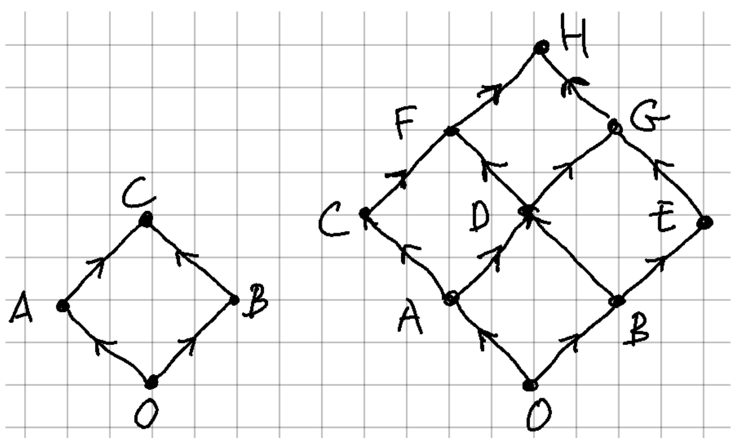
3. Рекуррентные формулы

Не всегда ответ в комбинаторной задаче можно посчитать по какой-то формуле — но даже если нет, часто можно обойтись без перебора всех вариантов. Один из способов — свести задачу к другим задачам меньшего размера, которые предварительно решить.

Начнём с задачи, которая у нас уже была (и даже в более сложном варианте).

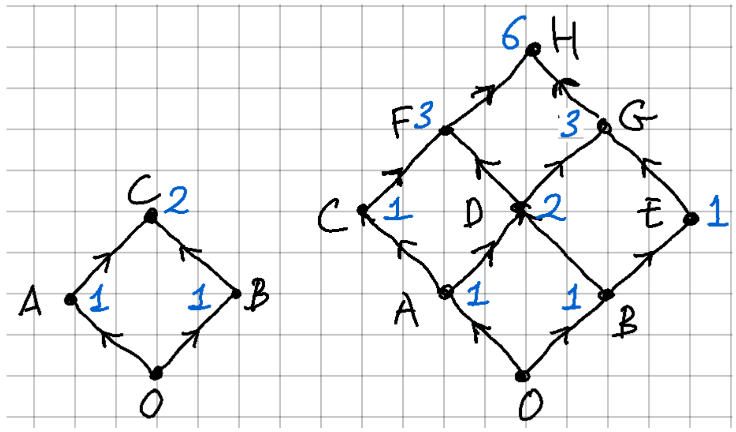
3.1 Найдите число различных путей из вершины O в вершины A, B и C (левый рисунок). Тот же вопрос для всех вершин (A, B, C, D, E, F) правого рисунка.



▷ В первом случае и искать нечего — в A и B есть единственный путь, а в C есть два пути (через A и B). У нас уже была более сложная задача, когда между городами было несколько дорог — тогда нужно было перемножать, а теперь достаточно только складывать.

Во втором случае для вершин A и B тоже есть единственный путь, а в вершину D можно прийти двумя путями (это тот же вопрос, что и для предыдущего рисунка). А что можно сказать про другие вершины? В вершины C и E путь единственный. Для вершины F можно заметить, что в неё можно прийти либо из C, либо из D, так что все пути делятся на две группы. Мы уже знаем, что в первой группе один путь (в C можно прийти единственным способом), а во второй — два. Всего в вершину F можно прийти тремя способами. Симметрично для вершины G.

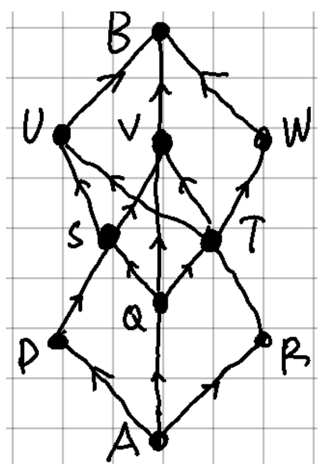
Наконец, в вершину H можно прийти из F и из G, получаются две группы из трёх путей каждая, всего 6 путей.



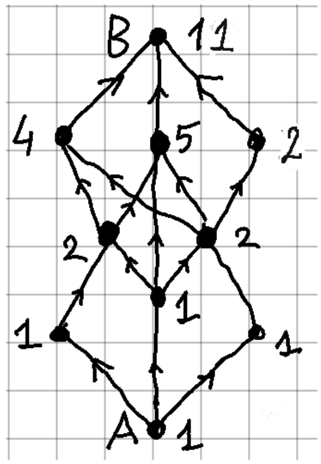
◁

Тот же приём работает и для более сложных схем дорог:

$\boxed{\mathbf{3.2}^*}$ Найти число различных путей из вершины A в вершину B по дорогам на рисунке. (Стрелки указывают направление движения: дороги односторонние и ведут снизу вверх.)



▷ В этой задаче из разных вершин выходит разное число стрелок, так что нет какого-то простого способа поглядеть на картинку и сразу сказать ответ. Но если действовать систематически, то решить её легко. В вершины P, Q и R можно прийти (из вершины A) единственным способом. В вершину S можно прийти из P и из Q (куда можно было прийти единственными способом), значит, туда можно дойти двумя способами. Тот же ответ получается и для вершины T. Пути в вершину U проходят либо через S, либо через T, и тех и других по два (как мы видели), получается 4, и так далее.

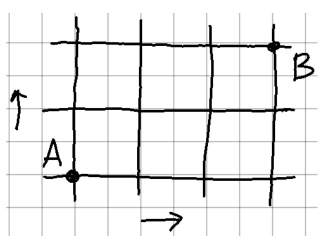


Общее правило: в исходной вершине стоит 1, во всех остальных стоит сумма чисел для всех возможных предшественников (откуда приходят дороги).

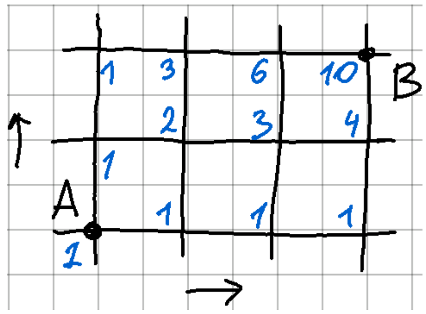
Для вершины B, таким образом, получается 11 возможных путей ($4+5+3=11$, складываем три группы идущих через трёх предшественников). ◁

Следующая задача продолжает уже решённую нами (только схема дорог тут чуть больше и она повёрнута так, что дороги горизонтальны и вертикальны).

3.3 Город разбит сеткой горизонтальных и вертикальных улиц на квадратные кварталы со стороной 1. Мы хотим пройти из точки A в точку B одним из кратчайших путей (то есть идя только вправо и вверх). Сколько таких путей существует?

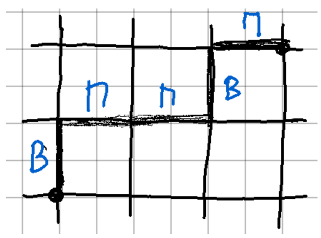


▷ Мы можем действовать по тому же принципу, постепенно расставляя в вершинах количество способов туда попасть из A. Для вершин на одной вертикали и горизонтали с A способ единственный, в остальные вершины можно попасть снизу и слева, так что все способы делятся на две группы: последний шаг снизу вверх или последний шаг слева направо. Значит, нужно сложить числа внизу и слева. Вот что получается:



Таким образом, из A в B есть 10 кратчайших путей. ◁

3.4 Перечислите эти 10 кратчайших путей из A в B, записывая каждый путь как последовательность шагов направо (П) и вверх (В).



Например, путь на картинке запишется как ВППВП. Пути удобно перечислять как в словаре («в лексикографическом порядке»): если два пути расходятся в каком-то месте, то раньше указывается путь, который идёт вверх (потому что «В» раньше «П» в алфавите). Первым в списке будет путь ВВППП.

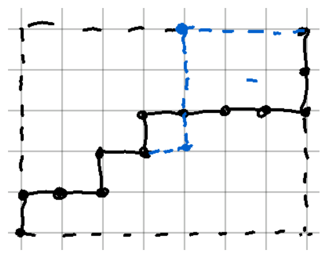
▷ Сначала идут пути, начинающиеся на В, потом начинающиеся на П:

ВВППП, ВПВПП, ВППВП, ВПППВ, ПВВПП, ПВПВП, ПВППВ, ППВВП, ППВПВ, ПППВВ.

(Как можно сразу сказать, что на В начинаются четыре пути, а на П шесть, глядя на числа на предыдущем рисунке?) ◁

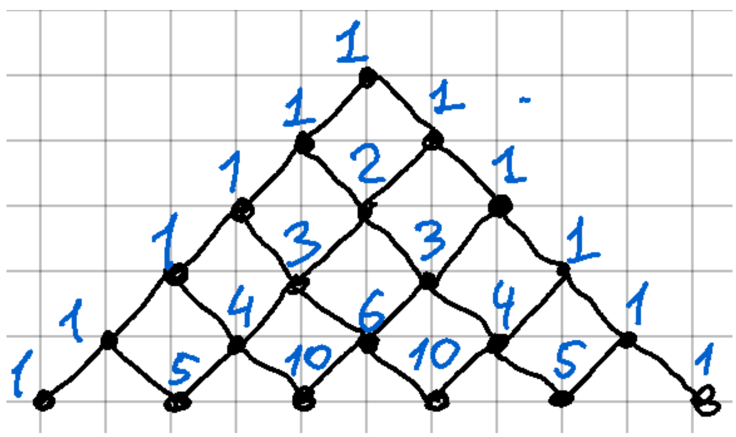
3.5* Мы перечисляем пути из точки A в точку B, которая на 7 кварталов правее и на 5 выше. Какой путь будет идти (в лексикографическом порядке) вслед за ВППВПВПППППВВ?

▷ Следующий путь должен ответвляться от нашего, идя направо, когда наш идёт вверх, причём развилка должна быть как можно дальше от начала пути. Последние две буквы В мы не можем заменить на П (не меняя ничего раньше), так как тогда букв П станет слишком много. Значит, мы должны заменить третью справа букву В, и будет слово ВППВПП??????. Вопросительные знаки обозначают три буквы П и три буквы В, и раньше всех будет ВВВППП. Ответ: ВППВППВВВППП.



◁

Вернёмся к рисунку с количеством путей в разные перекрёстки. Для красоты его поворачивают так, чтобы вершина *A* была сверху и дороги вели вниз-влево и вниз-вправо:



Каждое число равно сумме двух стоящих над ним (а по левой и правой сторонам идущего вниз треугольника стоят единицы).

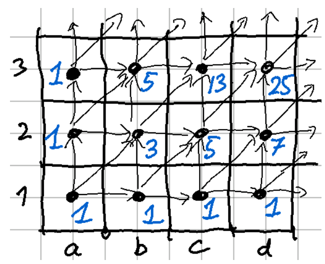
Заполненный таким образом числовой треугольник называют *треугольником Паскаля*[8] (хотя раньше его упоминал, скажем, знаменитый поэт Омар Хайям и другие), а его элементы — *биномиальными коэффициентами* или *числами сочетаний*. Немного позже мы объясним, откуда берутся эти названия.

[8]Блез Паскаль — французский математик и религиозный философ XVII века, один из основателей теории вероятностей.

Задачу о числе путей можно переформулировать так: «шахматная пешка идёт с поля `a1` на поле `d3`, при этом она может идти направо и вверх (на одну клетку); сколькими способами она может это сделать?».

$\boxed{\textbf{3.6}}$ Как изменится ответ в этой задаче, если разрешить пешке ещё ходить вправо-вверх (в соседнюю клетку по диагонали)?

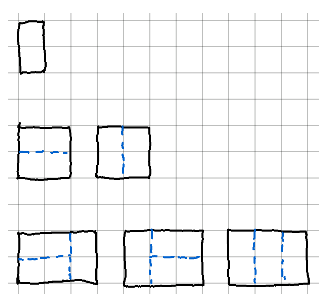
▷ На граф возможных ходов нужно добавить диагональные линии и пересчитать числа: на краю по прежнему единицы, но в остальные клетки можно попасть тремя способами и нужно сложить числа способов для трёх предшественников. Получится 25 способов.



◁

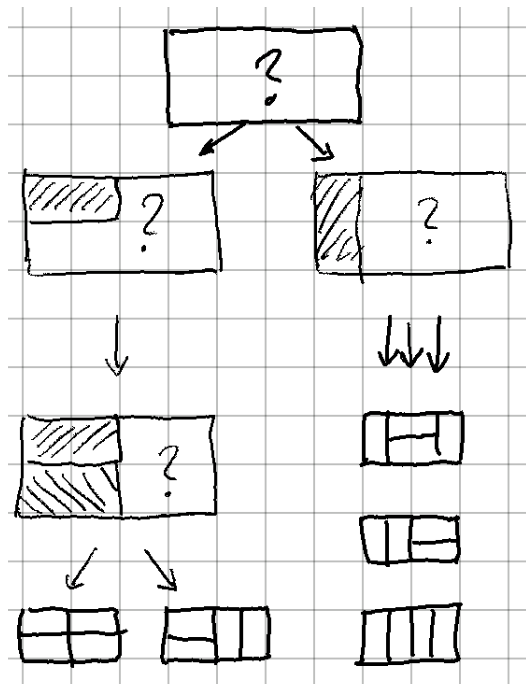
$\boxed{\textbf{3.7}}$ На клетчатой бумаге нарисована прямоугольная полоска 2×10. Мы хотим разрезать её на «доминошки» 1×2 (вертикальные и горизонтальные). Сколькими способами можно это сделать?

На рисунке показаны возможные способы разрезания для полосок 2×1, 2×2 и 2×3 (один, два и три способа соответственно).



Глядя на этот рисунок, можно предположить, что число способов для полоски $2 \times n$ равно n, но это не так — уже для $n = 4$ эта закономерность нарушается.

▷ Давайте подсчитаем число способов для полоски 2×4. Для этого разобьём все варианты на две части, посмотрев, какая доминошка примыкает е верхнему левому углу: горизонтальная или вертикальная.



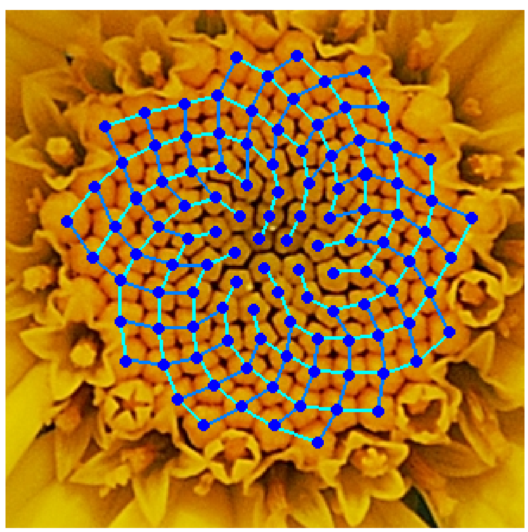
В первом случае снизу от неё тоже горизонтальная доминошка (вертикальная никак не влезает), и остаётся разрезать квадрат 2×2. Во втором случае остаётся разрезать полоску 2×3. Обе эти задачи уже разбирались, соответственно есть 2 и 3 способа. Всего получается 5 способов. Другими словами, можно записать $S_4 = S_2 + S_3$, если через S_n обозначить число способов разрезания для полоски $2 \times n$. И вообще ровно по тем же причинам $S_n = S_{n-2} + S_{n-1}$ для любого $n \geqslant 4$. (Верно ли это для предыдущих n? Что надо взять за S_0, чтобы равенство было верно и для $n = 2$?)

Теперь несложно найти ответ:

$$S_4 = S_2 + S_3 = 2 + 3 = 5;$$
$$S_5 = S_3 + S_4 = 3 + 5 = 8;$$
$$S_6 = S_4 + S_5 = 5 + 8 = 13;$$
$$S_7 = S_5 + S_6 = 8 + 13 = 21;$$
$$S_8 = S_6 + S_7 = 13 + 21 = 34;$$
$$S_9 = S_7 + S_8 = 21 + 34 = 55;$$
$$S_{10} = S_8 + S_9 = 34 + 55 = 89.$$

Ответ: 89 способов разрезания полоски 2×10 на доминошки. $\triangleleft$

$\triangleright$ Последовательность $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ (где и дальше каждый член равен сумме двух предыдущих) называют *последовальностью Фибоначчи* (обычно к ней добавляют ещё единицу вначале, а часто и два члена $0, 1$, не нарушая закона построения). [9] Фибоначчи странным образом связывал эту последовательность с размножением кроликов (которые знать о ней не знают), но она и впрямь встречается в биологических объектах: если посчитать число спиралей в ананасах (или в шишках) в двух направлениях, часто можно увидеть соседние числа Фибоначчи.



У цветка Cota tinctoria (жёлтая ромашка) тоже можно увидеть 21 спираль в одном направлении и 13 в другом (фотография с дорисованными линиями спиралей взята из статьи в википедии о числах Фибоначчи). $\triangleleft$

[9] Про историю названия (довольно запутанную) можно прочесть, скажем, в википедии.

Мы уже обсуждали (задача 2.11), почему последовательностей нулей и единиц (двоичных слов) длины 10 есть $2^{10} = 1024$ штуки. Если наложить дополнительные ограничения, то некоторые последовательности отпадут и их станет меньше.

3.8 Сколько последовательностей длины 10 из нулей и единиц, в которых никакие два нуля не идут подряд?

• Например, из восьми последовательностей длины 3 исключаются последовательности `000`, `001` и `100` (проверьте, что остальные подходят), и остаётся пять.

▷ Давайте обозначим число двоичных слов длины n без двух нулей подряд через T_n. Тогда нам надо найти T_{10}, а $T_3 = 5$, как мы видели. Предыдущие члены: $T_1 = 2$ (обе годные) и $T_2 = 3$ (одна выброшена).

Все последовательности длины n без двух нулей подряд делятся на две категории: начинающиеся с нуля и начинающиеся с 1. Если последовательность начинается с нуля, то за ним должна быть единица (потому что два нуля подряд не разрешаются). Таким образом, последовательности бывают двух видов `01`x и `1`y. Здесь x — последовательность длины 8, а y — длины 9. Они не должны содержать двух нулей подряд (иначе вся последовательность будет выброшена). Но больше от них ничего не требуется: если в последовательности нет двух нулей подряд, то к ней можно приписать `01` или `1` слева, и двух нулей подряд не возникнет. Так что есть T_8 годных последовательностей вида `01`x и T_9 годных последовательностей вида `1`y. Отсюда находим: $T_{10} = T_8 + T_9$.

Аналогично $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}$, та же самая формула, что для чисел Фибоначчи. Только мы начинаем с $T_1 = 2$ и $T_2 = 3$, так что всё сдвинуто по сравнению с разрезанием полоски, и надо взять следующее число $55 + 89 = 144$. ◁

3.9* Сколько троичных слов (то есть последовательностей из цифр $0, 1, 2$) длины 10 без двух нулей подряд?

▷ Снова посмотрим на первую цифру. Если это не нуль, то с ней проблем нет. Если нуль, то вторая цифра может быть 1 или 2. Получаются группы `01`x, `02`y, `1z` и `1t`, так что рекуррентная формула теперь будет $T_n = 2T_{n-1} + 2T_{n-2}$. Начинаем с $T_1 = 3$ и $T_2 = 8$ (без одного), получаем (при некотором терпении или с помощью простой программы) последовательность

$$3, 8, 22, 60, 164, 448, 1224, 3344, 9136, 24960;$$

последний член как раз соответствует длине 10, так что он и будет ответом: 24960. ◁

3.10* Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых нет подряд идущих *трёх* нулей?

▷ Снова обозначая это число для длины n через T_n, мы видим, что $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_3 = 7$ (без одного). Что дальше? Слово может иметь вид $1x$, $01y$, $001z$ в зависимости от того, сколько у него спереди нулей (нуль, один или два, больше быть по условию не может). Остаток может быть любым словом (соответствующей длины) без трёх нулей. Получаем формулу $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, которая даёт последовательность

$$2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504.$$

Проверим ещё какой-нибудь член: скажем, эта формула даёт $T_4 = 13$, и это понятно, потому что выброшены три слова `0000`, `0001` и `1000` из 16. Получаем ответ 504. ◁

▷ Видно, что хороших слов (без трёх нулей) длины 10 чуть меньше половины от всех (504 из 1024). Если посчитать ещё несколько членов последовательности, мы увидим, что эта доля уменьшается с ростом n. Специалисты по теории вероятностей бы сказали, что *вероятность того, что при n бросаниях честной монеты не встретятся три орла подряд, убывает и стремится к нулю с ростом n.* ◁

Во всех предыдущих задачах мы находили нужное нам число способов, сведя задачу к меньшим — это часто бывает полезно (особенно если не удаётся сразу использовать какие-то известные формулы). В качестве иллюстрации вернёмся к задаче о положительных и отрицательных членах в произведении, которую мы уже разбирали (2.18).

3.11* Рассмотрим произведение скобок

$$(a + b - c)(d + e - f)(g + h - i)\ldots,$$

где переменные в скобках не повторяются и в каждой скобке два плюса и один минус. Сколько членов и перед сколькими стоит знак минус, если в произведении n скобок?

▷ Всего членов будет 3^n, потому что в каждой из n скобок можно выбрать переменную тремя способами. Мы видели, что можно определить число минусов с помощью такого трюка: подставить вместо всех переменных число 1, тогда в каждой скобке будет 1, произведение всех скобок будет 1, поэтому членов с плюсом на один больше, чем членов с минусом.

Если бы мы не знали этого трюка, можно было бы решить задачу так: пусть P_n и N_n — число положительных и отрицательных членов в произведении n скобок. Если мы добавим ещё скобку, положительных членов будет $P_{n+1} = 2P_n + N_n$ (умножаем положительные на две переменные с плюсом и отрицательные на переменную с минусом) и $N_{n+1} = 2N_n + P_n$ (по аналогичным причинам). Начинаем с $P_1 = 2$ и $N_1 = 1$, получаем $P_2 = 2P_1 + N_1 = 5$ и $N_2 = 2N_1 + P_1 = 4$, затем $P_3 = 2 \cdot 5 + 4 = 14$ и $N_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$, затем $P_4 = 2 \cdot 14 + 13 = 41$ и $N_4 = 2 \cdot 13 + 14 = 40$ и так далее. Можно заметить уже знакомую нам закономерность (положительных на единицу больше) и даже доказать, что она сохраняется при переходе к следующему значению n. Но и без того по нашей рекуррентной формуле можно найти интересующие нас количества довольно быстро. $\triangleleft$

В заключение раздела приведём ещё несколько задач, где похожие соображения (сведение к задачам меньшего размера или более простым) позволяют получить ответ, не перебирая всех вариантов.

$\boxed{\textbf{3.12}^*}$ Сколькими способами можно заплатить 37 рублей, если есть только монеты в 1, 2 и 5 рублей? (Способы, отличающиеся только порядком монет, считаем одинаковыми.)

- Например, для 7 рублей есть пять способов

$$5+2, 5+1+1, 2+1+1+1+1+1, 2+2+1+1+1, 2+2+2+1$$

(мы не различаем, скажем, $5+2$ и $2+5$, потому что они отличаются только порядком уплаты).

$\triangleright$ Для начала решим ту же задачу для двух типов монет: 1 и 2 рубля. Способ уплаты в таком случае определяется числом двухрублёвых монет (остаток платится рублёвыми монетами без вариантов), которых может быть от 0 до $n/2$. Поэтому для этой задачи число вариантов S_n можно найти по формуле $S_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (уголки обозначают округление вниз, в сторону уменьшения). Скажем, $S_3 = \lfloor 3/2 \rfloor + 1 = \lfloor 1{,}5 + 1 \rfloor = 1 + 1 = 2$, что соответствует $1+1+1$ и $2+1$.

Теперь перейдём к более сложной задаче, когда есть пятирублёвые монеты. Обозначим через T_n искомое число. Тогда $T_n = S_n$ при $n < 5$ (тогда пятирублёвые монеты использовать нельзя). Если $n \geqslant 5$, то можно не использовать пятирублёвые монеты (S_n способов), или использовать по крайней мере одну, тогда после её использования остаётся T_{n-5} вариантов, то есть $T_n = S_n + T_{n-5} = \lfloor n/2 \rfloor + 1 + T_{n-5}$. По этой формуле теперь находим искомое число (сводя 37 к

$32, 27, 22, 17, 12, 7, 2$):

$$
\begin{aligned}
T_2 &= S_2 = \lfloor 2/2 \rfloor + 1 = 2,\\
T_7 &= \lfloor 7/2 \rfloor + 1 + T_2 = 4 + 2 = 6,\\
T_{12} &= \lfloor 12/2 \rfloor + 1 + T_7 = 7 + 6 = 13,\\
T_{17} &= \lfloor 17/2 \rfloor + 1 + T_{12} = 9 + 13 = 22,\\
T_{22} &= \lfloor 22/2 \rfloor + 1 + T_{17} = 12 + 22 = 34,\\
T_{27} &= \lfloor 27/2 \rfloor + 1 + T_{22} = 14 + 34 = 48,\\
T_{32} &= \lfloor 32/2 \rfloor + 1 + T_{27} = 17 + 48 = 65,\\
T_{37} &= \lfloor 37/2 \rfloor + 1 + T_{32} = 19 + 65 = 84,
\end{aligned}
$$

Ответ: 37 монет можно уплатить с помощью монет в 1, 2, 5 рублей 84 различными способами. $\lhd$

$\rhd$ Математики могли бы заметить, что нам нужно вычислить коэффициент при x^{37} в произведении

$$(1 + x + x^2 + x + 3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots),$$

но с точки зрения вычислений это мало что даёт, даже если просуммировать бесконечные ряды и записать это произведение как

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 + x^7 - x^8},$$

откуда можно получить рекуррентное соотношение

$$T_n - T_{n-1} - T_{n-2} + T_{n-3} - T_{n-5} + T_{n-6} + T_{n-7} - T_{n-8} = 0.$$

Но с точки зрения вычислений это соотношение, пожалуй, даже менее удобно, потому что надо вычислять все T_n подряд[10]. Зато, если уметь пользоваться какой-нибудь компьютерной системой символьных вычислений, можно получить ответ почти сразу (на рисунке часть вывода системы `wolframalpha`, обведён нужный коэффициент).

[10]Если только n не очень велико и мы не вычисляем степень матрицы повторным возведением в квадрат.

series	$\dfrac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^5\right)}$	point	$x=0$

Series expansion at x = 0

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 11x^{11} + 13x^{12} + 14x^{13} + 16x^{14} + 18x^{15} + 20x^{16} + 22x^{17} + 24x^{18} + 26x^{19} + 29x^{20} + 31x^{21} + 34x^{22} + 36x^{23} + 39x^{24} + 42x^{25} + 45x^{26} + 48x^{27} + 51x^{28} + 54x^{29} + 58x^{30} + 61x^{31} + 65x^{32} + 68x^{33} + 72x^{34} + 76x^{35} + 80x^{36} + 84x^{37} + 88x^{38} + 92x^{39} + 97x^{40} + 101x^{41} + 106x^{42} + 110x^{43} + 115x^{44} + 120x^{45} + 125x^{46} + 130x^{47} + 135x^{48} + 140x^{49} + 146x^{50} + 151x^{51} + 157x^{52} + 162x^{53} + 168x^{54} + 174x^{55} + 180x^{56} + O\left(x^{57}\right)$$

◁

3.13* Найдите число решений уравнения $x + 2y + 5z = 37$ в целых неотрицательных числах.

▷ Решения — это варианты уплаты 37 рублей нашими монетами (x — число рублёвых монет, y и z — число двух- и пятирублёвых), так что их будет 84. ◁

В следующей задаче мы считаем способы разбиения целого положительного числа на любые целые положительные слагаемые (можно сказать, что теперь есть монеты любого целого достоинства). Скажем, для числа 5 есть такие разбиения:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,$$

всего 7 вариантов.

3.14* Как объяснить, что в этом перечислении мы не пропустили ни одного варианта? Найдите число разбиений для $n = 10$.

▷ Можно рассортировать варианты по *наибольшему входящему в них слагаемому*. Если это 5, то на этом всё и кончается, и есть только один вариант (никаких слагаемых больше нет). Если это 4, то остаётся ещё разложить 1 (единственный вариант), если 3, то остаётся разложить 2 (два варианта 2 и 1+1), если 2, то остаётся 3, *и надо представить его суммой слагаемых, не превосходящих* 2 (потому что иначе 2 не было бы наибольшим слагаемым), и это можно сделать двумя способами ($2+1$ и $1+1+1$). Наконец, если наибольшее слагаемое 1, то все остальные слагаемые тоже 1 (единственный способ).

Это же рассуждение можно применить для определения числа $T_{n,k}$ — количества разбиений n на слагаемые, не превосходящие k для $n \geqslant k \geqslant 0$. (Искомое число разбиений будет $T_{n,n}$.) А именно,

$$T_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} T_{n-i,i}$$

(считаем отдельно для каждого варианта наибольшего слагаемого i; может оказаться, что $i > n-i$, тогда в правой части $T_{n-i,i}$ нужно заменить на $T_{n-i,n-i}$, потому что тогда i перестаёт быть ограничением). Теперь можно заполнить таблицу для $T_{n,k}$ (при $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 10$, по вертикали откладывается n, по горизонтали k):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	2								
3	0	1	2	3							
4	0	1	3	4	5						
5	0	1	3	5	6	7					
6	0	1	4	7	9	10	11				
7	0	1	4	8	11	13	14	15			
8	0	1	5	10	15	18	20	21	22		
9	0	1	5	12	18	23	26	28	29	30	
10	0	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42

В правом нижнем углу стоит искомый ответ: 42. ◁

▷ Можно также написать коротную программу на каком-нибудь знакомом вам языке программирования (здесь использован питон)

```
N=10
T = [[0 for x in range(N+1)] for y in range(N+1)]
T[0][0]=1
for n in range(1,N+1):
  T[n][0]=0
  for k in range (1,n+1):
    T[n][k]= sum([(0 if n-i<0 else \
    (T[n-i][i] if i<=n-i else T[n-i][n-i]))\
    for i in range(1,k+1)] )
print ([T[i][i] for i in range(0,N+1)])

[1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42]
```

Есть и другое рекуррентное соотношение для количества $T_n (= T_{n,n})$ разбиений n на слагаемые, открытое Эйлером:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

Здесь знаки идут парами (два плюса, два минуса, потом снова два плюса и так далее), а вычитаемые из n числа получаются по формулам $k(3k-1)/2$ для первого члена пары и $k(3k+1)/2$ для второго члена пары ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Мы считаем, что $T_0 = 1$ и $T_i = 0$ при $i < 0$. Это соотношение связано с *пентагональной теоремой Эйлера*, говорящей, что в бесконечном произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \ldots$$

удивительным образом все ненулевые коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по указанным выше формулам. Название «пентагональная» связана с “pentagonal numbers” — пятиугольными числами, которые равны числу точек в составленных определённым образом пятиугольниках $(1, 5, 12, 22, 35, \ldots)$; мы не будем рисовать эту картинку (её можно посмотреть в википедии). Они появляются как степени в группах из двух членов одного знака. ◁

В последней задаче нужно найти, сколькими способами можно вычислить произведение n сомножителей, еесли сомножители нельзя переставлять, а можно только по-разному группировать. Скажем, для трёх сомножителей a, b, c есть два способа $(ab)c$ и $a(bc)$, а для четырёх есть пять способов $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ и $a(b(cd))$.

3.15* Найдите количество способов для 7 сомножителей.

▷ Для начала поймём, почему мы не пропустили ни одного способа для четырёх сомножителей. Посмотрим на *последнее* (в смысле порядка действий) умножение, которое даёт окончательный результат. Оно может быть в трёх местах: $a \cdot (bcd)$, $(ab) \cdot (cd)$ и $(abc) \cdot d$. Во втором случае есть только один вариант, а в первом и третьем случае есть два способа вычислить произведение (трёх сомножителей). Всего $2 + 1 + 2 = 5$ способов.

То же самое рассуждение позволяет получить общую формулу для числа способов для n сомножителей, которое мы обозначим через C_n:

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + C_3 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1.$$

Начав с $C_1 = 1$, мы можем вычислить $C_2 = 1 \cdot 1 = 1$, затем

$$
\begin{aligned}
&C_3 = C_1C_2 + C_2C_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2,\\
&C_4 = C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5,\\
&C_5 = C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14,\\
&C_6 = C_1C_5 + C_2C_4 + C_3C_3 + C_4C_2 + C_5C_1 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42,\\
&C_7 = C_1C_6 + C_2C_5 + C_3C_4 + C_4C_3 + C_5C_2 + C_6C_1 =\\
&\quad = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132,
\end{aligned}
$$

так что для семи сомножителей получается 132 способа. $\triangleleft$

$\triangleright$ Эти числа $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots)$ появляются во многих других задачах и называются *числами Каталана*. Обычно нумерацию сдвигают и считают n-м числом Каталана количество способов вычислить произведение из $n + 1$ сомножителей, так что в стандартных обозначениях наш ответ 132 будет C_6, а не C_7. Для чисел Каталана есть формула с факториалами $(2n)!/(n!(n + 1)!$, при $n = 6$ будет как раз $12!/(6!7!) = 132$. Мы ещё встретимся с числами Каталана в следующих разделах. $\triangleleft$