0. Предисловие

Идеалом, конечно, являются просто
открытые для всех занятия по интересам,
где отбор осуществляется просто тем,
что более ленивые сами разбегутся.

А. Н. Колмогоров
о преподавании школьникам,
(из письма В. П. Эфроимсону,
опубликовал Оскар Шейнин)

Мы старались собрать задачи, которые традиционно решаются в «математических классах» (или, более официально, в «классах с углублённым изучением математики»). Сначала они довольно простые, но со временем доля сложных увеличивается. Некоторые более сложные (или не вполне по теме) задачи помечены звёздочками.

Мы советуем сначала попробовать решить задачу, не глядя в решение. Если получится — сравнить с решением (там могут быть и дополнительные комментарии). Если долго не получается, тоже можно подглядеть в решение и попытаться понять его идею и довести до конца (ну или прочитать полностью и разобраться).

В этом выпуске разбираются «задачи по комбинаторике»; в 2023–2024 годах эти задачи выкладывались (порциями) в социальных сетях по частям; были выложены также и видеоразборы большинства задач (см. таблицу в конце предисловия) — в качестве образцов «живой математической речи», со всеми оговорками, ошибками, повторами и т. п. (как обычно бывает, устный язык заметно отличается от письменного).

В подготовке текстов и видео участвовали: Руслан Ишкуватов, Татьяна Михайлова, Владимир Фок, Александр Шаповал, Александр Шень, Иван Яковлев.

* * *

Задачи, в которых требуется кого-то (или что-то) пересчитать, в школе называют «задачами по комбинаторике».[1] Конечно, если нужно по-

[1]Более подробное название — «перечислительная комбинаторика» (enumerative combinatorics).

считать буквы в русском алфавите[2] или картофелины в мешке, математика не поможет — надо взять и посчитать, ничего не поделаешь.

Но если нужно посчитать, сколько есть четырёхзначных чисел, цифры которых разные и идут в убывающем порядке (3210, 4210, 4310,..., 9876), уже не обязательно их все выписывать и пересчитывать. То же самое — если мы хотим узнать, сколько можно составить «слов» (не обязательно осмысленных) из пяти букв, имея три кубика с буквой А и два кубика с буквой Б и по-разному их располагая[3].

Мы разберём задачи подобного рода и способы их решения — по большей части несложные[4] — и начнём с совсем простых вопросов.

---

[2]На сегодняшний день (2023) в русском алфавите принято числить 33 буквы — хотя дело это не такое простое, как заметил Владимир Андреевич Успенский. Он обнаружил, что в одном и том же четвертом томе словаря русского языка в четырёх томах, выпущенного Институтом русского языка Академии наук СССР в 1984 году, буква «У» названа двадцатой буквой русского алфавита (с. 441), а буква «Э» — тридцать первой (с. 745). Понятно, в чём тут проблема и откуда она возникла? (В первом томе того же словаря приведён русский алфавит: «..., у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э,...».)

[3]Кстати, раз уж речь зашла о этих задачах: понятно ли, какое следующее число будет идти в этом списке за 4310 (в порядке возрастания) и какое число будет перед 9876? Или ещё: можете ли вы сказать, все ли варианты слов из пяти букв указаны в списке «БАБАА, АБААБ, АААББ, ББААА, БАААБ, ААББА, АББАА, БАБАА, БААБА»?

[4]Несмотря на свою репутацию: Лев Толстой в «Юности» писал «На экзамен математики я пришёл раньше обыкновенного. Я знал предмет порядочно, но было два вопроса из алгебры, которые я как-то утаил от учителя и которые мне были совершенно неизвестны. Это были, как теперь помню: теория сочетаний и бином Ньютона.» Это как раз два вопроса из гимназического курса алгебры, относящиеся к комбинаторике. В «Мастере и Маргарите» Булгакова Коровьев тоже говорит «Подумаешь, бином Ньютона!» — вероятно, имея в виду, что бином Ньютона дело сложное.

1. Начальные задачи	https://youtu.be/5Jf0g0nNl4U
дополнительные	https://youtu.be/Ajxb_ov7Kl0
2. Сложение и умножение	https://youtu.be/4TodqREEz2Q
дополнительные	https://youtu.be/CF4RmHkBFJ4
3. Рекуррентные формулы	https://youtu.be/GsOjciQ3cdc
дополнительные	https://youtu.be/WuyWr5t9vuw
4. Соответствия	https://youtu.be/OBQym5l-Bwg
дополнительные	https://youtu.be/HRIA9GL4JRE
5. Сочетания и бином Ньютона	https://youtu.be/rhHkVmKrIAY
дополнительные	https://youtu.be/hnp8vkTgIpM
6. Включения и исключения	https://youtu.be/fYYzBLn-uz8
7. Что дальше? (начало)	https://youtu.be/0ovJPofPUpI
(часть 2)	https://youtu.be/512d71kmhuY
Пентагональная теорема	https://youtu.be/8YlXeo9Bz9g

1. Начальные задачи

$\boxed{1.1}$ Напишем числа от 1 до 9, то есть $1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9$. Сколько их будет? Тот же вопрос для чисел от 1 до 99.

$\boxed{1.2}$ Напишем все двузначные числа от 10 до 99, то есть 10, 11, 12,..., 98, 99. Сколько их будет?

$\boxed{1.3}$ Сколько трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

$\boxed{1.4}$ На термометре есть деления от -50 до $+50$ градусов (через один градус: -50, -49,..., -2, -1, 0, 1, 2,..., 49, 50). Сколько всего там делений?

$\boxed{1.5}$ Сколько чисел в ряду 17, 18, 19,..., 122, 123? Сколько чисел в ряду -17, -16,..., -1, 0, 1,..., 122, 123. Какая будет общая формула для количества чисел от m до n? (Сами m и n тоже включаются в этот ряд $m \ldots n$; мы считаем, что $m \leqslant n$.)

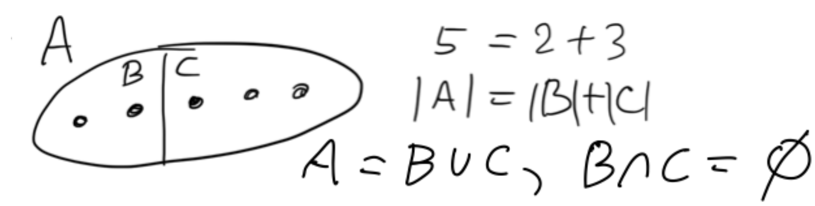
• Поначалу хочется сказать, что от m до n будет $n-m$ чисел — подобно тому, как от пятого километрового столба до двенадцатого будет $12-5=7$ километров, а между пятым и двенадцатым днём рождения пройдёт 7 лет. Но это не так — и эта ошибка даже имеет специальное название в программировании: “off-by-one error” (ошибка на единицу). Примерно ту же ошибку допустили те, кто считали, что третье тысячелетие началось в 2000 году: если считать, что первый год первого тысячелетия имел номер 1, то последний год второго тысячелетия имел номер 2000, а первый год третьего — 2001.

$\boxed{1.6}$ Человек поднимается с первого этажа на пятый за минуту. Сколько ему понадобится времени, чтобы с той же скоростью подняться с первого на десятый этаж?

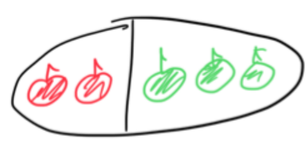
• В этих подсчётах мы используем сложение и вычитание. Если в мешке есть красные и зелёные яблоки (и только), можно подсчитать отдельно число тех и других, а потом сложить эти числа и получить общее число яблок. Наоборот, если мы знаем общее число яблок в мешке, а также число красных яблок, то можно получить число зелёных яблок вычитанием. То же самое и в наших примерах: мы делили числа $1, \ldots, 99$ на две части: однозначные[5] от 1 до 9 и двузначные от 10 до 99. В первой группе 9 чисел, а всего чисел 99, так что во второй группе $99-9=90$ чисел.

[5]Считать ли нуль (0) однозначным числом? Тут есть разные мнения: иногда говорят, что нуль однозначное число, потому что только одна цифра 0. Иногда однозначные числа начинают с 1 (и в этом тоже есть своя логика, потому что в других числах цифра нуль в начале не пишется). Мы будем это всегда оговаривать, чтобы не было путаницы.

▷ Математики говорят, что *множество* всех чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ является *объединением* двух *непересекающихся подмножеств* $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ и $\{10, 11, \ldots, 99\}$ и потому число элементов в нём равно сумме чисел элементов в этих подмножествах, и что это — определение сложения. Вообще, если конечное множество A есть объединение двух непересекающихся множеств B и C, то число элементов в A равно сумме числа элементов в B и C. На картинке можно это изобразить так:



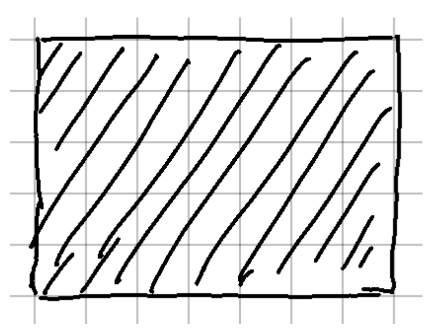
Здесь через $|A|$ обозначается число элементов в множестве A, через $B \cup C$ обозначается *объединение* множеств B и C (в которое входят те элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств B и C, через $B \cap C$ обозначается *пересечение* множеств B и C (те элементы, которые входят и в B, и в C), а $\varnothing$ — *пустое множество* (в котором нет элементов), так что $B \cap C = \varnothing$ означает, что в B и C нет общих элементов.



Впрочем, за всеми этими терминами скрываются те же самые красные и зелёные яблоки в мешке. ◁

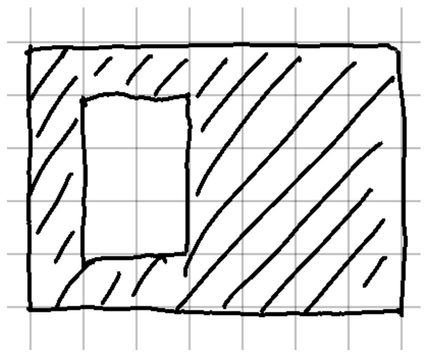
Иногда полезно не складывать, а умножать.

1.7 Сколько клеток попало в прямоугольник на рисунке?

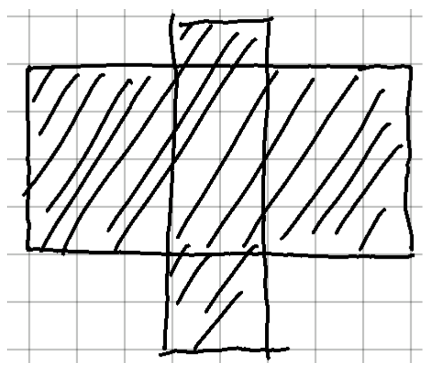


▷ Отсюда видно, что перестановка множителей не меняет произведения — как говорят математики, умножение *коммутативно* ($ab = ba$), равно как и сложение ($a + b = b + a$). ◁

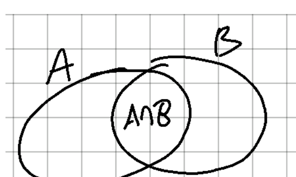
$\boxed{\textbf{1.8}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



$\boxed{\textbf{1.9}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



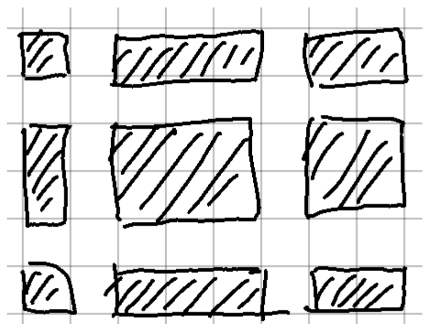
▷ Математики называют этот способ подсчёта *формулой включения и исключения*: чтобы подсчитать общее число элементов в в двух пересекающихся множествах, можно сложить числа элементов и вычесть элементы, посчитанные дважды.



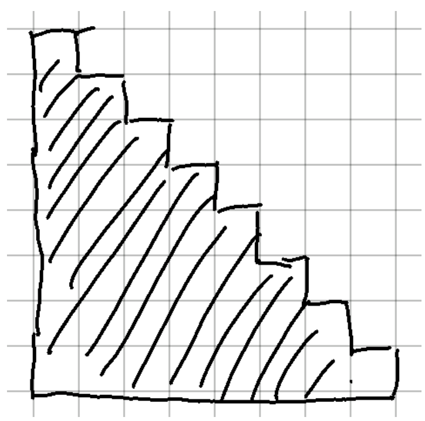
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Мы ещё вернёмся к этой формуле (и к её вариантам для большего числа множеств) в разделе 6. ◁

$\boxed{\textbf{1.10}^*}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



$\boxed{\textbf{1.11}^*}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



$\boxed{\textbf{1.12}}$ Числа от 1 до 100 поделили на нечётные $(1, 3, 5, 7, \ldots, 99)$ и чётные $(2, 4, 6, \ldots, 100)$. Сколько получилось чётных чисел?

▷ Математики говорят, что группировка нечётных и чётных чисел в пары задаёт *взаимно однозначное соответствие* между чётными и нечётными числами (среди $1 \ldots 100$). А если между множествами есть взаимно однозначное соответствие, то в них поровну элементов. ◁

Мы разобрали некоторые приёмы решения задач, к которым ещё вернёмся более подробно. А сейчас несколько более сложных задач — если они поначалу покажутся трудными, то ничего страшного.

$\boxed{\textbf{1.13}^*}$ Сколько есть двузначных чисел, в записи которых не используется цифра 0? Сколько есть двухзначных чисел, в записи которых используются только нечётные цифры (1, 3, 5, 7, 9)?

$\boxed{\textbf{1.14}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько цифр 7 при этом будет использовано? (Другими словами, сколько раз нам понадобится нажать на клавишу 7, набирая все эти числа на компьютере?)

$\boxed{\textbf{1.15}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько из них используют цифру 7 в своей записи? (Понятно, чем эта задача отличается от предыдущей?)

$\boxed{\textbf{1.16}^*}$ Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 3 нацело? (Это каждое третье число: 3, 6, 9, 12 и так далее.)