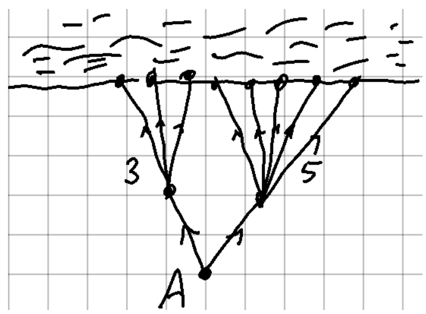
2. Сложение и умножение

Мы уже видели, что при подсчётах количеств полезно складывать и умножать. Вот ещё несколько задач такого рода.

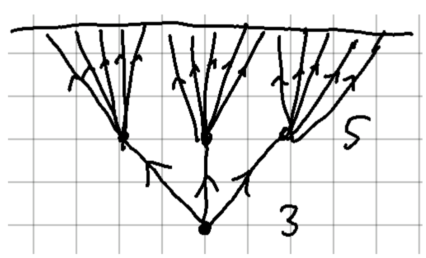
2.1 Из точки A к берегу ведут две дороги. Первая разветвляется на три, а вторая на пять. Сколькими способами можно пройти из A к берегу? (Идти обратно, удаляясь от берега, нельзя.)



▷ Все дороги можно посчитать — их восемь (на рисунке показаны места, где они упираются в берег). А можно просто сложить 3 и 5 и получить тот же ответ. ◁

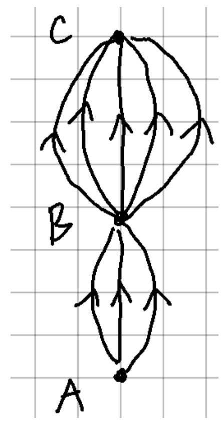
- Мы привели эту (очевидную) задачу, чтобы сравнить её со следующей.

2.2 Из точки A к берегу ведут три дороги. Каждая из них разветвляется на 5 (и дальше дороги доходят до берега, не пересекаясь). Сколькими способами можно пройти из A к берегу?



▷ Здесь надо не складывать 3 и 5, а умножать: $3 \times 5 = 15$. В самом деле, пути делятся на три группы (в зависимости от того, куда мы пошли сначала). В каждой группе пять путей (отличающихся после развилки). Всего получается $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$. ◁

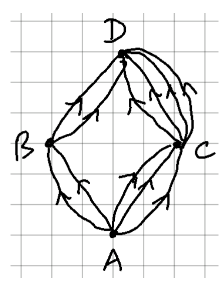
$\boxed{2.3}$ Из точки A в точку B ведут три дороги, а из точки B в точку C ведут пять дорог. Сколько есть способов добраться из A в C через B? (Возвращаться обратно нельзя.)



▷ И здесь нужно перемножить 3 и 5, даже рассуждение можно почти буквально повторить. Пути из A в C (через B) делятся на три группы, в зависимости от того, как мы шли из A в B. В каждой группе пять путей (отличающихся выбором на втором этапе). Всего получается $3 \times 5 = 15$. ◁

В некоторых задачах полезно и складывать, и умножать.

$\boxed{2.4}$ Сколькими способами можно пройти из A в D? Можно идти и через B, и через C, но возращаться нельзя (дороги односторонние, как показано стрелками).



▷ Здесь все пути делятся на две группы: через B и через C. Надо подсчитать количество путей в каждой группе и потом сложить. Для каждой группы мы приходим к предыдущей задаче. Всего получится: 2×2 (через B) и 3×4 (через C), так что общее число $2 \times 2 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$. ◁

• Представление разных вариантов в виде «путей» может быть полезно и в задачах, где изначально речи о путях нет.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Сколько «слов» (осмысленных и бессмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове `КОТ`?

• Можно представить себе, что буквы `К`, `О` и `Т` написаны на трёх кубиках, из которых мы составляем трёхбуквенное слово. Скажем, можно составить слова `ТОК` или `КТО`. Спрашивается, сколько разных слов (включая исходное слово `КОТ`) можно составить таким образом.

▷ Вариантов не так много, и их можно все перечислить:

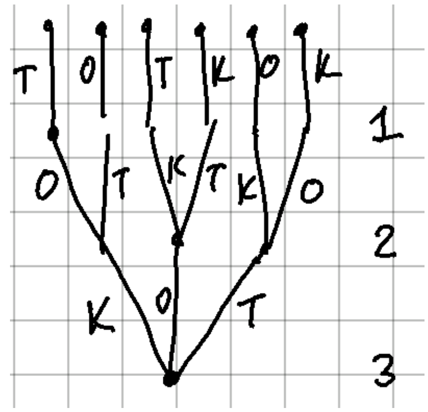
`КОТ`, `ТОК`, `КТО`, `ОТК`, `ОКТ`, `ТКО`.

Ответ: 6 «слов».

Можно ли на этом закончить решение? Придирчивый экзаменатор спросит: ну хорошо, вот вы перечислили шесть слов, но, может быть, какое-то ещё пропустили, и на самом деле их больше? Мы, конечно, можем ответить «ничего мы не пропустили — какое слово мы пропустили?!» — но экзаменатор на это скажет, что «бремя доказательства» лежит на решающем задачу: это мы должны доказать, что ничего не пропущено. Как это можно сделать?

Полезно перебирать слова более систематически. Посмотрим на первую букву. На первом месте может стоять буква `К`, буква `О` и буква `Т`. Поэтому все слова делятся на три группы: начинающиеся с `К`, с `О` и с `Т`. Пусть, скажем, с `К`. Осталось две буквы, и на второе место можно поставить любою из них — `О` или `Т`. Когда буква для второго места выбрана, дальше вариантов нет: осталась одна буква, которую только и можно поставить на третье место. Значит, на `К` есть два слова: `КОТ` и `КТО`. На `О` есть два слова `ОКТ` и `ОТК`, на `Т` есть два слова `ТКО` и `ТОК`. Всего получается 6 слов и вот теперь уже видно, что мы ни одной возможности не пропустили.

На картинке наши последовательные выборы можно изобразить как движение по «дереву вариантов»:



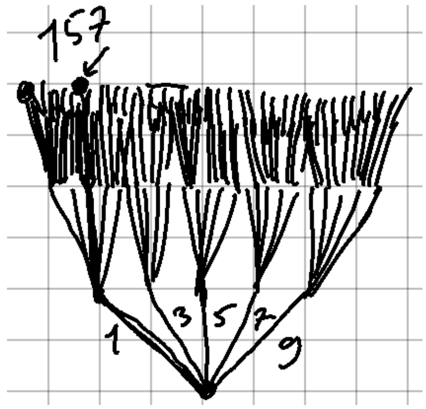
Сначала (на нижней развилке) у нас есть три варианта выбрать первую букву, потом есть два варианта для второй буквы, а третья определяется однозначно. ◁

▷ Можно перебирать варианты иначе, рассуждая так: буква К может стоять на любой из трёх возможных позиций, так что все слова делятся на три типа К**, *К*, **К (звёздочками показаны ещё не определившиеся буквы). Для каждого типа букву О можно поставить вместо любой из двух звёздочек (два варианта), и после этого положение буквы Т уже определяется однозначно. Получается такое же дерево (с ветвлением 3 в корне, 2 и 1 на следующих уровнях) и тот же ответ, но группы из двух слов другие: теперь, скажем, слова ТКО и ОКТ попали в одну группу (где К на втором месте), а раньше они были в разных (начинающиеся на Т и начинающиеся на О). ◁

2.6 Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны? Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны?

▷ Нечётных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9, и на первом месте может быть любая из них. Значит, все интересующие нас числа делятся на пять групп (1∗∗, 3∗∗, 5∗∗, 7∗∗, 9∗∗; звёздочки обозначают какие-то нечётные цифры). Каждую группу снова можно разделить на пять групп по второй цифре. Скажем, группа 1∗∗ делится на 11∗, 13∗, 15∗, 17∗ и 19∗. Каждая из групп второго уровня состоит из пяти чисел (там одна звёздочка, которую можно заменить на любую из пяти нечётных цифр). Всего получается $5 \times 5 \times 5 = 125$ трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны.

Как и раньше, последовательные выборы можно представить в виде пути в дереве:



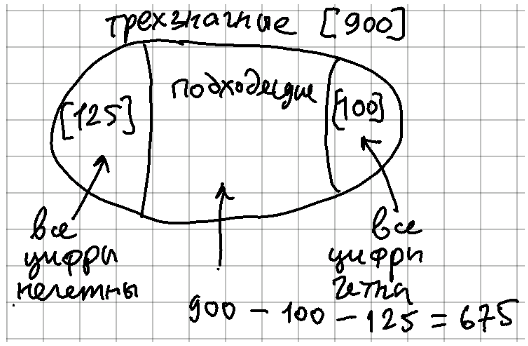
В каждой развилке пять вариантов, на первом уровне пять вершин, на втором $5 \times 5 = 25$, на третьем 125 трёхзначных чисел с нечётными цифрами.

То же самое рассуждение годится для чётных чисел, с одной поправкой. (Понятно, какой?) Нуль не может быть первой цифрой трёхзначного числа, поэтому на первом уровне только четыре варианта: $2, 4, 6, 8$. На следующих уровнях нуль ничем не хуже других, так что получается $4 \times 5 \times 5 = 100$ трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны. ◁

▷ Было бы проще, если бы мы рассматривали все числа от 000 до 999, записывая их тремя цифрами, тогда бы нуль ничем не отличался от остальных цифр. Но что есть, то есть: под трёхзначными числами понимают числа $100, \ldots, 999$. ◁

$\boxed{\textbf{2.7}^*}$ Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть и чётные, и нечётные цифры?

▷ Эта задача была бы сложнее, если бы она не шла после предыдущей. А так — достаточно понять, какие трёхзначные числа *не подходят* под описание «есть и чётные, и нечётные цифры». Для неподходящих чисел хотя бы одно из двух требований «есть чётные» и «есть нечётные» должно нарушаться. Если нарушается первое, то все цифры нечётны, если второе — то все чётны.



Как говорят математики, в множестве всех 900 трёхзначных чисел есть подмножество (часть), состоящая из тех, где все цифры нечётны (скажем, 757). На рисунке она показана слева, там, как мы уже знаем, 125 чисел. Есть другое подмножество — где все цифры чётны (справа, там 100 чисел). Заметим, что эти подмножества не пересекаются (у них нет общих чисел) — не может быть так, чтобы все три цифры были и чётны, и нечётны одновременно. Вне этих двух частей остаются как раз подходящие для нас числа — раз они не лежат в левой части, то у них есть чётная цифра, раз они не лежат в правой — есть нечётная.

Теперь осталось найти количество подходящих чисел вычитанием: $900 - 100 - 125 = 675$. ◁

• Можно считать подходящие числа «изнутри», а не дополнением до всех. Скажем, их можно разбить на две группы: одна чётная и две нечётных цифры, и наоборот. Каждую группу можно разбить на три: чётная (скажем) цифра может стоять на любом из трёх мест, и так далее. Но будет явно сложнее.

2.8 Пусть в какой-то стране автомобильные номера состоят из двух латинских букв, за которыми идут 4 цифры. Сколько различных номеров может быть в такой стране? (Считаем, что в латинском алфавите 26 букв.[6])

▷ Первую букву можно выбрать 26 способами, вторую тоже, затем первую цифру можно выбрать 10 способами и так далее до четвёртой. Как мы уже не раз видели, эти числа надо перемножить и получится $26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10 = 6\,760\,000$. (Для небольшой страны вполне хватит.) ◁

• Можно вспомнить о полях шахматной доски: они обозначаются парой из буквы a, b, c, d, e, f, g, h и цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ («гроссмейстер сыграл e2–e4»). Всего получается 8 вариантов выбора буквы, для каждого по 8 вариантов выбора цифры, то есть 64 — как и должно быть для доски 8×8.

[6] Это не всегда было так: когда-то в латинских текстах не использовали буквы J, U и W.

Мы уже несколько раз использовали одни и те же рассуждения, которые можно сформулировать теперь в общем виде.

- Пусть мы хотим составить список из k позиций, на каждую из которых можно поместить любой из n элементов (без ограничений). Тогда это можно сделать n^k способами. То же самое иначе: если в алфавите n букв, то «слов» (осмысленных или нет) длины k будет n^k.

- Если мы дополнительно потребуем, чтобы все элементы списка были разными (один и тот же элемент не может быть использован повторно в другой позиции), то число таких списков будет

  $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

  Вариант: столько будет слов длины k в алфавите из n букв, в которые никакая буква не входит дважды.

- Частный случай предыдущего при $n = k$: если каждую из n букв требуется использовать в слове (длины n) ровно один раз, то таких слов будет $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

У этих ситуаций в русских учебниках есть традиционные названия. Вторая из них называется *размещения из n по k*, потому что мы размещаем какие-то из данных нам n элементов на k местах (первом, втором,..., k-м). Первая называется (немного странно) *размещениями с повторениями*. А последняя называется *перестановками n элементов*: мы переставляем алфавит из n букв в каком-то порядке.

Почему количества именно такие? В первом случае у нас k последовательных выборов, в каждом n вариантов, поэтому получается $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (k раз), то есть n^k. Во втором случае для первой буквы есть n вариантов, для второй $n-1$ (потому что первой буквы уже нет), для третьей надо выбирать из $n-2$ букв (кроме уже выбранной первой и второй), для четвёртой из $n-3$ и так далее до k-й буквы, где надо выбирать из $n-k+1$ (обратите внимание, что надо вычитать не номер буквы, а на единицу меньше: для четвёртой, скажем, было $n-3$ варианта, а не $n-4$). Всего получается $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

В случае перестановок мы доходим в произведении $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$ до конца (до множителя 1 — последняя буква без вариантов). Это произведение называют *факториалом числа n* и обозначают

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

▷ Математики в первом случае говорит о числе *отображений из k-элементного множества в n-элементное*, во втором — о числе *инъективных отображений из k-элементного множества в n-элементное*, в третьем — о числе *биективных отображений n-элементного множества в себя*. Смысл этих учёных терминов такой: отображение из k-элементного множества в n-элементное — это когда каждая из k позиций в списке отображается в занимающий её элемент, инъективность означает, что разные элементы отображаются в разные, а биективность — что имеется взаимно однозначное соответствие между позициями и элементами (все элементы разные и каждый элемент использован). ◁

2.9 Пусть, говоря о перестановках, мы вместо «ровно один раз» сказали «каждая буква используется не более одного раза». Изменится ли от этого количество перестановок? А если мы сказали «каждая буква используется не менее одного раза»?

▷ Если мы не забыли упомянуть, что число букв в алфавите и в слове одно и то же (n), то ничего не изменится: если каждая из n букв алфавита встречается в слове из n букв не более одного раза, то все буквы придётся использовать (если какую-то не использовать, то оставшихся $n-1$ букв не хватит, чтобы заполнить все позиции). Наоборот, если надо использовать в слове из n букв все n букв алфавита, то их нельзя использовать больше одного раза, потому что не хватит позиций. ◁

В задачах по комбинаторике, особенно школьных, часто вопросы о количестве объектов формулируются в бытовых терминах («оживляж»), и нужно вникнуть в формулировку (что именно мы подсчитываем? какие объекты считаются одинаковыми, а какие разными), чтобы узнать одну из описанных ситуаций. (Или констатировать, что задача более сложная и не сводится так сразу к готовым формулам.) Вот несколько простых примеров.

2.10 Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные и разные?

▷ Первую цифру можно выбрать 5 способами, после этого для второй есть 4 варианта, после её выбора для третьей есть 3 варианта, получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. ◁

2.11 Компьютерная память хранит *двоичные слова длины* 64 — последовательности из 64 битов.[7] (Бит — это нуль или единица). Сколько разных двоичных слов бывает?

[7]Это типичный размер для 2023 года — раньше часто было 32 или 16. Биты часто

▷ Для первого бита есть два варианта (все слова делятся на две группы — начинающиеся с нуля и с единицы), для каждого из двух вариантов есть два варианта второго бита (каждая группа делится ещё на две) и так далее. Всего 64 разветвлений и 2^{64} двоичных слов длины 64. ◁

• Если знать про двоичную систему счисления, можно сказать, что каждое двоичное слово изображает целое число от 000 … 000 (нуль) до 111 … 111 ($2^{64}-1$), и таких чисел как раз 2^{64}.

2.12 В классе проведено три контрольные работы, при этом каждый ученик получил за каждую из работ одну из оценок $3, 4, 5$. Какое максимальное число учеников может быть в классе, если известно, что нет двух учеников с одинаковым набором оценок?

▷ После этих контрольных у каждого ученика есть его результат — набор оценок. В нём три оценки, и каждая из них может принимать три значения $(3, 4, 5)$. Различных таких наборов, как мы знаем, $3^3 = 27$. Значит, в классе может быть максимум 27 учеников, если у каждого свой набор. ◁

2.13 Кодовый замок имеет девять кнопок. Известно, что для открытия двери нужно набрать код из трёх различных кнопок в определённом порядке. Сколько разных вариантов такого кода может быть? Тот же вопрос, если кнопки в коде не обязаны быть разными.

▷ Если коды — это последовательности из трёх *различных* кнопок (первый вопрос), то для первой кнопки в коде есть 9 вариантов (она может быть любой), для второй 8 (кроме первой), для третьей 7 (кроме первых двух), всего вариантов $9 \cdot 8 \cdot 7$.

Во втором случае все ветвления на 9 случаев, получаем 9^3. ◁

2.14* (Продолжение) Тот же вопрос, если для открытия замка нужно нажать на три кодовые кнопки одновременно.

▷ Эта задача уже более сложная (и мы к этому ещё вернёмся, так что пока скажем о решении коротко). Запишем все $9 \cdot 8 \cdot 7$ кодов (последовательностей с учётом порядка). Теперь сгруппируем их, поместив в одну группу те коды, которые используют одни и те же кнопки, но в разном порядке. Сколько кодов в каждой группе? Они получаются перестановками из любого кода в группе, то есть перестановками трёх элементов, таких перестановок $6 = 3!$. Раз каждая

разбивают на группы по 8, называемые *байтами*, так что каждое слово состоит из восьми байтов.

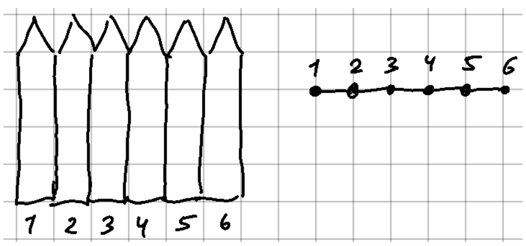
группа состоит из 6 элементов, то групп всего $9\cdot 8\cdot 7/6 = 84$. А их как раз столько, сколько кодов без учёта порядка. ◁

2.15* Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные, разные и идут в убывающем порядке. (Скажем, 751 годится, а 752, 775 или 375 — нет.)

▷ Все $60 = 5\cdot 4\cdot 3$ чисел с нечётными разными цифрами делятся на группы по $6 = 3\cdot 2\cdot 1$, если в группу объединить разные перестановки трёх цифр (из которых ровно одна убывающая). Поэтому искомых чисел столько, сколько групп, то есть $60/6 = 10$. ◁

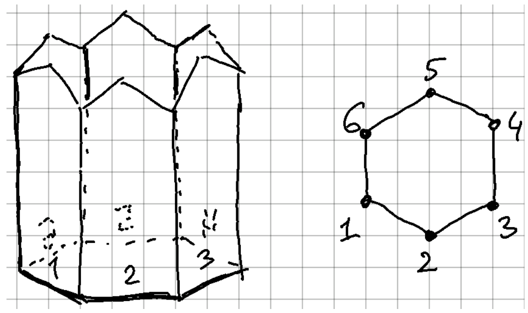
2.16 Забор из 6 досок раскрашивают в 3 цвета, каждую доску в какой-то цвет, причём соседние доски должны иметь разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

• На рисунке справа от забора нарисована схема задачи: каждая точка из шести точек изображает доску, а линии соединяют соседей, то есть доски, которые по условию должны быть покрашены в разные цвета. (Математики сказали бы, что надо покрасить вершины графа в три цвета, причём концы любого ребра должны иметь разные цвета.)



▷ Будем красить забор слева направо: для первой доски есть 3 варианта, для каждой из пяти следующих — только два (кроме цвета уже покрашенного левого соседа). Получаем $3\cdot 2^5 = 96$ вариантов раскраски. ◁

• Более сложная задача возникает для кольцевого забора (для шести досок он больше напоминает шестигранную беседку, но тем не менее).



$\boxed{\textbf{2.17}^*}$ Сколькими способами можно раскрасить кольцевой забор из шести досок, если есть три краски и соседние доски должны быть покрашены в разные цвета?

▷ Можно начать как в предыдущей задаче: сначала покрасить какую-то доску (3 варианта), затем красить доски по кругу (для каждой 2 варианта), пока мы не дойдём до последней доски. К этому моменту уже оба соседа будут покрашены, поэтому остаётся один вариант, получается $3 \cdot 2^4$.

Заметили ошибку в этом рассуждении? Для последней (шестой) доски может остаться и два варианта, если первая и пятая доски оказались покрашенными одинаково — а это вполне возможно, хотя и не обязательно. Можно сказать, что мы строим дерево вариантов, где в корне ветвление 3, выше ветвление 2 — вплоть до последнего уровня, где иногда ветвление 2, а иногда ветвление 1. Как же это учесть?

Давайте мысленно разрежем забор в каком-то одном месте (перестанем требовать различия цветов на этом стыке). Тогда получится предыдущая задача и $3 \cdot 2^5$ вариантов. В некоторых из этих вариантов доски по сторонам разреза покрашены по-разному и это годится для теперешней задачи, но в некоторых покрашены одинаково, эти варианты не годятся и их нужно вычесть. Сколько вариантов надо вычесть?

Мы вычитаем варианты, где две доски по краям разреза покрашены одинаково. Но если их надо красить одинаково, то это по существу одна доска удвоенной ширины. То есть надо посчитать, сколько есть правильных раскрасок кольцевого забора из пяти досок, и потом вычесть это число из $3 \cdot 2^5$.

Мы свели задачу для шести досок к задаче того же типа для пяти досок. Что это даёт? Мы можем точно так же свести задачу для пяти досок к задаче для четырёх, задачу для четырёх — к задаче для трёх. А для трёх все три цвета должны быть разными, так что мы знаем ответ ($6 = 3!$).

Итак, если S_n — число правильных раскрасок кольцевого забора из n досок, то $S_3 = 6$ и $S_n = 3 \cdot 2^{n-1} - S_{n-1}$. Получаем:

$$\begin{aligned} S_4 &= 3 \cdot 2^3 - S_3 = 24 - \ \ 6 = 18, \\ S_5 &= 3 \cdot 2^4 - S_4 = 48 - 18 = 30, \\ S_6 &= 3 \cdot 2^5 - S_5 = 96 - 30 = 66. \end{aligned}$$

Ответ: кольцевой забор из 6 досок имеет 66 раскрасок в три цвета, если требуется, чтобы соседние доски были раскрашены по-разному. $\triangleleft$

• Задачу о правильных раскрасках можно поставить для любого *графа*, как сказали бы математики: надо нарисовать точки (*вершины*), которые красят в k цветов, и соединить линиями (*рёбрами*) те точки, которые нельзя красить одинаково. После этого можно спросить, сколько правильных раскрасок есть у такого графа.

$\triangleright$ Для графа, где вершины соединены рёбрами по кругу (цикла) мы научились решать задачу сравнительно просто: хотя у нас и нет готовой формулы, но можно последовательно вычислять ответ для цикла из n вершин, используя ответ для предыдущего цикла. При некотором терпении даже без компьютера можно получить ответ для графов с десятками вершин (а уж с помощью компьютеров и десятки тысяч вершин не будут проблемой). Но это нам повезло: для произвольных графов найти число раскрасок в 3 цвета (или хотя бы просто узнать, равно ли это число нулю, то есть существуют ли такие раскраски) — вычислительно сложная задача, и математики подозревают (хотя и не могут доказать), что любой такой алгоритм требует «экспоненциального перебора» (если не всех раскрасок, то какого-то другого большого множества), и для графов из тысяч вершин это (пока?) недостижимо сложная задача.

Можно ещё спросить, есть ли явная формула для S_n в нашей задаче. Попробуйте её угадать; для начала можно поделить все числа на два, получатся числа $3, 9, 15, 33 \ldots$ — они получаются из степеней двойки прибавлением или вычитанием единицы, и это не случайно: наше рассуждение позволяет доказать (по индукции), что $S_n = 2 \cdot (2^{n-1} + (-1)^n)$.

Можно фиксировать граф и рассматривать число правильных раскрасок в k цветов при разных k (как функцию от k). Эта функция всегда будет многочленом от k. Это можно доказать нашим способом, сведя граф к двум меньшим (надо выбрать ребро и рассмотреть два графа: в одном оно удалено, в другом стянуто в точку). Многочлен этот математики называют *хроматическим многочленом* графа. Приведённая выше формула для S_n обобщается на любое число цветов (k): хроматический многочлен равен $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$; при каждом n получаем многочлен от k степени n. $\triangleleft$

2.18* В выражении

$$(a+b-c)(d+e-f)(g+h-i)(j+k-l)$$

раскрыли все скобки, получили сумму произведений групп из четырёх букв. Сколько слагаемых в этой сумме? Перед сколькими из ними стоит знак «минус»?

▷ Пока не будем смотреть на знаки. Слагаемое будет произведением четырёх букв: одной из первой скобки, одной из второй, из третьей и из четвёртой. Каждый выбор можно сделать (независимо от остальных) тремя способами, так что получаем $3^4 = 81$ слагаемых.

Перед сколькими из слагаемых стоит минус? Быстрее всего на этот вопрос можно ответить с помощью алгебраического трюка. Подставим вместо всех букв числа, равные единице. Тогда каждая скобка равна 1, произведение скобок равно 1, и каждая тройка букв даёт в произведении 1. Значит, троек букв с плюсом должно быть на одну больше, чем троек с минусом, то есть 41 и 40. Ответ: минус стоит перед 40 слагаемыми. ◁

Иногда перемножение количеств вариантов при независимом выборе полезно, даже если мы не знаем числа вариантов.

2.19* Пусть n — максимальное количество слонов, которое можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Покажите, что n чётно и что число способов расстановки n слонов, не бьющих друг друга, есть точный квадрат.

• Каждый слон атакует все поля на двух диагоналях, в пересечении которых он стоит.

▷ Слоны бывают белопольные и чернопольные, и белопольный слон не может атаковать чернопольного. Поэтому тех и других можно расставлять независимо на белых и чёрных полях. При этом белые и чёрные поля устроены одинаково (отличаются поворотом на 90°), поэтому для них и максимальное число слонов k, и число расстановок для k слонов одно и тоже. Значит, для всей доски максимальное число слонов $2k$, а число их расстановок равно квадрату числа расстановок k белопольных слонов. ◁