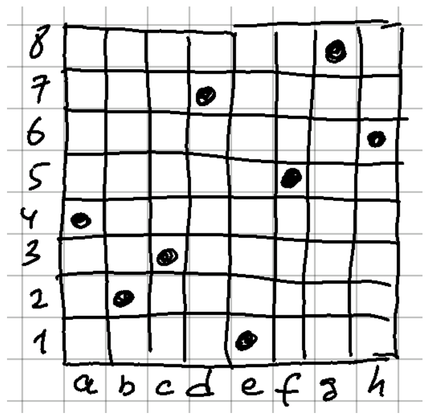
4. Соответствия

Мы разберём несколько задач, в которых полезно сравнивать размеры разных множеств, устанавливая между ними соответствия (что это значит, будет видно из примеров).

$\boxed{\textbf{4.1}}$ На шахматную доску 8×8 ставят 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. (Это значит, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали должно быть не больше одной ладьи.) Сколькими способами это можно сделать?

На рисунке показана одна из таких расстановок.



Говоря научно, мы установили *взаимно однозначное соответствие* между расстановками ладей, удовлетворяющими условию, и перестановками 8 цифр, и заключили отсюда, что искомых расстановок столько же, сколько перестановок 8 цифр.

В общем виде: если между двумя (конечными) множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число элементов.[11]

▷ Этот приём часто иллюстрируют примерами «из жизни»: скажем, чтобы проверить, что в комнате столько же человек, сколько стульев, надо попросить

[11]Оговорка про конечные множества тут важна: про бесконечные множества не сразу ясно, что такое «число элементов в них». Ещё Галилей заметил, что все целые положительные числа $1, 2, 3, 4, \ldots$ можно поставить в соответствие с точными квадратами $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, при котором число n соответствует квадрату n^2 — хотя квадраты составляют лишь небольшую часть целых чисел. Этим занимается теория множеств; число элементов в бесконечном множестве называется там его *мощностью*.

их сесть на стулья. Взаимная однозначность соответствия при этом означает две вещи: что никакие два человека не сидят на одном стуле («отображение людей в стулья является инъекцией», сказали бы математики) и что ни один стул не пустой («это отображение является сюръекцией»).

Философы заметили бы, что сам процесс счёта предметов представляет собой установление взаимно однозначного соответствия между пересчитываемыми предметами и числами $1, 2, 3, \ldots, n$ (для какого-то n, которое и называется числом предметов). Дальше бы они спросили, почему это n оказывается тем же при повторном пересчёте, но это уже совсем философский вопрос… ◁

4.2 Беня решал задачу о ладьях, не бьющих друг друга, и расссуждал так. Первую ладью можно поставить на доску 64 способами. После этого одна вертикаль и одна горизонталь выбывают, для второй ладьи разрешены только 49 клеток (7 вертикалей по 7 клеток в каждой). Для третьей будут доступны 36 клеток и так далее до последней ладьи, которой останется единственная возможная клетка. Получаем ответ

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (8!)^2.$$

Почему у него получился другой (и гораздо больший) ответ?

▷ Мораль: решая комбинаторную задачу, важно чётко понимать, *что именно* мы считаем (какие ситуации допустимы, и какие мы считаем одинаковыми, а какие разными). ◁

4.3* Какое максимальное число ладей, не бьющих друг друга, можно поставить на половину доски (прямоугольник 4×8 — скажем, левую половину доски)? Сколькими способами можно это сделать?

4.4 Аня хочет показать своей сестре фокус. Она пишет на листе бумаги

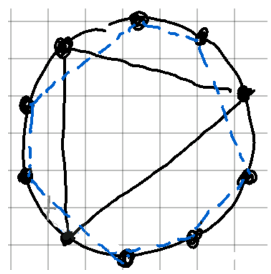
```
НАУКА
УМЕЕТ
МНОГО
ГИТИК
```

и предлагает сестре задумать одну из написанных букв и сказать, в каких строках эта буква есть (скажем, буква У есть в первой и второй строках, а буква И только в четвёртой). После чего она обязуется угадать задуманную букву. Сможет ли Аня гарантированно выполнить своё обещание?

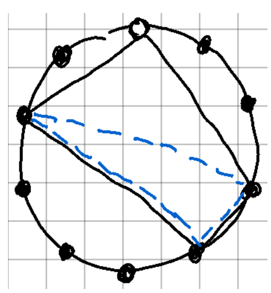
Получится ли этот фокус, если вместо `УМЕЕТ` во второй строке написать `ИМЕЕТ` (как герой повести Евгения Замятина «На куличках»)?

4.5 На окружности отмечено 10 точек. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках или семиугольников с вершинами в этих точках?

На рисунке показаны один такой треугольник и один такой семиугольник (мы считаем их непересекающимися, и вершины соединяются в порядке обхода по кругу).



4.6* На окружности отмечено 10 точек: девять чёрных и одна белая. Чего больше: многоугольников, у которых все вершины чёрные, или многоугольников, у которых есть и белая вершина (а остальные — чёрные)? Чего больше — треугольников с чёрными вершинами или четырёхугольников с одной белой и тремя чёрными вершинами?



Многоугольники в этой задаче — это треугольники, четырёхугольники и так далее (до десятиугольников, больше вершин нет). На рисунке показан один многоугольник (четырёхугольник) с белой вершиной и один (треугольник) без неё.

4.7 Объясните, почему следующие три вопроса имеют один и тот же ответ:

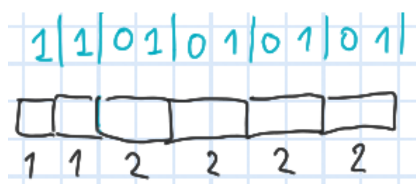
- Сколькими способами можно замостить полоску 10×1, если разрешается использовать плитки 1×1 и 1×2?

- Сколькими способами можно представить 10 в виде суммы слагаемых, используя только 1 и 2 (и учитывая порядок слагаемых, скажем, варианты $1+1+2+2+2+2$ и $2+2+2+2+1+1$ считаются за разные)?

- Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек, делая шаги в одну или две ступеньки. Сколькими различными способами он может это сделать?

$\boxed{\mathbf{4.8}^*}$ Найдите количество способов в предыдущей задаче (как мы уже знаем, одно и то же для всех трёх вариантов).

$\boxed{\mathbf{4.9}^*}$ Решая предыдущую задачу, Беня вспомнил, что мы считали последовательности нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд, и разбивали последовательности на блоки 1 и 01 (слева направо, задача 3.8). Теперь мы разрезаем полоску длины 10 на квадраты 1×1, в которых можно написать 1, и доминошки 2×1, в которых можно написать 01. Значит, каждому разрезанию соответствует «хорошее» двоичное слово длины 10, в котором нет двух нулей подряд.



А хороших слов было 144, значит и разрезаний 144. Прав ли Беня?

$\boxed{\mathbf{4.10}^*}$ Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы целых положительных слагаемых с учётом порядка? (Скажем, для числа 3 способы $1+2$ и $2+1$ считаются разными, а всего способов четыре: есть ещё 3 и $1+1+1$.)

$\boxed{\mathbf{4.11}^*}$ Мы уже знаем, что есть 2^{10} двоичных слов длины 10 (см. задачу 2.11). В некоторых из них чётное число единиц (скажем, в слове `0000000000` или в `1111111111`), а в некоторых нечётное (скажем, в слове `0101010101`). Каких слов больше — с чётным или с нечётным числом единиц?

Иногда полезны и не взаимно однозначные соответствия: бывают случаи, когда каждый объект одного типа соответствует какому-то фиксированному числу k объектов другого типа. Скажем, если школьники в классе решали задачи из списка и каждый школьник решил две задачи, а каждую задачу решил ровно один школьник, то задач в списке вдвое больше, чем школьников в классе.

4.12 В классе n школьников, и на каникулах каждый отправил по одному письму каждому (кроме себя, естественно). Сколько всего писем было написано? После каникул они встретились, и каждый пожал руку каждому (по одному разу). Сколько было рукопожатий?

▷ Можно было бы опасаться: вдруг $n(n-1)$ не разделится? Но, с одной стороны, мы доказали, что число писем вдвое больше числа рукопожатий, поэтому должно делиться. С другой стороны (если одного доказательства вам мало), одно из двух соседних чисел n и $n-1$ всегда чётно, поэтому произведение тоже чётно.

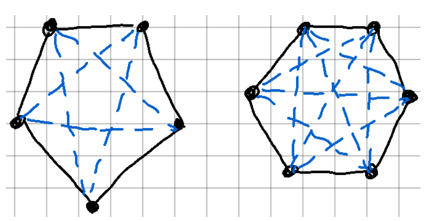
Ещё можно рассуждать так: если T_n — число рукопожатий для n школьников, то посмотрим на одного из них. Он сделает $n-1$ рукопожатий, и если их не учитывать, то получится задача с $n-1$ школьниками. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n &= (n-1) + T_{n-1} = (n-1) + (n-2) + T_{n-2} = \ldots \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + T_2 = \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n(n-1)/2 \end{aligned}$$

(последнее равенство мы уже имели случай обсуждать по другому поводу в задаче 1.11). ◁

4.13 Сколько диагоналей в (выпуклом) n-угольнике?

На картинке видно, что у пятиугольника пять диагоналей (образующих пятиконечную звезду), а у шестиугольника девять.



• Мы оговорили, что многоугольник выпуклый, чтобы не разбираться, учитывать ли диагонали, идущие снаружи многоугольника и т.п.

В следующей задаче мы по существу интересуемся количеством трёхэлементных подмножеств десятиэлементного множества. Но поскольку считается, что слова «множество» и «подмножество» пугают, скажем иначе.

4.14 Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать трёх, которые останутся сторожить вещи и разводить костёр, пока остальные семь пойдут на прогулку. Сколькими способами можно это сделать?

4.15 Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать 7 человек, которые пойдут на прогулку, пока остальные сторожат вещи и разводят костёр. Сколькими способами можно это сделать?

4.16 Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно три единицы? Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно семь единиц?

4.17 Сколько существует двоичных слов длины 5 с двумя единицами (и тремя нулями). Как объяснить, что их число равно числу кратчайших путей из одного угла прямоугольника 2×3 в другой (задача 3.3)?

Иногда полезно рассматривать и соответствия, в которых на каждый объект первого типа приходится m объектов второго типа, а на каждый объект второго типа приходится n объектов первого типа. Такая ситуация возникает в следующей задаче.

4.18 В классе 30 школьников, они решали задачи из некоторого списка, при этом вышло так, что каждый школьник решил по две задачи, а каждая задача из списка была решена (ровно) тремя школьниками. Сколько задач в списке?

Этот приём позволяет решить следующую задачу почти что в уме.

4.19* Пусть A — число способов выбрать 10 предметов из 30, а B — число способов выбрать 11 предметов из 30. Кто больше — A или B — и во сколько раз?

Вот ещё одна задача с неожиданно простым решением, надо только правильно выбрать соответствие.

4.20* Сколько существует двоичных слов длины 12 с тремя единицами, в которых единицы не идут подряд (между любыми двумя единицами есть хотя бы один нуль)?

В большинстве решённых нами задач мы так или иначе сталкивались с *числами сочетаний* (которые также называют *биномиальными коэффициентами*), то есть с числом способов выбрать k элементов из n элементов. В следующем разделе мы посмотрим на них более систематически (и узнаем, что это за «бином», у которого коэффициенты), но полезно привыкнуть к ним заранее в простых ситуациях.

4.21 Сколько различных слов (осмысленных или нет) можно получить, переставляя буквы в слове ПАРК? Тот же вопрос для слов ПАРА и ПАПА.

4.22* (Продолжение) Тот же вопрос для слов ПАППА и МАТЕМАТИКА.

• Мы встретимся ещё раз с подобной задачей, рассматривая мультиномиальные коэффициенты.

4.23 Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны и различны? Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны, различны и идут в убывающем порядке? (Скажем, число 1573 подходит в первом случае, но не во втором, а число 9531 годится в обоих случаях.)