0. Предисловие

Идеалом, конечно, являются просто
открытые для всех занятия по интересам,
где отбор осуществляется просто тем,
что более ленивые сами разбегутся.

А. Н. Колмогоров
о преподавании школьникам,
(из письма В. П. Эфроимсону,
опубликовал Оскар Шейнин)

Мы старались собрать задачи, которые традиционно решаются в «математических классах» (или, более официально, в «классах с углублённым изучением математики»). Сначала они довольно простые, но со временем доля сложных увеличивается. Некоторые более сложные (или не вполне по теме) задачи помечены звёздочками.

Мы советуем сначала попробовать решить задачу, не глядя в решение. Если получится — сравнить с решением (там могут быть и дополнительные комментарии). Если долго не получается, тоже можно подглядеть в решение и попытаться понять его идею и довести до конца (ну или прочитать полностью и разобраться).

В этом выпуске разбираются «задачи по комбинаторике»; в 2023–2024 годах эти задачи выкладывались (порциями) в социальных сетях по частям; были выложены также и видеоразборы большинства задач (см. таблицу в конце предисловия) — в качестве образцов «живой математической речи», со всеми оговорками, ошибками, повторами и т. п. (как обычно бывает, устный язык заметно отличается от письменного).

В подготовке текстов и видео участвовали: Руслан Ишкуватов, Татьяна Михайлова, Владимир Фок, Александр Шаповал, Александр Шень, Иван Яковлев.

* * *

Задачи, в которых требуется кого-то (или что-то) пересчитать, в школе называют «задачами по комбинаторике».[1] Конечно, если нужно по-

[1]Более подробное название — «перечислительная комбинаторика» (enumerative combinatorics).

считать буквы в русском алфавите[2] или картофелины в мешке, математика не поможет — надо взять и посчитать, ничего не поделаешь.

Но если нужно посчитать, сколько есть четырёхзначных чисел, цифры которых разные и идут в убывающем порядке (3210, 4210, 4310,..., 9876), уже не обязательно их все выписывать и пересчитывать. То же самое — если мы хотим узнать, сколько можно составить «слов» (не обязательно осмысленных) из пяти букв, имея три кубика с буквой А и два кубика с буквой Б и по-разному их располагая[3].

Мы разберём задачи подобного рода и способы их решения — по большей части несложные[4] — и начнём с совсем простых вопросов.

---

[2]На сегодняшний день (2023) в русском алфавите принято числить 33 буквы — хотя дело это не такое простое, как заметил Владимир Андреевич Успенский. Он обнаружил, что в одном и том же четвертом томе словаря русского языка в четырёх томах, выпущенного Институтом русского языка Академии наук СССР в 1984 году, буква «У» названа двадцатой буквой русского алфавита (с. 441), а буква «Э» — тридцать первой (с. 745). Понятно, в чём тут проблема и откуда она возникла? (В первом томе того же словаря приведён русский алфавит: «..., у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э,...».)

[3]Кстати, раз уж речь зашла о этих задачах: понятно ли, какое следующее число будет идти в этом списке за 4310 (в порядке возрастания) и какое число будет перед 9876? Или ещё: можете ли вы сказать, все ли варианты слов из пяти букв указаны в списке «БАБАА, АБААБ, АААББ, ББААА, БАААБ, ААББА, АББАА, БАБАА, БААБА»?

[4]Несмотря на свою репутацию: Лев Толстой в «Юности» писал «На экзамен математики я пришёл раньше обыкновенного. Я знал предмет порядочно, но было два вопроса из алгебры, которые я как-то утаил от учителя и которые мне были совершенно неизвестны. Это были, как теперь помню: теория сочетаний и бином Ньютона.» Это как раз два вопроса из гимназического курса алгебры, относящиеся к комбинаторике. В «Мастере и Маргарите» Булгакова Коровьев тоже говорит «Подумаешь, бином Ньютона!» — вероятно, имея в виду, что бином Ньютона дело сложное.

1. Начальные задачи	https://youtu.be/5Jf0g0nNl4U
дополнительные	https://youtu.be/Ajxb_ov7Kl0
2. Сложение и умножение	https://youtu.be/4TodqREEz2Q
дополнительные	https://youtu.be/CF4RmHkBFJ4
3. Рекуррентные формулы	https://youtu.be/GsOjciQ3cdc
дополнительные	https://youtu.be/WuyWr5t9vuw
4. Соответствия	https://youtu.be/OBQym5l-Bwg
дополнительные	https://youtu.be/HRIA9GL4JRE
5. Сочетания и бином Ньютона	https://youtu.be/rhHkVmKrIAY
дополнительные	https://youtu.be/hnp8vkTgIpM
6. Включения и исключения	https://youtu.be/fYYzBLn-uz8
7. Что дальше? (начало)	https://youtu.be/0ovJPofPUpI
(часть 2)	https://youtu.be/512d71kmhuY
Пентагональная теорема	https://youtu.be/8YlXeo9Bz9g

1. Начальные задачи

$\boxed{\textbf{1.1}}$ Напишем числа от 1 до 9, то есть $1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9$. Сколько их будет? Тот же вопрос для чисел от 1 до 99.

$\triangleright$ Можно все их написать: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ — и начать их считать: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять. Видно, что мы просто называем числа по очереди, поэтому всего насчитаем 9 чисел.

Теперь ясно, что для чисел от 1 до 99 будет то же самое, и их всего 99 штук. $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{1.2}}$ Напишем все двузначные числа от 10 до 99, то есть 10, 11, 12,..., 98, 99. Сколько их будет?

$\triangleright$ Можно считать их по десяткам, разбив на группы по первой цифре: от 10 до 19 будет десять чисел, столько же от 20 до 29, от 30 до 39,..., от 90 до 99, то есть девять десятков (90).

Но проще сделать так: у нас есть 99 чисел от 1 до 99, из них мы выбросили 9 чисел от 1 до 9 (см. предыдущую задачу), останется $99 - 9 = 90$ чисел. $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{1.3}}$ Сколько трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

$\triangleright$ Если добавить 99 чисел от 1 до 99, то получится 999 чисел от 1 до 999, так что трёхзначных чисел $999 - 99 = 900$. (Можно также заметить, что они разбиваются по первой цифре на девять сотен.) $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{1.4}}$ На термометре есть деления от -50 до $+50$ градусов (через один градус: $-50, -49, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 49, 50$). Сколько всего там делений?

$\triangleright$ Есть 50 делений с положительными температурами (от 1 до 50), столько же отрицательных (от -1 до -50), и ещё нуль, всего $50 + 50 + 1 = 101$. $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{1.5}}$ Сколько чисел в ряду 17, 18, 19,..., 122, 123? Сколько чисел в ряду $-17, -16, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 122, 123$. Какая будет общая формула для количества чисел от m до n? (Сами m и n тоже включаются в этот ряд $m \ldots n$; мы считаем, что $m \leqslant n$.)

$\triangleright$ Из 123 чисел $1, 2, \ldots, 123$ надо вычесть 16 чисел $1, 2, \ldots, 16$, получится $123 - 16 = 107$ чисел. Второй вопрос: к 123 числам $1, 2, \ldots, 123$ надо добавить 17 чисел $-1, -2, \ldots, -17$ и ещё нуль, получится $123 + 17 + 1 = 141$ число.

В обоих случаях годится такая формула: в ряду чисел $m, m+1, \dots, n$ всего $n-m+1$ чисел. В первом случае $m=17$, $n=123$ и мы вычитали $m-1$ из n, получалось $n-m+1$. Во втором случае $m=-k$ для $k=17$, мы добавляли k чисел и ещё одно число к n числам, получалось $n+k+1=n+(-m)+1=n-m+1$ число. Можно аналогично рассмотреть и случаи, когда одно из чисел m, n равно нулю или оба отрицательны, и убедиться, что эта формула годится для любых $m \leqslant n$.

Формулу $n-m+1$ можно объяснить ещё и так: при $n=m$ она даёт единственное число, как и требуется. Если же теперь увеличить n на 1, то одно число справа добавится, и одновременно ответ $n-m+1$ по формуле увеличится на 1, так что он останется верным. И то же самое будет при дальнейшем увеличении числа n. ◁

• Поначалу хочется сказать, что от m до n будет $n-m$ чисел — подобно тому, как от пятого километрового столба до двенадцатого будет $12-5=7$ километров, а между пятым и двенадцатым днём рождения пройдёт 7 лет. Но это не так — и эта ошибка даже имеет специальное название в программировании: “off-by-one error” (ошибка на единицу). Примерно ту же ошибку допустили те, кто считали, что третье тысячелетие началось в 2000 году: если считать, что первый год первого тысячелетия имел номер 1, то последний год второго тысячелетия имел номер 2000, а первый год третьего — 2001.

1.6 Человек поднимается с первого этажа на пятый за минуту. Сколько ему понадобится времени, чтобы с той же скоростью подняться с первого на десятый этаж?

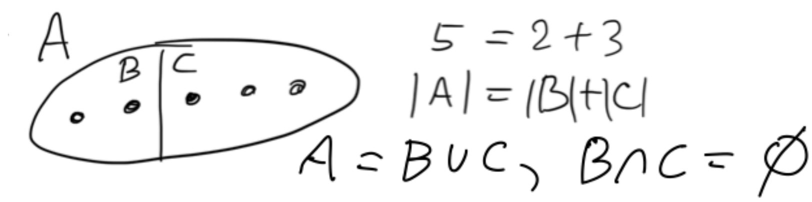
▷ Хочется сказать — две минуты, потому что 10 в два раза больше 5. Однако в первом случае ему придётся пройти $4=5-1$ пролёта, а во втором $9=10-1$ пролётов, так что правильный ответ 9/4 минуты, или 2 минуты и 15 секунд. ◁

• В этих подсчётах мы используем сложение и вычитание. Если в мешке есть красные и зелёные яблоки (и только), можно подсчитать отдельно число тех и других, а потом сложить эти числа и получить общее число яблок. Наоборот, если мы знаем общее число яблок в мешке, а также число красных яблок, то можно получить число зелёных яблок вычитанием. То же самое и в наших примерах: мы делили числа $1, \dots, 99$ на две части: однозначные[5] от 1 до 9 и дву-

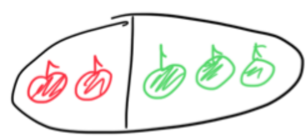
[5] Считать ли нуль (0) однозначным числом? Тут есть разные мнения: иногда говорят, что нуль однозначное число, потому что только одна цифра 0. Иногда однозначные числа начинают с 1 (и в этом тоже есть своя логика, потому что в других числах цифра нуль в начале не пишется). Мы будем это всегда оговаривать, чтобы не было путаницы.

значные от 10 до 99. В первой группе 9 чисел, а всего чисел 99, так что во второй группе $99 - 9 = 90$ чисел.

▷ Математики говорят, что *множество* всех чисел $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ является *объединением* двух *непересекающихся подмножеств* $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ и $\{10, 11, \dots, 99\}$ и потому число элементов в нём равно сумме чисел элементов в этих подмножествах, и что это — определение сложения. Вообще, если конечное множество A есть объединение двух непересекающихся множеств B и C, то число элементов в A равно сумме числа элементов в B и C. На картинке можно это изобразить так:



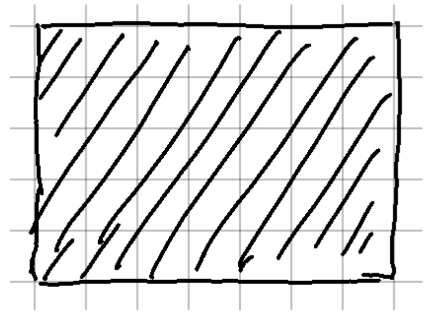
Здесь через $|A|$ обозначается число элементов в множестве A, через $B \cup C$ обозначается *объединение* множеств B и C (в которое входят те элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств B и C, через $B \cap C$ обозначается *пересечение* множеств B и C (те элементы, которые входят и в B, и в C), а $\varnothing$ — *пустое множество* (в котором нет элементов), так что $B \cap C = \varnothing$ означает, что в B и C нет общих элементов.



Впрочем, за всеми этими терминами скрываются те же самые красные и зелёные яблоки в мешке. ◁

Иногда полезно не складывать, а умножать.

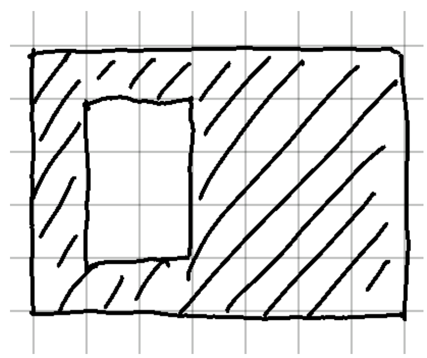
$\boxed{\textbf{1.7}}$ Сколько клеток попало в прямоугольник на рисунке?



▷ Можно посчитать все клетки, это не так долго, получится 35. Но можно и заметить, что в каждом столбце 5 клеток, а всего столбцов 7, получается $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5 = 35$. Или — что в каждой строке 7 клеток, а строк 5, получается $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$ (тот же самый ответ при другом способе подсчёта). ◁

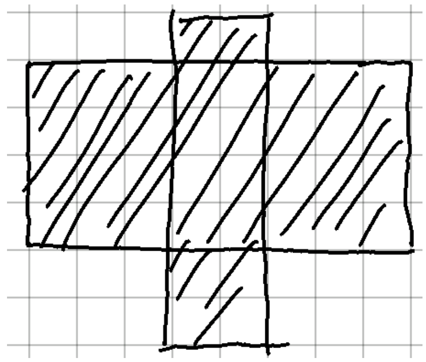
▷ Отсюда видно, что перестановка множителей не меняет произведения — как говорят математики, умножение *коммутативно* ($ab = ba$), равно как и сложение ($a + b = b + a$). ◁

1.8 Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



▷ Тут проще всего считать так: из прямоугольника как в предыдущей задаче вырезали прямоугольник 3×2, то есть шесть клеток надо вычесть). Получается $5 \times 7 - 3 \times 2 = 35 - 6 = 29$. ◁

1.9 Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?

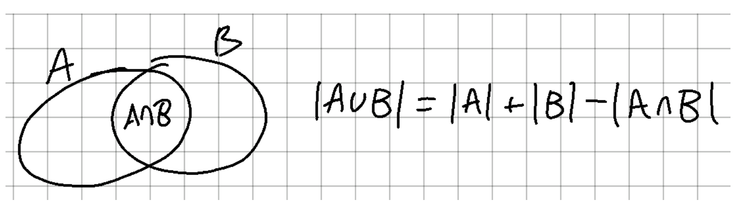


▷ Тут можно считать по-разному. Можно посчитать отдельно в каждом из пяти прямоугольников, на которые разрезается эта фигура, и получить

$$4 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times 2 + 4 \times 3 = 12 + 2 + 8 + 4 + 12 = 38.$$

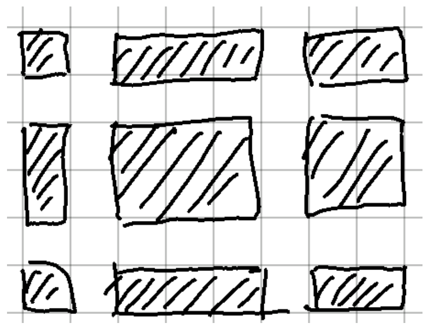
Но можно немного сократить вычисления, если рассуждать так: на рисунке есть два пересекающихся прямоугольника из $4 \times 8 = 32$ клеток и $7 \times 2 = 14$ клеток. Если мы сложим эти количества ($32 + 14 = 46$), то каждую клетку в прямоугольнике 4×2 посчитаем дважды, поэтому эти клетки (их $4 \times 2 = 8$) надо вычесть, получится $32 + 14 - 8 = 38$ клеток. ◁

▷ Математики называют этот способ подсчёта *формулой включения и исключения*: чтобы подсчитать общее число элементов в в двух пересекающихся множествах, можно сложить числа элементов и вычесть элементы, посчитанные дважды.



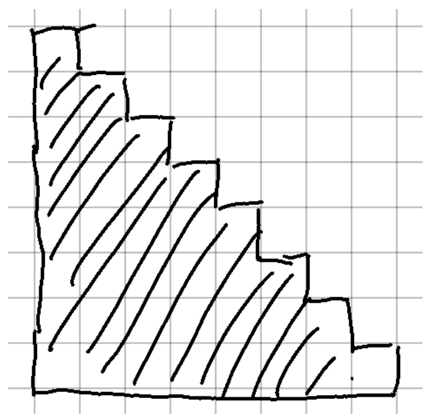
Мы ещё вернёмся к этой формуле (и к её вариантам для большего числа множеств) в разделе 6. ◁

$\boxed{\textbf{1.10}^*}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



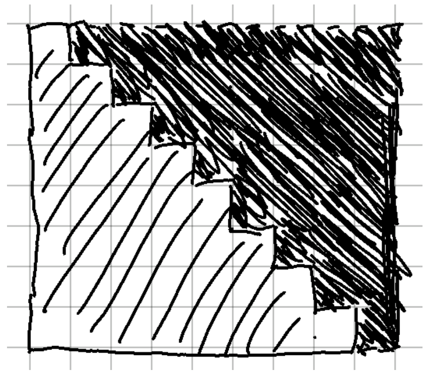
▷ Неважно, что столбцы (как и строки) теперь не сплошные: у нас есть 6 «столбцов» по 4 клетки в каждом, всего 24 клетки. (Можно было бы насчитать и четыре несплошных «строки» по 6 клеток в каждой.) ◁

$\boxed{\mathbf{1.11}^*}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



▷ Можно посчитать по строкам: в верхней одна клетка, потом две, потом три, и так далее до восьми, так что всего $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ клеток.

Но можно сэкономить на вычислениях, если пририсовать вторую такую же фигуру. В ней то же число клеток (просто вверх ногами), а вместе они дают прямоугольник 8×9, как видно на рисунке.



Так что ответ будет $8 \times 9/2 = 36$ (естественно, тот же самый). ◁

• Такую же картинку из двух частей можно нарисовать для лестниц любого размера, так что

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

На это соединение двух картинок можно смотреть и алгебраически:

$$\begin{aligned}2(1 + 2 + \ldots + n) &= (1 + \quad 2 \quad + \quad \ldots \quad + n) + \\ &+ (n + (n-1) + \ldots + 1) = \\ &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)\end{aligned}$$

(в каждой из сумм с многоточиями n слагаемых).

1.12 Числа от 1 до 100 поделили на нечётные $(1, 3, 5, 7, \ldots, 99)$ и чётные $(2, 4, 6, \ldots, 100)$. Сколько получилось чётных чисел?

▷ Нечётные и чётные числа можно сгруппировать в пары: 1 и 2, потом 3 и 4, потом 5 и 6,…— в каждой паре первое число нечётное, а второе чётное. Последняя пара будет 99 и 100. Значит, нечётных и чётных чисел поровну, а всего чисел 100 — будет 50 пар, то есть 50 нечётных и 50 чётных чисел. ◁

▷ Математики говорят, что группировка нечётных и чётных чисел в пары задаёт *взаимно однозначное соответствие* между чётными и нечётными числами (среди 1 … 100). А если между множествами есть взаимно однозначное соответствие, то в них поровну элементов. ◁

Мы разобрали некоторые приёмы решения задач, к которым ещё вернёмся более подробно. А сейчас несколько более сложных задач — если они поначалу покажутся трудными, то ничего страшного.

$\boxed{\mathbf{1.13}^*}$ Сколько есть двузначных чисел, в записи которых не используется цифра 0? Сколько есть двухзначных чисел, в записи которых используются только нечётные цифры $(1, 3, 5, 7, 9)$?

$\triangleright$ На первом месте может стоять одна из цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$, так что интересующие нас двузначные числа делятся на 9 групп. В каждой группе 9 чисел (поскольку на втором месте может стоять одна из цифр $1, 2, \ldots, 9$), итого $9 \times 9 = 81$ число. Второй вопрос: есть 5 групп (для разряда десятков есть 5 вариантов) и в каждой группе 5 чисел (5 вариантов для разряда единиц), получается $5 \times 5 = 25$. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{1.14}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько цифр 7 при этом будет использовано? (Другими словами, сколько раз нам понадобится нажать на клавишу 7, набирая все эти числа на компьютере?)

$\triangleright$ Давайте немного изменим задачу, считая, что мы будем набирать числа $00, 01, \ldots, 09, 10, 11, \ldots, 19, \ldots, 98, 99$ (число 100 не использует цифру 7, и от добавления нулей вначале тоже число семёрок не изменится). Сколько раз мы используем цифру 7? Отдельно подсчитаем, сколько раз мы её используем в разряде десятков. Всего чисел 100, и в разряде десятков может стоять любая из цифр $0, 1, 2, \ldots 9$ (вместе с десятью возможными цифрами в разряде единиц). Значит, все цифры в разряде десятков встречаются одинаково часто, так что цифра 7 встретится 10 раз. По тем же причинам в разряде единиц она встретится 10 раз (вместе с десятью возможными цифрами в разряде десятков). Всего получается 20 раз. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{1.15}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько из них используют цифру 7 в своей записи? (Понятно, чем эта задача отличается от предыдущей?)

$\triangleright$ Эта задача отличается тем, что мы теперь считаем не цифры 7, а те числа, в которых они встречаются. Собственно, разницы почти нет — если не считать число 77, в котором две цифры 7 (в остальных нуль или одна). Значит, теперь нам надо считать 77 один раз, получаем 19 вместо 20. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{1.16}^*}$ Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 3 нацело? (Это каждое третье число: 3, 6, 9, 12 и так далее.)

$\triangleright$ Можно поделить числа на группы по три: $1, 2, 3$, затем $4, 5, 6$, затем $7, 8, 9$ и так далее. В каждой тройке одно число (последнее) делится на 3 нацело. Последняя тройка будет $97, 98, 99$, потом ещё останется число 100 (которое считать не надо, оно на 3 не делится). Всего троек $99/3 = 33$, в каждой по одному делящемуся на 3 числу, так что искомых чисел будет 33.

Можно сказать и так: нас интересуют числа вида $3n$ при $1 \leqslant 3n \leqslant 100$ (и при целых n). Неравенство можно переписать как $\frac{1}{3} \leqslant n \leqslant 33\frac{1}{3}$, и целые решения тут будут $1, 2, 3, \ldots, 33$, всего 33 варианта. $\triangleleft$

• Тем же способом получаем, что количество чисел от 1 до целого положительного n, делящихся на целое положительное k, равно $\lfloor n/k \rfloor$ (целой части n/k, то есть дроби n/k, округлённой вниз до ближайшего целого).