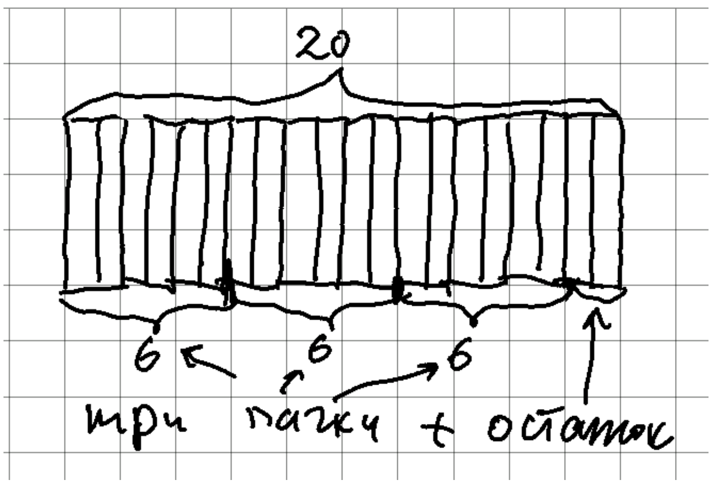
3. Деление с остатком

Связывая 20 книг в пачки по 6 книг в каждой, мы получим 3 пачки и останутся две лишние книги: $20 = 3 \times 6 + 2$. Как говорят, мы делим 20 (*делимое*) на 6 (*делитель*) и получаем в результате *неполное частное* 3 и *остаток* 2.



Обозначают остаток по-разному. В математических книжках (и в языке `Pascal`) пишут $20 \bmod 6 = 2$, во многих других языках програмирования (`C`, `python`) пишут `20%6==2` (два знака равенства не опечатка, они так и пишут, чтобы отличить от присваивания).

$\boxed{\textbf{3.1}}$ (**а**) В году (невисокосном) 365 дней. Сколько в нём полных недель и сколько дней в остатке?

(**б**) Первое января 2022 года пришлось на субботу. Каким днём недели будет первое января 2023 года? 2024 года? (Из этих трёх лет високосный только последний.)

▷ Число недель можно подсчитать в уме: 350 дней — это 50 недель по 7 дней, остаётся 15 дней, то есть две полные недели и ещё один день. Всего в году 52 недели и один день.

Если бы этого лишнего дня не было, то следующий год начинался бы с того же дня недели, что и предыдущий. А так он на день позже. Значит, 1 января 2023 года будет воскресенье, а 1 января 2024 года будет понедельник. (Оба года 2022 и 2023 невисокосные, так как не делятся на 4. А следующий год 2024 будет високосным, так что первое января 2025 года придётся не на вторник, а не среду.) ◁

- Раньше в школах учили делить «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} 365 & 7 \\ \underline{35} & 52 \leftarrow \text{частное} \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 \leftarrow \text{остаток} & \end{array}$$

Для ленивых проще воспользоваться калькулятором:

$$365/7 = 52.142857\ldots$$

Отсюда сразу видно, что полных недель будет 52; вычислим остаток: $365 - 52 \times 7 = 1$. (Можно также сообразить, что $0.142857\ldots$ — это одна седьмая, поскольку это меньше двух десятых и тем более двух седьмых.)

3.2 (**а**) Какой остаток даёт число 1000 при делении на 17?

(**б**) Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое делится нацело (без остатка) на 17.

▷ Калькулятор даёт $1000/17 = 58.82\ldots$, так что неполное частное будет 17, а останется $1000 - 58 \cdot 17 = 14$.

Чтобы получить делящееся на 17 число, минимум нужно добавить 3 ($14 + 3 = 17$), так что наименьшее четырёхзначное число будет 1003. ◁

3.3 Сейчас два часа дня. Сколько времени будет через 100 часов?

▷ Делим с остатком: 100 часов — это четверо суток ($24 \cdot 4 = 96$) и ещё 4 часа. Значит, будет (по суточному циклу) на четыре часа позже: шесть часов вечера. ◁

3.4 Найдите число, которое даёт при делении на 117 частное 7 и остаток 43.

▷ Надо просто вычислить $117 \cdot 7 + 43 = 862$. ◁

3.5* Поезд Москва–Владивосток вышел в пятницу в 21:25 и шёл 147 часов 38 минут. В какой день недели и в какое время (по московскому времени — железная дорога вся работает по одному времени, независимо от часовых поясов) он пришёл во Владивосток?

▷ Сначала выделим целое число суток: $144 = 6 \cdot 24$, так что поезд идёт 6 суток и ещё 3 часа 38 минут. Значит, в четверг следующей недели в 21:25 ему останется ехать эти самые 3 часа 38 минут. Через 3 часа будет 00 : 25 пятницы, $25 + 38 = 63$, получается 01 : 03 пятницы. ◁

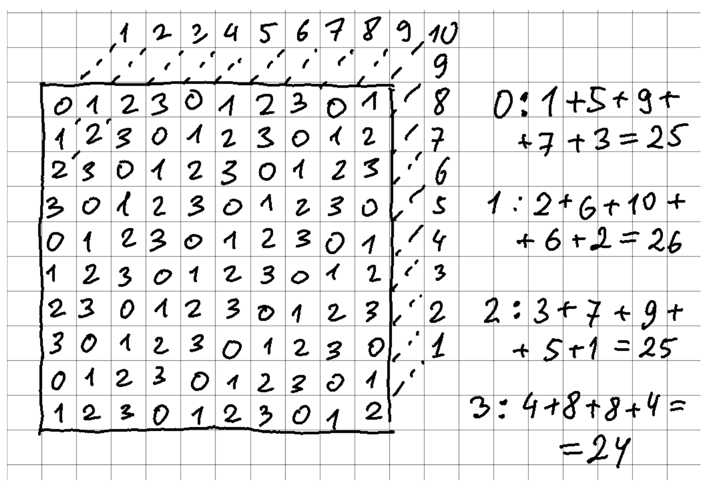
3.6 Можно ли разрезать квадрат 8×8 на прямоугольники 1×3?

▷ Нельзя: $8 \cdot 8 = 64$ не делится нацело на $1 \cdot 3 = 3$, получается $21\frac{1}{3}$ (остаётся одна клетка). ◁

3.7* Можно ли разрезать квадрат $10 \cdot 10$ на прямоугольники $1 \cdot 4$?

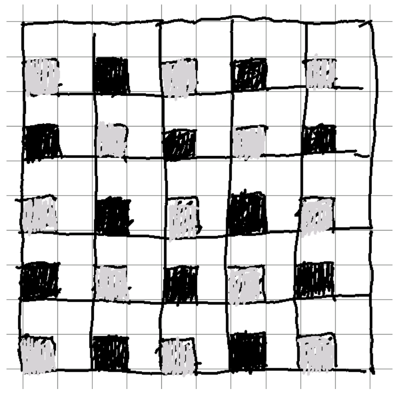
• Подсчёт показывает, что *если* можно разрезать, то получится 25 прямоугольников, это число целое. Но отсюда ещё не следует, что можно разрезать (и на самом деле нельзя, но доказательство требует изобретательности).

▷ Можно раскрасить все клетки в четыре цвета по диагоналям, меняя цвета по циклу, и заметить, что каждый прямоугольник $1 \cdot 4$ покрывает по одной клетке каждого цвета.



Значит, 25 таких прямоугольников покрывают по 25 клеток, но в реальности клеток равных цветов не поровну.

Можно использовать и другие трюки подобного рода.

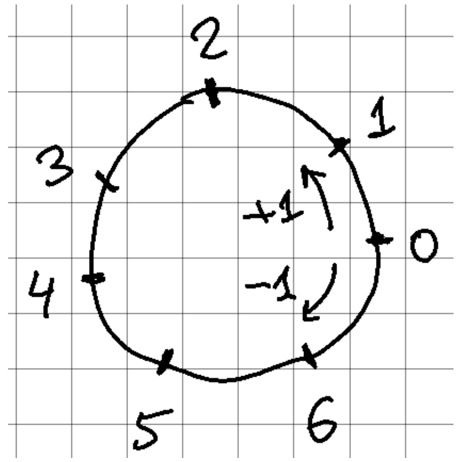


При такой раскраске каждый прямоугольник 1×4 покрывает поровну серых и чёрных клеток (по одной клетке, если вообще покрывает), а всего клеток 25, так что чёрных и серых не поровну. ◁

• Вообще верно такое утверждение: если прямоугольник можно разрезать на прямоугольники, у каждого из которых одна сторона кратна c, то и у исходного прямоугольника одна сторона кратна c. (В нашем случае $c = 4$.) Это утверждение имеет множество разных доказательств, некоторые из них используют аналогичную раскраску.

3.8 Число x даёт при делении на 7 остаток 3. Какой остаток даёт при делении на 7 число $x + 1$? число $x - 1$? Какой остаток дают при делении на 7 числа $2x$ и $3x$?

▷ По определению, $x = 7k + 3$ (целое число k пачек по семь книг и ещё три книги, если как в примере). Тогда $x + 1 = 7k + 4$ и $x - 1 = 7k + 2$, то есть остатки 4 и 2. Вообще прибавление единицы к числу прибавляет единицу к остатку, только вместо 6 получается 7 (аналогично и вычитание, только из нуля получается 6).



Теперь с умножением: $(7k+3)\cdot 2 = 2\cdot 7k+6$, первое слагаемое делится на 7, значит, остаток 6. Аналогично $(7k+3)\cdot 3 = 3\cdot 7k+9$, значит, остаток 9? Нет, конечно, из 9 можно выделить ещё одну целую пачку и останется 2. Другими словами, $(7k+3)\cdot 3 = 7\cdot 3k+9 = 7\cdot 3k+7+2 = 7\cdot(3k+1)+2$, остаток 2. ◁

• Можно было бы просто взять $x = 3$, и получить все нужные ответы. Но это не совсем честно: мы пока не знаем (по крайней мере официально), что важен только остаток, а какое конкретно x с этим остатком, не важно. Но это так и есть, и понять это тоже легко: если мы к x прибавим 7, то и к $x+1$, и к $x-1$ прибавится 7, а к $2x$ и $3x$ прибавятся 14 и 21 (кратные 7, которые не меняют остатка).

3.9 Найдите остаток от деления числа 1828 на 10, на 100 и на 25.

▷ Тут не нужен калькулятор, помогает десятичная система счисления, в которой записаны числа. Число 1828 содержит 182 десятка и ещё 8 единиц, так что при делении на 10 остаётся 8. Точно так же там 18 сотен и ещё 28, так что при делении на 100 остаётся 28. При делении на 25 сотни разделятся нацело на четыре группы по 25, а из 28 получится $25 + 3$, так что при делении на 25 остаток будет 3. ◁

3.10* Рассмотрим числа от 1001 до 2000. Будем делить их на 7. Сколько из них разделятся без остатка? Какой остаток будет встречаться реже всего?

▷ Число $1001 = 7 \cdot 143$ делится на 7. Значит, остатки будут идти по циклу: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, ... Число 2002 тоже будет делиться на 7, так что последний цикл кончается в 2001. В этом цикле не будет числа 2001, которое даёт остаток 6, так что было поровну, а один остаток 6 забрали, и остаток 6 встречается реже всего. Циклов же будет 143 (с неполным последним). ◁

$\boxed{\textbf{3.11}}^*$ Подсчитайте (по возможности без бумажки), какой остаток даёт миллион при делении на 1000, на 999 и на 1001.

▷ На 1000 делится без остатка (миллион — тысяча тысяч). На 999 можно без остатка разделить 999 тысяч, оставшаяся тысяча даёт остаток 1. Делим на 1001: если разложить на 1000 куч по 1000, кучи будет неполными (недостаёт одного предмета в каждой) поэтому одну кучу можно пустить на пополнение 999 оставшихся и ещё один предмет останется. Можно также сообразить, что $999999 = 999 \cdot 1001$. ◁

$\boxed{\textbf{3.12}}$ Разрежем кусок бумаги на 5 частей. Затем одну из частей снова разрежем на пять частей, потом одну из частей (любую) разрежем на пять частей и так далее. Может ли после очередного разрезания получиться 34 части?

▷ Надо следить за числом частей при разрезании. Неважно, что мы разрезаем (начальный кусок, его части, части этих частей и т.п.), в любом случае число частей увеличивается на 4 (из одной части получается пять). То есть их будет $9, 13, \ldots$ — все эти числа дают остаток 1 при делении на 4. А число 34 даёт остаток 2 и тем самым невозможно (после 33 будет сразу 37). ◁

$\boxed{\textbf{3.13}}$ Число n даёт при делении на 143 остаток 24 и частное 13. Какой остаток оно будет давать при делении на 142? на 144?

• Разумеется, можно просто вычислить это самое n и поделить его на бумажке или с калькулятором. Но можно решить и в уме — как?

▷ Представим себе, что мы раскладывали на пачки по 143, получилось 13 пачек и осталось 24. Если из остатка добавить в каждую пачку по одной штуке, то в пачках будет 144 и останется $24 - 13 = 11$. Видим, что при делении на 144 остаток 11. Наоборот, если из каждой пачки забрать по одной штуке, то в пачках будет 142 и останется $24 + 13 = 37$. Это меньше одной пачки, так что 37 и будет остатком при делении на 142. ◁

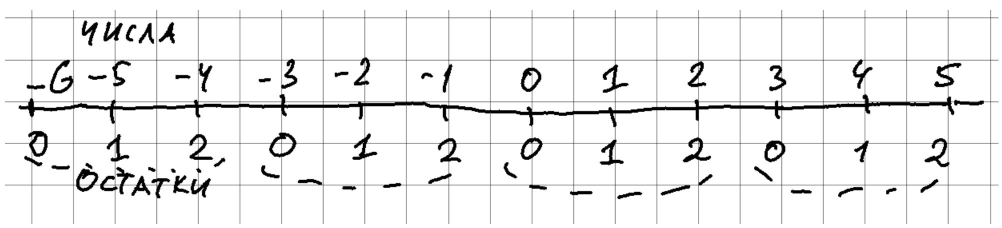
$\boxed{\textbf{3.14}}$ Отметьте на числовой оси числа, которые делятся на 3, затем числа, которые дают остаток 1 при делении на 3, а затем числа, которые дают остаток 2 при делении на 3. (Сделайте рисунок так, чтобы числа от -5 до 5 поместились.)

▷ Отметить числа, которые делятся на 3, несложно: они идут через два на третье, от нуля в ту и другую сторону ($0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots$). А вот два других вопроса требуют уточнения: как делить с остатком отрицательные числа?

Мы не дали определения на этот случай, так что вы имеете полное право протестовать и отказаться от решения этой задачи как нечётко поставленной. Скажем, как разделить -5 на 3 с остатком?

Связывать в пачки по три книги, которых минус пять, можно только при большой фантазии — и фантазировать можно по-разному. Одни скажут, что будет частное -1 и остаток -2 (каждый получит по минус одной книге, и ещё минус две книги останутся). Или в терминах долга: мы на троих должны были 5 рублей, каждый взял на себя долг в 1 рубль, а ещё два рубля долга остались неоплаченными.

Но можно сказать и иначе: частное -2 и остаток 1 (каждый берёт на себя долг в 2 рубля, и всего выплачиваем на рубль больше). Именно так деление отрицательных чисел с остатком обычно и определяется. Получаем такой ответ:



На рисунке видно, что числа, дающие остаток 1 при делении на 3 идут через два на третье (и положительные и отрицательные); аналогично для чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

Сказанное про деление отрицательных чисел можно сформулировать в виде определения. ◁

Определение. Пусть a, b — целые числа, причём $b > 0$. *Разделить a на b с остатком* означает найти такие целые числа q (*частное*) и r (*остаток*), что

- $a = q \cdot b + r$;
- $0 \leqslant r < b$.

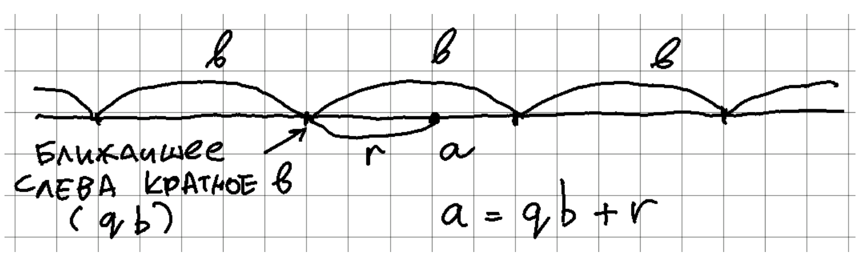
Обратите внимание, что число b должно быть положительным, а число a — не обязательно. Но даже если a отрицательно, то остаток r должен быть положительным (хотя частное q может быть и отрицательным).

3.15 Всегда ли возможно деление с остатком по такому определению? Определены ли частное и остаток однозначно (или может быть несколько вариантов, удовлетворяющих условиям)?

▷ Да, деление с остатком по этому определению всегда возможно и остаток и частное определены однозначно. Почему?

Для $a \geqslant 0$ существование такого разложения можно объяснить на книгах: связываем их в пачки по b, пока это можно. Сколько может остаться? если есть хотя бы b, то можно сделать ещё одну пачку, так что останется меньше b (но не меньше 0). Обозначим за q число пачек, а за r — число оставшихся книг, и видим, что все условия выполнены.

Но как быть с $a < 0$? Наглядно можно объяснить так: пометим на числовой оси точки, кратные b, и возьмём ближайшую точку слева от a (или само a, если оно кратно b). Эта точка кратна b, то есть равна qb для некоторого q. Чтобы получить из неё a, надо добавить к ней (то есть к bq) расстояние от bq до a, которое неотрицательно и меньше b (иначе точка не была бы ближайшей слева).



Другой вариант рассуждения: если $a < 0$, то прибавим к нему такое большое кратное b (пусть это будет kb), чтобы сумма $a' = a + kb$ стала неотрицательной. Для неотрицательных мы умеем делить с остатком, так что поделим a' на b:

$$a + kb = a' = q'b + r', \quad 0 \leqslant r' < b.$$

Тогда $a = (q' - k)b + r'$, так что можно взять $q = q' - k$, $r = r'$ и получить требуемое.

Однозначность: если $a = q_1 \cdot b + r_1 = q_2 \cdot b + r_2$ — два варианта, то $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) \cdot b$, поэтому $r_1 - r_2$ делится на b. Но оба числа r_1

и r_2 лежат на отрезке от 0 до $b - 1$, поэтому разность не больше $b - 1$ (расстояние между концами отрезка), и делиться на b она может, только есть она равна нулю. ◁

$\boxed{\textbf{3.16}}$ Учитель по ошибке написал второе условие в определении деления с остатком как $0 \leqslant r \leqslant b$. Останется ли утверждение предыдущей задачи верным для такого определения?

▷ Требование теперь более слабое (его легче выполнить), так что утверждение о существовании частного и остатка останется верным. Но единственности уже не будет: скажем, при делении 8 на 2 может быть частное 4 и остаток 0, а также частное 3 и остаток 2 (который по новому определению разрешён). ◁

$\boxed{\textbf{3.17}^*}$ Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если второе условие записать как $0 < r \leqslant b$?

▷ Останется, только числа, которые раньше давали остаток 0, теперь будут давать остаток b (а частное на единицу уменьшится по сравнению с обычным определением). ◁

$\boxed{\textbf{3.18}^*}$ Число 100 делят с остатком на целое положительное число, меньшее 100. Какой наибольший остаток может получиться?

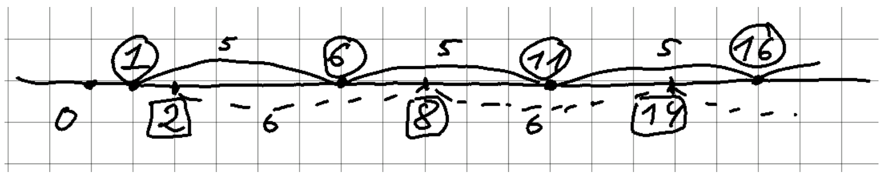
▷ Остаток не может быть больше делителя, так что делитель нужно выбирать побольше. Но если делитель близок к 100, то остаток тоже будет маленьким. Попробуем 51, тогда остаток 49. Может ли быть остаток больше? Если делитель 50 или меньше, то нет. Если 52 или больше, то остаётся до 100 только 48 или меньше, так что тоже не получится. Ответ: 49 (при делении на 51). ◁

$\boxed{\textbf{3.19}}$ Начав движение по кольцевой дороге длиной 120 км, машина проехала 500 км. Сколько раз она проезжала мимо места старта? (Сам старт не считается за проезд мимо старта.) Сколько километров она проехала после того, как была в точке старта в последний раз? Как это связано с делением с остатком?

▷ Движение по кольцевой дороге можно заменить на наматывание нитки на окружность. Если длина окружности 120, а нитки — 500, то будет четыре полных витка и ещё кусок длиной 20. ◁

• Вообще взятие остатка по модулю k — это, если можно так выразиться, наматывание числовой оси на окружность длины k.

3.20 Отметьте на числовой оси положительные числа, дающие остаток 1 при делении на 5. (С какими промежутками они идут?) Теперь отметьте другим цветом числа, дающие остаток 2 при делении на 6. Найдётся ли общее число (отмеченное двумя цветами)?

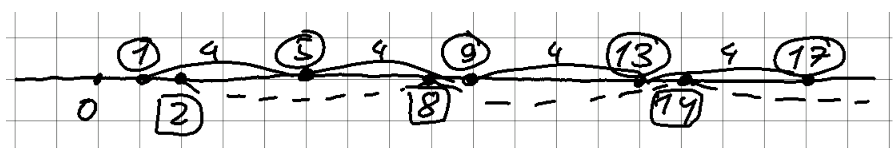


▷ Остаток 1 при делении на 5 дают числа $1, 6, 11, 21, 26, \ldots$; они идут с промежутком 5. (Говорят, что они образуют *арифметическую прогрессию с разностью* 5.)

Остаток 2 при делении на 6 дают числа $2, 8, 14, 20, 26, \ldots$. Видно, что есть общее число 26. ◁

• Если не ограничиваться положительными числами, то можно заметить общее число -4, и прибавить к нему 30, кратное и 5, и 6. Получится как раз 26.

3.21 Отметьте на числовой оси положительные числа, дающие остаток 1 при делении на 4. Теперь отметьте другим цветом числа, дающие остаток 2 при делении на 6. Найдётся ли общее число (отмеченное двумя цветами)?



▷ Можно долго рисовать соответствующие прогрессии на числовой оси, но пересечения всё не будет и не будет. И можно понять почему: числа вида $4k + 1$ нечётные, а числа вида $6k + 2$ — чётные. ◁

• Мы ещё вспомним эту задачу, когда будем обсуждать «китайскую теорему об остатках».

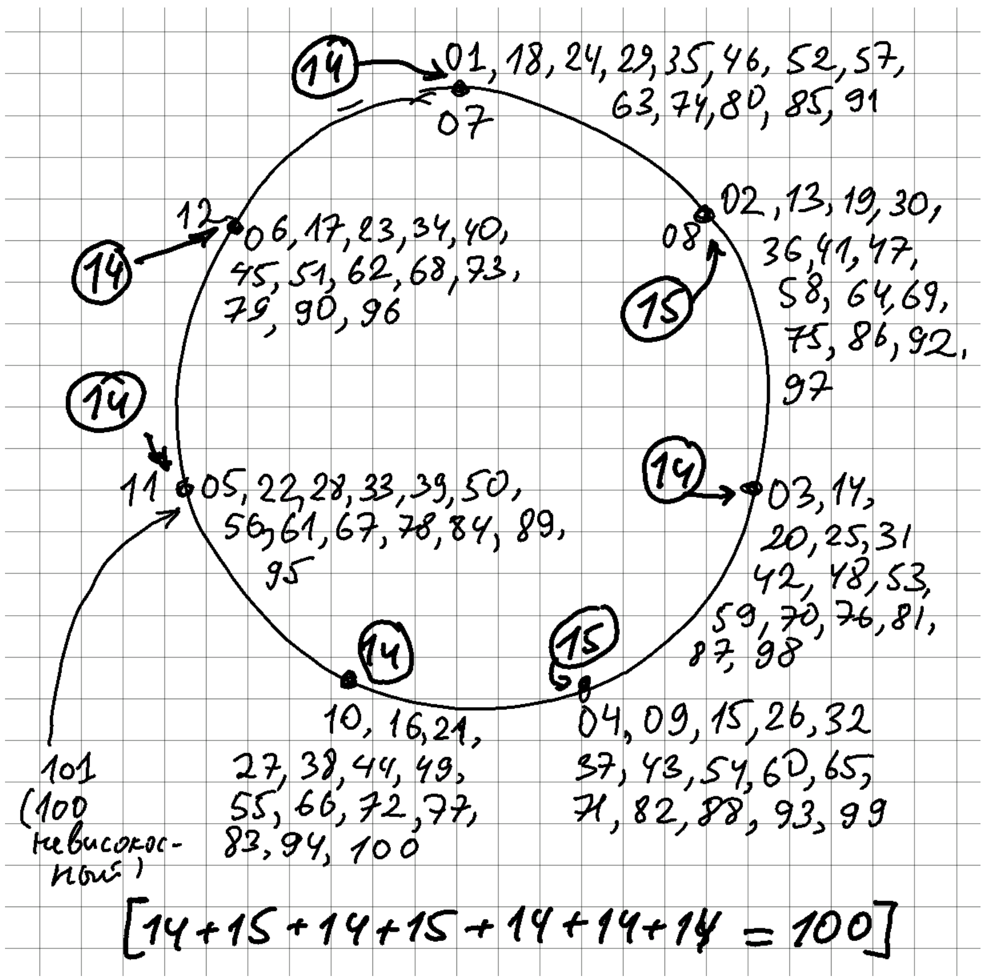
3.22* Если нынешний календарь (см. задачу 1) не будет меняться, на какие дни недели будет чаще всего приходиться новый год (1 января)?

▷ Как мы уже обсуждали, длина года повторяется с периодом 400 лет: високосные года — это те, которые делятся на 4, но не на 100, или уже тогда на

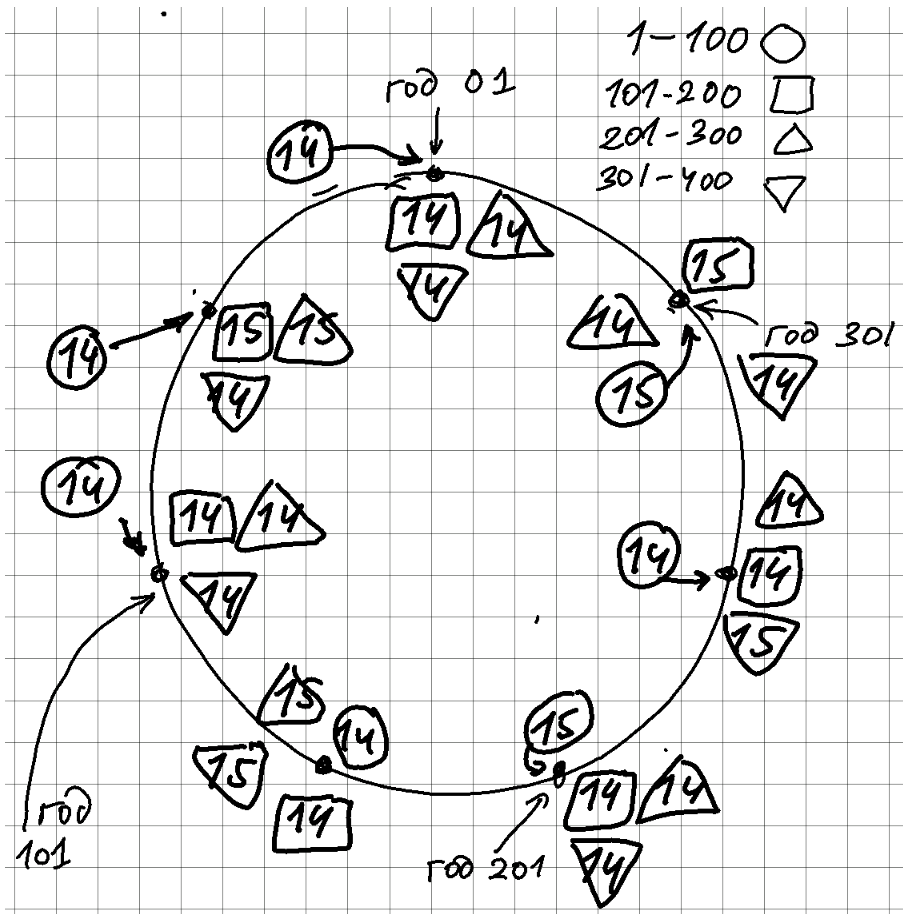
400. Оказывается, что общее число дней в этом периоде кратно 7. Проверим это: $365 \cdot 400$ обычных дней по модулю 7 даёт 400 mod 7, то есть 1. Ещё надо добавить 97 високосных лет ($= 100 - 4 + 1$), всего будет $1 + 97$ mod 7, то есть 0.

Таким образом, в следующем 400-летнем цикле всё будет повторяться — и потому важно понять, с каких дней недели чаще начинается год *в пределах одного цикла*.

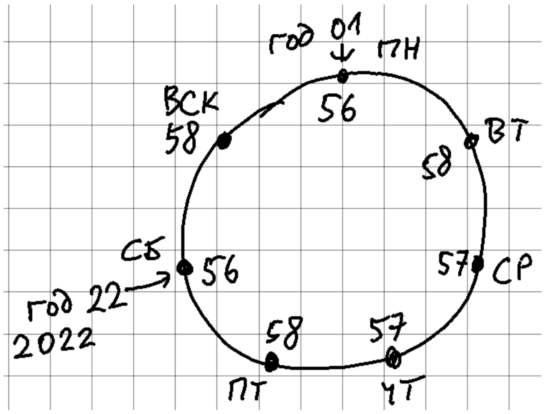
Нарисуем круг, изображающий дни недели по часовой стрелке, и выберем верхнюю точку как условное начало для 2001 года (или для первого года — вообразив, что тогда григорианский календарь уже был, хотя на самом деле он был введён папой Григорием в XVI веке).



Дальше будем расставлять года, учитывая, что невисокосный год сдвигает на 1, а високосный на 2 (так что три коротких шага по часовой стрелке чередуются с одним длинным). Отметим, на что придётся 2101 (или 101) год, и ещё запомним, что 2022 год начинается с того же дня. Затем посчитаем и обведём в жирный кружочек число лет в период 2001 — 2100, которые начинаются с соответствующего дня. Сами годы теперь можно забыть:



В три следующих столетия тот же цикл 14–15–14–15–14–14–14 будет начинаться с других дней (каждое столетие смещает на два дня против часовой стрелки). Напишем эти числа в квадратиках и треугольниках двух видов и сложим результаты за все четыре столетия цикла.



Остаётся вспомнить, где был 2022 год и что первого января 2022 была суббота (задача 1), и получается ответ: понедельники и субботы за цикл встречаются 56 раз, среды и четверги по 57 раз, а вторники, пятницы и воскресенья — 58 раз. (Проверим, кстати: $56 \cdot 2 + 57 \cdot 2 + 58 \cdot 3$ действительно равно 400.)

Так будет в каждом цикле, так что мы можем ответить на вопрос задачи: первое января чаще всего приходится на вторники, пятницы и воскресенья (в $58/400 = 14{,}4\%$ доле всех случаев). ◁

$\boxed{\textbf{3.23}^*}$ На столе лежат книги (больше одной и меньше 100). Если их связывать в пачки по 3, то останется одна книга. То же самое (останется одна книга), если связывать по 4, по 5 и по 6. Сколько книг лежит на столе? (Достаточно указать один вариант.)

▷ Если одну книгу временно отложить, то число оставшихся (по условию положительное) будет делиться на 2, 3, 4, 5, 6. Например, годится число 60, так что книг могло быть 61.

На самом деле ответ единственный: числа, делящиеся на 2 и 5, имеют последнюю цифру 0, а числа 10, 20, 30, 40, 50, 70, 80, 90 не подходят). ◁

$\boxed{\textbf{3.24}^*}$ На столе лежат книги (больше одной и меньше 500). Если их связывать в пачки по 3, то останется одна книга. То же самое (останется одна книга), если связывать по 4, по 5 и по 6. А если связывать по 7, то ни одной не останется (все разойдутся по пачкам). Сколько книг лежит на столе? (Достаточно указать один вариант.)

▷ Если одну книгу отложить, то должно получиться число, кратное 3, 4, 5, 6. Годится любое кратное 60. Значит, достаточно найти число вида $60k+1$, которое делится на 7. Такое число есть: $301 = 43 \cdot 7$. (На самом деле это единственная возможность: как мы увидим, общие кратные 3, 4, 5, 6 обязательно делятся на 60, а из чисел вида $60k+1$ до 500 подходит только 301, следующее будет $301+60\cdot 7 = 721$.) ◁

• Неполное частное (целое число, которое получается при делении с остатком) можно получить иначе: возьмём обычное частное (целое или дробь) и возьмём его *целую часть*. Скажем, $7/3 = 2\frac{1}{3}$, и здесь целая часть 2 (и остаётся $1/3 =$ остаток/делитель).

Целую часть можно определить как «округление вниз» до ближайшего (меньшего) целого числа. Её обозначают $\lfloor x \rfloor$, так что, скажем,

$$\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2\frac{1}{3} \right\rfloor = 2, \quad \text{но} \quad \left\lfloor -\frac{7}{3} \right\rfloor = \left\lfloor -2\frac{1}{3} \right\rfloor = -3.$$

Если число уже и так целое, то его целая часть равна самому этому числу.

3.25* Докажите, что для целых положительных чисел a, b, c всегда выполняется равенство

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor / c \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor.$$

▷ Как ни странно, это трудно объяснить строго и коротко одновременно. Кажется, проще всего сказать так: для целого k и произвольного x условия $k \leqslant x$ и $k \leqslant \lfloor x \rfloor$ равносильны (по определению целой части), поэтому для любого целого k можно написать цепочку эквивалентностей

$$k \leqslant \left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor / c \right\rfloor \Leftrightarrow k \leqslant \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor / c \Leftrightarrow kc \leqslant \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \Leftrightarrow kc \leqslant \frac{a}{b} \Leftrightarrow k \leqslant \frac{a}{bc} \Leftrightarrow k \leqslant \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor.$$

(мы пользуемся тем, что k и kc целые). А если у двух целых чисел одни и те же целые числа, их не превосходящие, то они равны (каждое не больше себя, и потому не больше другого). ◁

3.26 Докажите, что произведение любых 5 последовательных натуральных чисел делится на 5 (и вообще произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на k).

▷ Мы уже видели эту задачу при $k = 2$ и замечали, что из двух последовательных чисел всегда (ровно) одно чётное. Так и здесь: остатки идут по кругу, и их k штук, так что они заполнят весь круг (и один из остатков будет равен нулю). А если в произведении один сомножитель делится на k, то и всё произведение делится на k. ◁

• На самом деле произведение k последовательных натуральных чисел делится не только на k, но и на $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Например, произведение любых трёх подряд идущих чисел делится на 6 (=3!). Это можно доказать комбинаторно: $n(n-1)(n-2)/6$ равно числу способов выбрать из n человек трёх дежурных (и аналогично для k). Другой способ доказательства — считать простые множители, о которых мы говорим дальше.