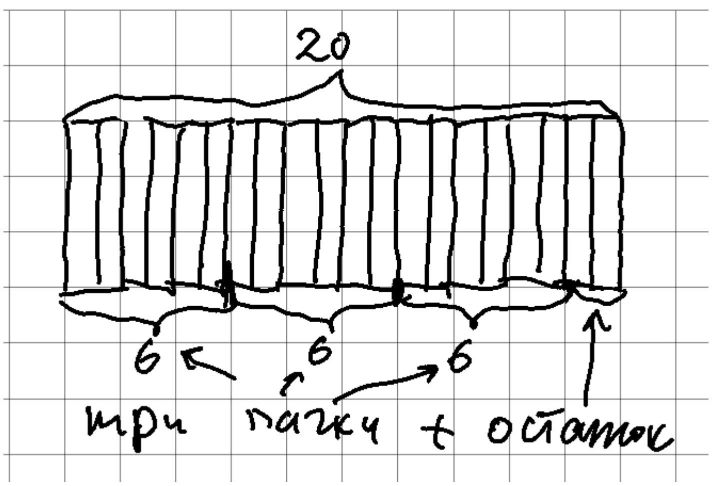
3. Деление с остатком

Связывая 20 книг в пачки по 6 книг в каждой, мы получим 3 пачки и останутся две лишние книги: $20 = 3 \times 6 + 2$. Как говорят, мы делим 20 (*делимое*) на 6 (*делитель*) и получаем в результате *неполное частное* 3 и *остаток* 2.



Обозначают остаток по-разному. В математических книжках (и в языке `Pascal`) пишут $20 \bmod 6 = 2$, во многих других языках програмирования (`C`, `python`) пишут `20%6==2` (два знака равенства не опечатка, они так и пишут, чтобы отличить от присваивания).

3.1 (**а**) В году (невисокосном) 365 дней. Сколько в нём полных недель и сколько дней в остатке?

(**б**) Первое января 2022 года пришлось на субботу. Каким днём недели будет первое января 2023 года? 2024 года? (Из этих трёх лет високосный только последний.)

- Раньше в школах учили делить «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} 365 & \underline{7} \\ \underline{35} & 52 \leftarrow \text{частное} \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 \leftarrow \text{остаток} & \end{array}$$

Для ленивых проще воспользоваться калькулятором:

$$365/7 = 52.142857\ldots$$

Отсюда сразу видно, что полных недель будет 52; вычислим остаток: $365 - 52 \times 7 = 1$. (Можно также сообразить, что $0.142857\ldots$ — это одна седьмая, поскольку это меньше двух десятых и тем более двух седьмых.)

3.2 (**а**) Какой остаток даёт число 1000 при делении на 17?
(**б**) Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое делится нацело (без остатка) на 17.

3.3 Сейчас два часа дня. Сколько времени будет через 100 часов?

3.4 Найдите число, которое даёт при делении на 117 частное 7 и остаток 43.

3.5* Поезд Москва–Владивосток вышел в пятницу в 21:25 и шёл 147 часов 38 минут. В какой день недели и в какое время (по московскому времени — железная дорога вся работает по одному времени, независимо от часовых поясов) он пришёл во Владивосток?

3.6 Можно ли разрезать квадрат 8×8 на прямоугольники 1×3?

3.7* Можно ли разрезать квадрат $10 \cdot 10$ на прямоугольники $1 \cdot 4$?

• Подсчёт показывает, что *если* можно разрезать, то получится 25 прямоугольников, это число целое. Но отсюда ещё не следует, что можно разрезать (и на самом деле нельзя, но доказательство требует изобретательности).

• Вообще верно такое утверждение: если прямоугольник можно разрезать на прямоугольники, у каждого из которых одна сторона кратна c, то и у исходного прямоугольника одна сторона кратна c. (В нашем случае $c = 4$.) Это утверждение имеет множество разных доказательств, некоторые из них используют аналогичную раскраску.

3.8 Число x даёт при делении на 7 остаток 3. Какой остаток даёт при делении на 7 число $x + 1$? число $x - 1$? Какой остаток дают при делении на 7 числа $2x$ и $3x$?

3.9 Найдите остаток от деления числа 1828 на 10, на 100 и на 25.

3.10* Рассмотрим числа от 1001 до 2000. Будем делить их на 7. Сколько из них разделятся без остатка? Какой остаток будет встречаться реже всего?

3.11* Подсчитайте (по возможности без бумажки), какой остаток даёт миллион при делении на 1000, на 999 и на 1001.

3.12 Разрежем кусок бумаги на 5 частей. Затем одну из частей снова разрежем на пять частей, потом одну из частей (любую) разрежем на пять частей и так далее. Может ли после очередного разрезания получиться 34 части?

3.13 Число n даёт при делении на 143 остаток 24 и частное 13. Какой остаток оно будет давать при делении на 142? на 144?

- Разумеется, можно просто вычислить это самое n и поделить его на бумажке или с калькулятором. Но можно решить и в уме — как?

3.14 Отметьте на числовой оси числа, которые делятся на 3, затем числа, которые дают остаток 1 при делении на 3, а затем числа, которые дают остаток 2 при делении на 3. (Сделайте рисунок так, чтобы числа от -5 до 5 поместились.)

Определение. Пусть a, b — целые числа, причём $b > 0$. *Разделить a на b с остатком* означает найти такие целые числа q (*частное*) и r (*остаток*), что

- $a = q \cdot b + r$;
- $0 \leqslant r < b$.

Обратите внимание, что число b должно быть положительным, а число a — не обязательно. Но даже если a отрицательно, то остаток r должен быть положительным (хотя частное q может быть и отрицательным).

3.15 Всегда ли возможно деление с остатком по такому определению? Определены ли частное и остаток однозначно (или может быть несколько вариантов, удовлетворяющих условиям)?

3.16 Учитель по ошибке написал второе условие в определении деления с остатком как $0 \leqslant r \leqslant b$. Останется ли утверждение предыдущей задачи верным для такого определения?

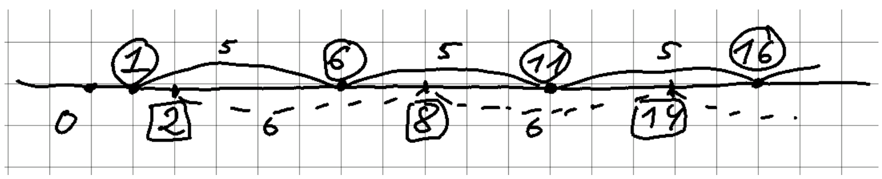
3.17* Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если второе условие записать как $0 < r \leqslant b$?

3.18* Число 100 делят с остатком на целое положительное число, меньшее 100. Какой наибольший остаток может получиться?

3.19 Начав движение по кольцевой дороге длиной 120 км, машина проехала 500 км. Сколько раз она проезжала мимо места старта? (Сам старт не считается за проезд мимо старта.) Сколько километров она проехала после того, как была в точке старта в последний раз? Как это связано с делением с остатком?

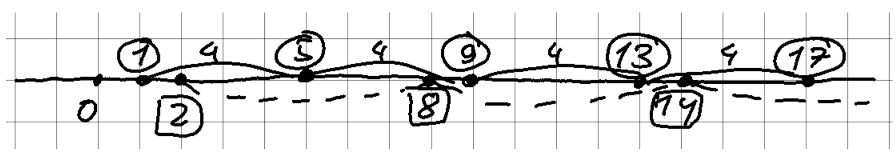
- Вообще взятие остатка по модулю k — это, если можно так выразиться, наматывание числовой оси на окружность длины k.

3.20 Отметьте на числовой оси положительные числа, дающие остаток 1 при делении на 5. (С какими промежутками они идут?) Теперь отметьте другим цветом числа, дающие остаток 2 при делении на 6. Найдётся ли общее число (отмеченное двумя цветами)?



- Если не ограничиваться положительными числами, то можно заметить общее число −4, и прибавить к нему 30, кратное и 5, и 6. Получится как раз 26.

3.21 Отметьте на числовой оси положительные числа, дающие остаток 1 при делении на 4. Теперь отметьте другим цветом числа, дающие остаток 2 при делении на 6. Найдётся ли общее число (отмеченное двумя цветами)?



- Мы ещё вспомним эту задачу, когда будем обсуждать «китайскую теорему об остатках».

3.22* Если нынешний календарь (см. задачу 1) не будет меняться, на какие дни недели будет чаще всего приходиться новый год (1 января)?

3.23* На столе лежат книги (больше одной и меньше 100). Если их связывать в пачки по 3, то останется одна книга. То же самое (останется одна книга), если связывать по 4, по 5 и по 6. Сколько книг лежит на столе? (Достаточно указать один вариант.)

$\boxed{\textbf{3.24}}^*$ На столе лежат книги (больше одной и меньше 500). Если их связывать в пачки по 3, то останется одна книга. То же самое (останется одна книга), если связывать по 4, по 5 и по 6. А если связывать по 7, то ни одной не останется (все разойдутся по пачкам). Сколько книг лежит на столе? (Достаточно указать один вариант.)

• Неполное частное (целое число, которое получается при делении с остатком) можно получить иначе: возьмём обычное частное (целое или дробь) и возьмём его *целую часть*. Скажем, $7/3 = 2\frac{1}{3}$, и здесь целая часть 2 (и остаётся $1/3 =$ остаток/делитель).

Целую часть можно определить как «округление вниз» до ближайшего (меньшего) целого числа. Её обозначают $\lfloor x \rfloor$, так что, скажем,

$$\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = \lfloor 2\frac{1}{3} \rfloor = 2, \quad \text{но} \quad \lfloor -\frac{7}{3} \rfloor = \lfloor -2\frac{1}{3} \rfloor = -3.$$

Если число уже и так целое, то его целая часть равна самому этому числу.

$\boxed{\textbf{3.25}}^*$ Докажите, что для целых положительных чисел a, b, c всегда выполняется равенство

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor / c \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor.$$

$\boxed{\textbf{3.26}}$ Докажите, что произведение любых 5 последовательных натуральных чисел делится на 5 (и вообще произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на k).

• На самом деле произведение k последовательных натуральных чисел делится не только на k, но и на $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Например, произведение любых трёх подряд идущих чисел делится на 6 (=3!). Это можно доказать комбинаторно: $n(n-1)(n-2)/6$ равно числу способов выбрать из n человек трёх дежурных (и аналогично для k). Другой способ доказательства — считать простые множители, о которых мы говорим дальше.