на k, то один из сомножителей делится на k?

$\triangleright$ Пусть в произведении ab сомножитель a делится на k, то есть $a=kl$ для целого l. Тогда $ab=(kl)b=k(lb)$ и делится на k (с целым частным lb).

Обратное неверно: скажем, произведение 10 и 6, равное 60, делится на 4, но оба сомножителя не делятся. $\triangleleft$

• Обратное будет верным для случая *простого* k (не разлагающегося в произведение двух меньших). Мы ещё много раз про это будем говорить.

2.11* Числа a, b, c, d — целые положительные, причём $ab=cd$. Известно, что a делится на c. Докажите, что d делится на b.

$\triangleright$ Если $a=kc$ при целом k, то $kcb=cd$ по условию, и на c (оно положительно) можно сократить, получится $kb=d$, то есть d делится на b. (Можно коротко сказать: составим пропорцию $a/c=d/b$.) $\triangleleft$

2.12* Есть четыре целых положительных числа a, b, c, d, причём $ad+bc$ делится на $a+b$. Докажите, что тогда и $ac+bd$ делится на $a+b$.

$\triangleright$ На первый взгляд это выглядит странно, но можно заметить, что сумма двух чисел, о которых идёт речь, $ad+bc$ и $ac+bd$, равна $(a+b)(c+d)$ и делится на $a+b$. Поэтому если одно делится, то и второе тоже. $\triangleleft$

2.13 В трёхзначном числе все цифры одинаковы (то есть это одно из чисел 111, 222, ..., 999). Докажите, что оно делится на 37.

• Тут не так много чисел, и можно их все перепробовать — но можно обойтись и без этого. Как?

▷ Число 111 делится на 37 (частное 3), а все следующие числа кратны 111 (скажем, $555 = 5 \cdot 111 = 5 \cdot 3 \cdot 37 = 15 \cdot 37$. ◁

2.14* Шестизначное число состоит из двух одинаковых групп по три цифры (как, скажем, 173173). Докажите, что оно делится на 7, 11 и 13. Что получится, если его последовательно разделить на все эти три числа?

▷ Можно заметить, что

$$173\,173 = 173\,000+173 = 1000\cdot173+173 = (1000+1)\cdot173 = 1001\cdot173 = 7\cdot11\cdot13\cdot173.$$

(Не спрашивайте, почему $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ — так вышло.) Поэтому 173 173 делится на 7, 11 и 13, а если последовательно разделить на все три, то получится 173. (Здесь 173 только для примера, можно взять любое другое трёхзначное число.) ◁

2.15* Покажите, что $a^2 - b^2$ всегда делится на $a - b$ (мы считаем, что числа a и b целые, и $a > b$). Тот же вопрос для $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$ и вообще для $a^n - b^n$.

▷ Можно вспомнить, что $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и потому делится на $a - b$ (частное $a + b$). Для кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, это можно проверить умножением. Вообще,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b_{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

если перемножить, почти всё, кроме двух членов a^n и b^n сократится.

Для $a^4 - b^4$ можно заметить, что это ведь квадраты a^2 и b^2, так что из самого первого утверждения мы знаем, что $a^4 - b^4$ делится на $a^2 - b^2$, которое в свою очередь делится на $a - b$.

Можно сказать и так: обозначив $a - b$ за k, мы должны доказать, что $(b + k)^n - b^n$ делится на k. Но если раскрыть скобки в $(b + k)(b + k) \ldots (b + k)$, то будет ровно одно слагаемое без k, оно будет равно b^n, а все остальные (интересующая нас разность) содержат множитель k. ◁

• Здесь $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot d \cdot a$ и так далее (a^n — произведение n сомножителей, равных a).

2.16* Пусть m, n — целые числа, и $5m + 3n$ делится на 11. Покажите, что $6m + 8n$ делится на 11. Покажите, что $9m + n$ делится на 11.

▷ Если $5m + 3n$ делится на 11, то и разница $11(m + n) - (5m + 3n) = 6m + 8m$ делится на 11. Кроме того, в этом случае $4(5m + 3n)$ тоже делится на 11, то есть

$20m+12n=11(m+n)+9m+n$ делится на 11, и остаётся вычесть кратное 11 число $11(m+n)$. ◁

• Мы потом увидим, что такое получается из-за того, что $5/3=6/8=9$ по модулю 11.

$\boxed{\textbf{2.17}}^*$ Имеется n различных целых положительных чисел. Докажите, что любое целое положительное число, которое делится на все эти числа, хотя бы в n раз больше наименьшего из них.

▷ Пусть N, в соответствии с условием, делится на $a_1,\ldots,a_n$, причём $a_1<\ldots<a_n$. Надо доказать, что $N/a_1\geqslant n$. В самом деле, числа $N/a_1>N/a_2>\ldots>N/a_n$ целые положительные, и их n штук, поэтому первое из них не меньше n. ◁

$\boxed{\textbf{2.18}}^*$ Найти все неотрицательные целые числа n, при которых $5n+17$ делится на $n+1$.

▷ Если вынести очевидно целую часть — заметив, что

$$\frac{5n+17}{n+1}=\frac{5n+5}{n+1}+\frac{12}{n+1},$$

то ясно, что надо найти целые $n\geqslant 0$, для которых $n+1$ делит 12, то есть делители 12, уменьшенные на единицу: 0, 1, 2, 3, 5, 11. ◁

$\boxed{\textbf{2.19}}^*$ Есть 101 целое положительное число. Докажите, что среди них есть два, разность которых делится на 100. Почему?

▷ Запишем числа в десятичной системе и посмотрим на две последние цифры. Вариантов от 00 до 99 есть только 100, а чисел 101, поэтому у каких-то двух чисел в конце стоит одна и та же пара цифр. Тогда их разница кончается на два нуля, то есть состоит из целого числа сотен (делится на 100). ◁