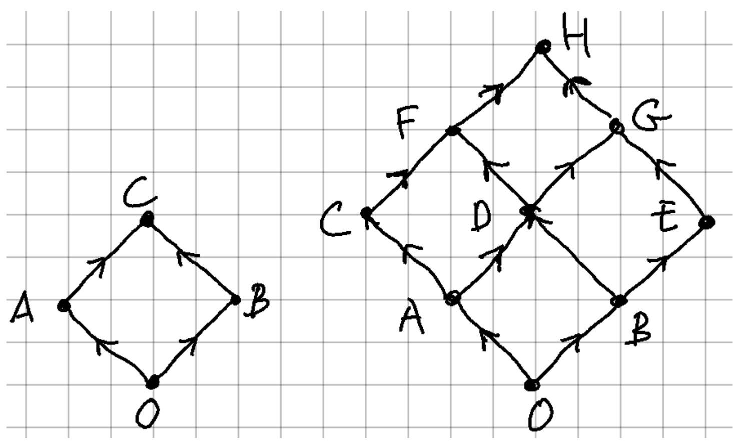
3. Рекуррентные формулы

Не всегда ответ в комбинаторной задаче можно посчитать по какой-то формуле — но даже если нет, часто можно обойтись без перебора всех вариантов. Один из способов — свести задачу к другим задачам меньшего размера, которые предварительно решить.

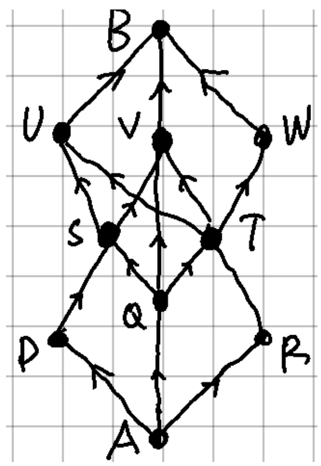
Начнём с задачи, которая у нас уже была (и даже в более сложном варианте).

3.1 Найдите число различных путей из вершины O в вершины A, B и C (левый рисунок). Тот же вопрос для всех вершин (A, B, C, D, E, F) правого рисунка.



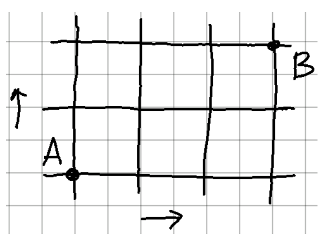
Тот же приём работает и для более сложных схем дорог:

3.2* Найти число различных путей из вершины A в вершину B по дорогам на рисунке. (Стрелки указывают направление движения: дороги односторонние и ведут снизу вверх.)

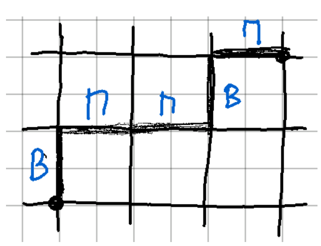


Следующая задача продолжает уже решённую нами (только схема дорог тут чуть больше и она повёрнута так, что дороги горизонтальны и вертикальны).

3.3 Город разбит сеткой горизонтальных и вертикальных улиц на квадратные кварталы со стороной 1. Мы хотим пройти из точки A в точку B одним из кратчайших путей (то есть идя только вправо и вверх). Сколько таких путей существует?



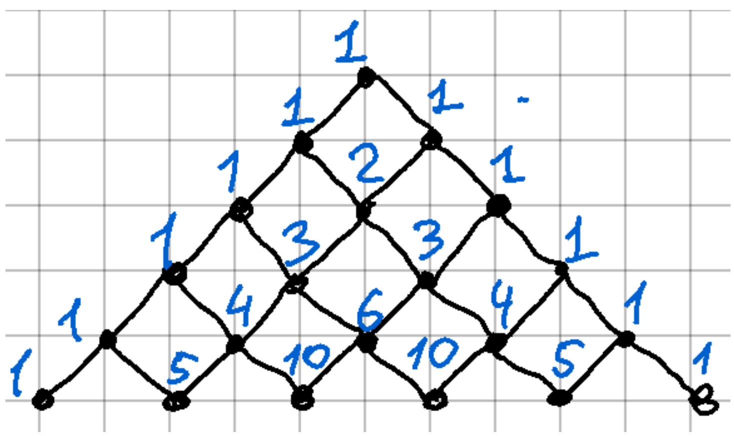
3.4 Перечислите эти 10 кратчайших путей из A в B, записывая каждый путь как последовательность шагов направо (П) и вверх (В).



Например, путь на картинке запишется как ВППВП. Пути удобно перечислять как в словаре («в лексикографическом порядке»): если два пути расходятся в каком-то месте, то раньше указывается путь, который идёт вверх (потому что «В» раньше «П» в алфавите). Первым в списке будет путь ВВППП.

3.5* Мы перечисляем пути из точки A в точку B, которая на 7 кварталов правее и на 5 выше. Какой путь будет идти (в лексикографическом порядке) вслед за ВППВПВППППВВ?

Вернёмся к рисунку с количеством путей в разные перекрёстки. Для красоты его поворачивают так, чтобы вершина A была сверху и дороги вели вниз-влево и вниз-вправо:



Каждое число равно сумме двух стоящих над ним (а по левой и правой сторонам идущего вниз треугольника стоят единицы).

Заполненный таким образом числовой треугольник называют *треугольником Паскаля*[8] (хотя раньше его упоминал, скажем, знаменитый поэт Омар Хайям и другие), а его элементы — *биномиальными коэффициентами* или *числами сочетаний*. Немного позже мы объясним, откуда берутся эти названия.

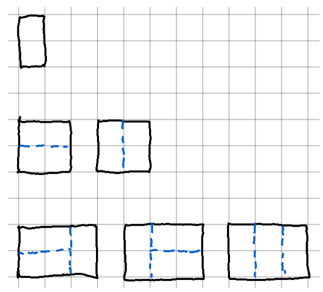
Задачу о числе путей можно переформулировать так: «шахматная пешка идёт с поля a1 на поле d3, при этом она может идти направо и вверх (на одну клетку); сколькими способами она может это сделать?».

[8]Блез Паскаль — французский математик и религиозный философ XVII века, один из основателей теории вероятностей.

3.6 Как изменится ответ в этой задаче, если разрешить пешке ещё ходить вправо-вверх (в соседнюю клетку по диагонали)?

3.7 На клетчатой бумаге нарисована прямоугольная полоска 2×10. Мы хотим разрезать её на «доминошки» 1×2 (вертикальные и горизонтальные). Сколькими способами можно это сделать?

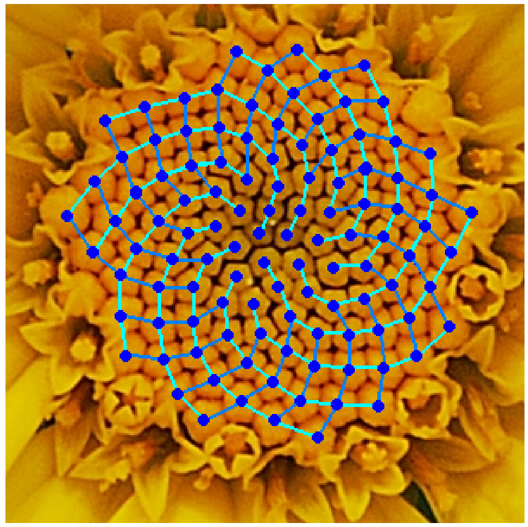
На рисунке показаны возможные способы разрезания для полосок 2×1, 2×2 и 2×3 (один, два и три способа соответственно).



Глядя на этот рисунок, можно предположить, что число способов для полоски $2 \times n$ равно n, но это не так — уже для $n = 4$ эта закономерность нарушается.

▷ Последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … (где и дальше каждый член равен сумме двух предыдущих) называют *последовальностью Фибоначчи* (обычно к ней добавляют ещё единицу вначале, а часто и два члена 0, 1, не нарушая закона построения). [9] Фибоначчи странным образом связывал эту последовательность с размножением кроликов (которые знать о ней не знают), но она и впрямь встречается в биологических объектах: если посчитать число спиралей в ананасах (или в шишках) в двух направлениях, часто можно увидеть соседние числа Фибоначчи.

[9] Про историю названия (довольно запутанную) можно прочесть, скажем, в википедии.



У цветка Cota tinctoria (жёлтая ромашка) тоже можно увидеть 21 спираль в одном направлении и 13 в другом (фотография с дорисованными линиями спиралей взята из статьи в википедии о числах Фибоначчи). ◁

Мы уже обсуждали (задача 2.11), почему последовательностей нулей и единиц (двоичных слов) длины 10 есть $2^{10} = 1024$ штуки. Если наложить дополнительные ограничения, то некоторые последовательности отпадут и их станет меньше.

$\boxed{\textbf{3.8}}$ Сколько последовательностей длины 10 из нулей и единиц, в которых никакие два нуля не идут подряд?

• Например, из восьми последовательностей длины 3 исключаются последовательности `000`, `001` и `100` (проверьте, что остальные подходят), и остаётся пять.

$\boxed{\textbf{3.9}^*}$ Сколько троичных слов (то есть последовательностей из цифр $0, 1, 2$) длины 10 без двух нулей подряд?

$\boxed{\textbf{3.10}^*}$ Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых нет подряд идущих *трёх* нулей?

▷ Видно, что хороших слов (без трёх нулей) длины 10 чуть меньше половины от всех (504 из 1024). Если посчитать ещё несколько членов последовательности, мы увидим, что эта доля уменьшается с ростом n. Специалисты по теории вероятностей бы сказали, что *вероятность того, что при n бросаниях честной монеты не встретятся три орла подряд, убывает и стремится к нулю с ростом n.* ◁

Во всех предыдущих задачах мы находили нужное нам число способов, сведя задачу к меньшим — это часто бывает полезно (особенно если не удаётся сразу использовать какие-то известные формулы). В качестве иллюстрации вернёмся к задаче о положительных и отрицательных членах в произведении, которую мы уже разбирали (2.18).

3.11* Рассмотрим произведение скобок

$$(a+b-c)(d+e-f)(g+h-i)\ldots,$$

где переменные в скобках не повторяются и в каждой скобке два плюса и один минус. Сколько членов и перед сколькими стоит знак минус, если в произведении n скобок?

В заключение раздела приведём ещё несколько задач, где похожие соображения (сведение к задачам меньшего размера или более простым) позволяют получить ответ, не перебирая всех вариантов.

3.12* Сколькими способами можно заплатить 37 рублей, если есть только монеты в 1, 2 и 5 рублей? (Способы, отличающиеся только порядком монет, считаем одинаковыми.)

- Например, для 7 рублей есть пять способов

$$5+2, 5+1+1, 2+1+1+1+1+1, 2+2+1+1+1, 2+2+2+1$$

(мы не различаем, скажем, $5+2$ и $2+5$, потому что они отличаются только порядком уплаты).

▷ Математики могли бы заметить, что нам нужно вычислить коэффициент при x^{37} в произведении

$$(1+x+x^2+x+3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots),$$

но с точки зрения вычислений это мало что даёт, даже если просуммировать бесконечные ряды и записать это произведение как

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}=\frac{1}{1-x-x^2+x^3-x^5+x^6+x^7-x^8},$$

откуда можно получить рекуррентное соотношение

$$T_n-T_{n-1}-T_{n-2}+T_{n-3}-T_{n-5}+T_{n-6}+T_{n-7}-T_{n-8}=0.$$

Но с точки зрения вычислений это соотношение, пожалуй, даже менее удобно, потому что надо вычислять все T_n подряд[10]. Зато, если уметь пользоваться какой-нибудь компьютерной системой символьных вычислений, можно получить ответ почти сразу (на рисунке часть вывода системы `wolframalpha`, обведён нужный коэффициент).

series	$\dfrac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^5\right)}$	point	$x = 0$

Series expansion at x = 0

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 11x^{11} + 13x^{12} + 14x^{13} + 16x^{14} + 18x^{15} + 20x^{16} + 22x^{17} + 24x^{18} + 26x^{19} + 29x^{20} + 31x^{21} + 34x^{22} + 36x^{23} + 39x^{24} + 42x^{25} + 45x^{26} + 48x^{27} + 51x^{28} + 54x^{29} + 58x^{30} + 61x^{31} + 65x^{32} + 68x^{33} + 72x^{34} + 76x^{35} + 80x^{36} + 84x^{37} + 88x^{38} + 92x^{39} + 97x^{40} + 101x^{41} + 106x^{42} + 110x^{43} + 115x^{44} + 120x^{45} + 125x^{46} + 130x^{47} + 135x^{48} + 140x^{49} + 146x^{50} + 151x^{51} + 157x^{52} + 162x^{53} + 168x^{54} + 174x^{55} + 180x^{56} + O\left(x^{57}\right)$$

◁

3.13* Найдите число решений уравнения $x + 2y + 5z = 37$ в целых неотрицательных числах.

В следующей задаче мы считаем способы разбиения целого положительного числа на любые целые положительные слагаемые (можно сказать, что теперь есть монеты любого целого достоинства). Скажем, для числа 5 есть такие разбиения:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,$$

всего 7 вариантов.

3.14* Как объяснить, что в этом перечислении мы не пропустили ни одного варианта? Найдите число разбиений для $n = 10$.

▷ Можно также написать коротную программу на каком-нибудь знакомом вам языке программирования (здесь использован питон)

[10]Если только n не очень велико и мы не вычисляем степень матрицы повторным возведением в квадрат.

```
N=10
T = [[0 for x in range(N+1)] for y in range(N+1)]
T[0][0]=1
for n in range(1,N+1):
  T[n][0]=0
  for k in range (1,n+1):
    T[n][k]= sum([(0 if n-i<0 else \
    (T[n-i][i] if i<=n-i else T[n-i][n-i]))\
    for i in range(1,k+1)] )
print ([T[i][i] for i in range(0,N+1)])
```

```
[1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42]
```

Есть и другое рекуррентное соотношение для количества $T_n (= T_{n,n})$ разбиений n на слагаемые, открытое Эйлером:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

Здесь знаки идут парами (два плюса, два минуса, потом снова два плюса и так далее), а вычитаемые из n числа получаются по формулам $k(3k-1)/2$ для первого члена пары и $k(3k+1)/2$ для второго члена пары ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Мы считаем, что $T_0 = 1$ и $T_i = 0$ при $i < 0$. Это соотношение связано с *пентагональной теоремой Эйлера*, говорящей, что в бесконечном произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \ldots$$

удивительным образом все ненулевые коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по указанным выше формулам. Название «пентагональная» связана с “pentagonal numbers” — пятиугольными числами, которые равны числу точек в составленных определённым образом пятиугольниках $(1, 5, 12, 22, 35, \ldots)$; мы не будем рисовать эту картинку (её можно посмотреть в википедии). Они появляются как степени в группах из двух членов одного знака. ◁

В последней задаче нужно найти, сколькими способами можно вычислить произведение n сомножителей, еесли сомножители нельзя переставлять, а можно только по-разному группировать. Скажем, для трёх сомножителей a, b, c есть два способа $(ab)c$ и $a(bc)$, а для четырёх есть пять способов $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ и $a(b(cd))$.

$\boxed{\textbf{3.15}^*}$ Найдите количество способов для 7 сомножителей.

$\triangleright$ Эти числа $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots)$ появляются во многих других задачах и называются *числами Каталана*. Обычно нумерацию сдвигают и считают n-м числом Каталана количество способов вычислить произведение из $n+1$ сомножителей, так что в стандартных обозначениях наш ответ 132 будет C_6, а не C_7. Для чисел Каталана есть формула с факториалами $(2n)!/(n!(n+1)!$, при $n = 6$ будет как раз $12!/(6!7!) = 132$. Мы ещё встретимся с числами Каталана в следующих разделах. $\triangleleft$