5. Сочетания и бином

Сейчас мы сформулируем в общем виде определения и результаты, которые уже не раз встречались в предыдущих разделах.

Пусть n и k — целые числа, причём $0 \leqslant k \leqslant n$. *Числом сочетаний из n по k* называется число способов выбрать набор из k предметов (порядок не учитывается) из n данных нам предметов. (На более математическом языке: число k-элементных подмножеств n-элементного множества.)

По-русски число сочетаний из n по k обычно обозначают C_n^k, хотя в последнее время употребительно и принятое в английских текстах обозначение $\binom{n}{k}$. Запись C_n^k обычно читают «цэ из эн по ка» (буква C не от слова «сочетание», а от слова “combinations”). Например $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, поскольку из четырёх букв a, b, c, d можно выбрать две буквы (без учёта порядка) шестью способами: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$.

5.1 Чему равны C_n^0, C_n^1, C_n^{n-1}, C_n^n? (Мы предполагаем, что $n \geqslant 0$, а для второго и третьего выражений $n \geqslant 1$.)

▷ Сразу ясно, что $C_n^1 = n$ (если надо выбрать один предмет из n, это можно сделать n способами). Также и $C_n^{n-1} = n$ (если надо выбрать $n-1$ предметов из n, по существу надо решить, какой предмет *не* выбирать).

Чему равно C_n^0? Надо из n предметов выбрать 0 — то есть ничего не выбирать. Тут есть единственный вариант, так что $C_n^0 = 1$. (Математики сказали бы, что «у n-элементного множества есть единственное пустое подмножество».) Также и $C_n^n = 1$: если из n предметов надо взять n, то никакого выбора по существу нет, вариант единственный.

Обратите внимание, что C_0^0 тоже равно 1 («выбираем пустое подмножество пустого множества единственным способом»). ◁

▷ Иногда удобно считать, что $C_n^k = 0$ при $k < 0$ и $k > n$ (но мы будем стараться оговаривать такие случаи явно). ◁

5.2 Докажите, что при $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

▷ Выбрать k элементов из n — всё равно что решить, какие $n-k$ элементов оставить. ◁

• Более симметричный способ записи этого тождества: $C_{k+l}^{k} = C_{k+l}^{l}$ при целых $k, l \geqslant 0$: выбрать k из $k+l$ элементов (и оставить l) всё равно что выбрать l и оставить k.

5.3 Докажите, что C_n^k (при $0 \leqslant k \leqslant n$) равно числу двоичных слов длины n, в которых ровно k единиц.

▷ Можно построить взаимно однозначное соответствие между способами выбрать k предметов из n и двоичными словами длины n, в которых k единиц: для этого составим список всех предметов и будем записывать выбор нулями и единицами: если очередной предмет не берём, пишем 0, если берём, пишем 1. Мы это уже упоминали (для конкретного примера) в задаче 4.17. ◁

▷ Можно представить себе такую картину: мы просматриваем по очереди все двоичные слова длины n, и раскладываем их по ящикам с надписями $0, 1, 2, \ldots, n$ в зависимости от числа единиц (как сказали бы статистики, «строим гистограмму»). По окончанию работы в ящике k окажется C_n^k слов.

При бо́льших n подавляющее большинство слов окажется в ящиках, близких к среднему (при $k \approx n/2$); в теории вероятностей это называют «законом бо́льших чисел». ◁

5.4 Докажите, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

при любом $n \geqslant 0$.

▷ Все 2^n двоичных слов длины n делятся на группы в зависимости от числа единиц: в группе, где k единиц, будет C_n^k слов. ◁

5.5* Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$$

при любом $n \geqslant 0$. (Знаки чередуются, поэтому знак плюс или минус перед последним членом зависит от чётности n.)

▷ Здесь написано, что слов длины n с чётным и нечётным числом единиц поровну, а это мы уже видели в задаче 4.11 (они объединяются в пары, отличающиеся только последним битом). ◁

5.6 Докажите формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• В числителе первой дроби стоит k сомножителей (как и в знаменателе)

▷ Мы уже много раз встречались с этим рассуждением (задачи 2.14, 4.2, 4.12, 4.14): если считать способы последовательно выбрать k предметов (с учётом порядка), то их будет как раз $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (первый n способами, после этого второй $n-1$ способами и так далее, последний мы выбираем из $n-k+1$ предметов). Когда мы перестаём учитывать порядок, все способы, отличающиеся перестановками k выбранных предметов (их $k!$) сливаются в один, так что найденное число надо поделить на $k!$.

Второй вариант формулы получается из первого, если домножить числитель и знаменатель на $(n-k)!$, тогда сверху получится как раз $n!$. ◁

• Чтобы эта формула имела смысл при всех $0 \leqslant k \leqslant n$, надо считать $0! = 1! = 1$ (что вообще логично, если мы хотим, чтоб равенство $n! = n \cdot (n-1)!$ выполнялось при $n = 2$ и при $n = 1$).

Более симметричная запись той же формулы: $C_{k+l}^{k} = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}$ при $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

5.7* Докажите, что при любом $k \geqslant 2$ произведение любых последовательных k целых положительных чисел делится на $k!$. (Например, $n(n-1)$ всегда чётно, а $n(n-1)(n-2)$ всегда делится на 6.)

▷ Произведение $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ делится на $k!$ нацело, потому что частное равно числу сочетаний из n по k. ◁

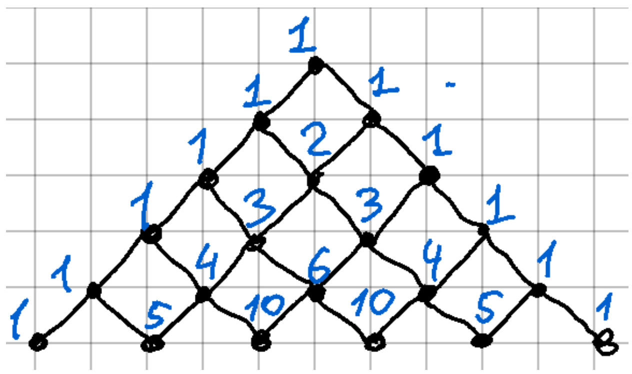
• Слово «положительные» в утверждении можно опустить: если числа все отрицательные, то можно изменить знак, а если есть нуль, то произведение равно нулю и делится на что угодно.

▷ Мы уже встречались (задача 4.12) с этим утверждением при $k = 2$: произведение $n(n-1)$ всегда чётно, так как одно из чисел n и $n-1$ чётно. Для произвольного k уже не так просто это доказать, не рассматривая число сочетаний (но можно: надо заметить, что кратные любого числа встречаютстся в произведении k подряд идущих чисел не меньше раз, чем в произведении чисел от 1 до k, потому что второе произведение начинается в самом невыгодном месте, и применить это утверждение к степеням простых чисел). ◁

5.8 Докажите, что число сочетаний C_{k+l}^{k} равно числу кратчайших путей из одного угла в другой для прямоугольного города $k \times l$, разрезанного улицами на квадратные кварталы 1×1.

▷ Для прямоугольника 2×3 мы это уже обсуждали в задаче 4.17. Кратчайшие пути могут быть закодированы последовательностями букв П и В (шаги направо и вверх; мы считаем, что идём из левого нижнего угла в правый верхний в прямоугольнике ширины k и высоты l), в котором k букв П и l букв В. А таких последовательностей, как мы видели, как раз C_{k+l}^{k} (или C_{k+l}^{l} — условие задачи симметрично относительно k и l). ◁

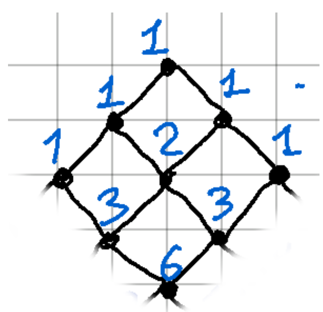
Мы уже записывали число путей для прямоугольников разного размера (в каждой точке записано число путей из вершины сверху-вниз по дорогам):



Теперь мы знаем, что эти числа соответствуют числам сочетаний C_n^k при различных n и k. Например, число 10 в нижней строке соответствует C_5^2 (а другое число 10 в той же строке соответствует C_5^3).

5.9 Найдите на этой картинке число C_4^2: числу путей в каком прямоугольнике оно соответствует?

▷ Это число способов выбрать две позиции из четырёх, или число слов из четырёх букв, содержащих по две буквы П и В. Значит, это число путей из одного угла квадрата 2×2 в другой — и действительно в нижнем углу такого квадрата на рисунке стоит число $6 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$.



◁

$\boxed{5.10}$ Докажите рекуррентную формулу

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

при $n \geqslant 1$ и $0 < k < n$.

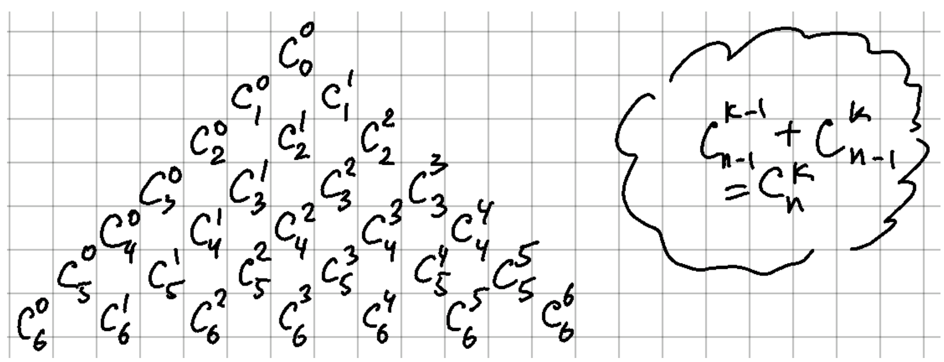
• Можно понять, что это означает в терминах числа путей. Величина C_n^k соответствует прямоугольнику размера $k \times (n-k)$. Величины в правой части тогда соответствуют прямоугольникам размера $(k-1) \times (n-k)$ и $k \times (n-k-1)$. Если, как и раньше, обозначить $n-k$ за l, то наша формула утверждает, что число путей из угла в угол для прямоугольника $k \times l$ равно сумме таких чисел для прямоугольников $k \times (l-1)$ и $(k-1) \times l$ — мы как раз это и использовали, когда начинали считать число путей. Но мы изложим по существу то же рассуждение более комбинаторно.

▷ Нас интересует число k-элементных подмножеств n-элементного множества. Зафиксируем какой-то элемент x нашего n-элементного множества (всё равно какой, но раз и навсегда) и поделим все k-элементные подмножества на две категории: которые содержат x и которые не содержат. Посчитаем, сколько тех и других — сумма будет равна C_n^k. (Все варианты назначения k дежурных из n человек делятся на две группы — когда Вася дежурит и когда нет.)

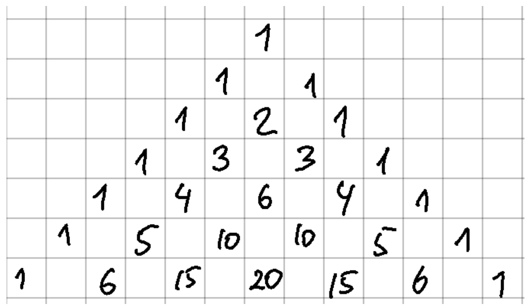
Те, которые содержат x: один элемент уже выбран, осталось выбрать $k-1$ элементов из $n-1$ (не считая уже выбранного x), вариантов C_{n-1}^{k-1}.

Те, которые не содержат x: решено x не использовать, так что надо выбрать k элементов из оставшихся $n-1$, вариантов C_{n-1}^k. ◁

Удобно записать числа сочетаний в треугольную таблицу (мы это уже делали, считая пути в разделе 3).



Тогда рекуррентную формулу предыдущей задачи можно сформулировать так: каждое число в этой таблице равно сумме чисел слева и справа от него в предыдущей строке. Зная, что на левом и правом краю этого *треугольника Паскаля* стоят единицы, его легко заполнять, переходя от строки к строке (достаточно уметь складывать):



▷ Из этой картинки видно, скажем, что $C_6^2 = 15$. Можно проверить это по формуле:

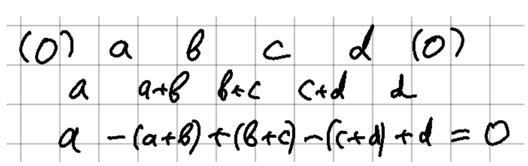
$$\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Если надо вычислить всю таблицу, то проще складывать верхних соседей, чем применять формулу с произведениями. (Даже если нужно вычислить только одно число, может быть проще заполнить таблицу до этого места, чем перемножать и делить большие числа.)

Для единиц с краю правило суммы не годится (потому что один сосед выходит за пределы треугольника). Таких исключений не будет, если договориться, что слева и справа от треугольника стоят одни нули. ◁

$\boxed{\textbf{5.11}^*}$ Докажите, используя правило заполнения треугольника Паскаля, что знакопеременная сумма чисел в любой его строке равна нулю ($1 - 2 + 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ и так далее).

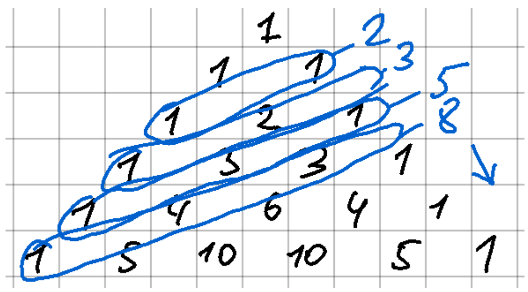
▷ Мы уже решали эту задачу (0.5) — но теперь это можно увидеть сразу, зная правило построения строк треугольника. Неважно, что стоит в n-й строке — если только мы строим $(n+1)$-ю строку по правилу сложения верхних соседей, её знакопеременная сумма будет равна нулю. В самом деле, если мы распишем каждое число через двух верхних соседей, то всё сократится



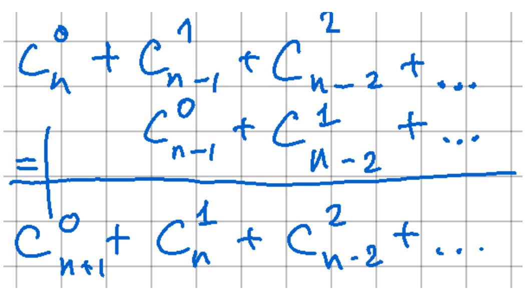
(полезно договориться, что слева и справа от треугольника стоят нули). ◁

• Если брать просто сумму (не знакопеременную), то видно, что она будет равна удвоенной сумме чисел предыдущей строки — что подтверждает ещё раз, что суммы по строкам растут как степени двойки.

$\boxed{\textbf{5.12}^{*}}$ Покажите, что суммы чисел в треугольнике Паскаля по наклонным прямым являются числами Фибоначчи:



▷ Поскольку несколько первых сумм там правильные, достаточно проверить, что дальше выполняется закон построения чисел Фибоначчи (каждое число равно сумме двух соседних). Это видно на картинке (многоточия означают, что мы продолжаем складывать, пока члены не станут нулевыми, выйдя из треугольника Паскаля).



В строках написаны три соседние суммы по наклонным, и видно, что в каждом столбце нижнее число равно сумме двух верхних (исключением является первый столбец, но там оба числа равны 1). Чтобы не разбираться с тем, что происходит в конце сумм, удобно считать, что суммы продолжены до бесконечности нулями вне треугольника Паскаля. ◁

Теперь объясним, почему числа сочетаний называют ещё *биномиальными коэффициентами*. *Бино́м* — по-русски «двучле́н» — название для *полино́ма* (многочле́на), который содержит два *моно́ма* (одночле́на). Что будет, если возводить простейший бином $(a+b)$ в разные степени? Хорошо известна формула

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Чуть сложнее формула

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Что будет дальше, для четвёртой степени? Попробуем это себе представить, не выписывая всех членов. Мы раскрываем скобки в произведении четырёх скобок $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, сколько и какие члены получатся? Из каждой скобки нужно выбрать a или b, и все четыре буквы перемножить. Другими словами, нужно взять все четырёхбуквенные слова из букв a, b, считать их произведениями и сгруппировать одинаковые слагаемые (*приведение подобных*). В каждую группу подобных членов попадут слова с одинаковым числом букв a и b.

Скажем, a^4 будет в единственном числе (из всех скобок надо выбрать букву a), а a^3b встретится 4 раза (так как буква b может быть на любом из четырёх мест $baaa$, $abaa$, $aaba$, $aaab$). Дальше будет a^2b^2, и коэффициент будет равен числу слов длины 4 с двумя буквами a и двумя буквами b. Таких членов 6, а именно $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $babb$. При ab^3 будет тот же коэффициент 4, что при a^3b; наконец, b^4 встретится один раз. Получится

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Видно, что коэффициенты соответствуют строке треугольника Паскаля, и это не удивительно, потому что количество слов длины n, в которых k букв a, как раз равно C_n^k (надо выбрать из n позиций k мест для букв a). То же рассуждение показывает, что

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n}$$

Можно было бы для единообразия вместо a^n и b^n написать $C_n^0 a^n b^0$ и $C_n^n a^0 b^n$. А можно, наоборот, вспомнить формулы для C_n^k и написать более явно

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Правую часть даже не надо обрывать специально, потому что коэффициент обратится в нуль — появится скобка $(n-n)$ и продолжать формулу дальше не надо (последний ненулевой будет как раз $n!/n! = 1 = C_n^n$).

$\boxed{\textbf{5.13}}$ Что получится, если в формулу для бинома (та, что выше в рамке) подставить $a = 1$, $b = 1$? А если подставить $a = 1$, $b = -1$?

▷ При $a = b = 1$ получаем

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n,$$

что мы уже доказывали (сумма строки в треугольнике Паскаля равна 2^n, задача 0.4). При $a = 1$, $b = -1$ получаем

$$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

что мы тоже уже видели (знакопеременная сумма равна нулю, задача 0.5). ◁

▷ Используя традиционные обозначения для суммирования, наши равенства можно записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

◁

$\boxed{\textbf{5.14}^*}$ Подставляя $a = 1$, $b = 2$ в формулу для бинома, получаем тождество

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^k C_n^k + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Как доказать его комбинаторно, не используя формулы бинома?

▷ Естественная комбинаторная интерпретация для 3^n — это слова длины n из букв a, b, c (или в любом другом трёхбуквенном алфавите). Теперь их нужно разбить на части, соответствующие отдельным слагаемым. Это можно сделать, поместив в одну часть слова с данным числом букв a. В самом деле, сколько есть слов длины n, в которых есть k букв a? Для этого надо выбрать, где находятся эти буквы, это можно сделать C_n^k способами. Кроме того, надо решить, какая буква (b или c) стоит на каждом из оставшихся мест. Получаем $C_n^k 2^{n-k}$ способов, и мы доказали тождество $3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}$. Это почти то, что надо, остаётся заменить переменную суммирования, взяв $l = n - k$ и заметив, что $C_n^k = C_n^l$. ◁

▷ Забудем временно о том, что в формуле бинома n — целое число, и подставим, скажем $a = 1$, $b = x$ и $n = 1/2$. Получится формула

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

с бесконечной суммой в правой части (потому что теперь уже коэффициенты не обращаются в нуль). Но удивительным образом эта формула имеет смысл, и даже несколько разных смыслов. При малых x (меньших 1 по модулю) её можно воспринимать как приближённую формулу: если брать больше членов в правой части, будет всё точнее и точнее. А можно формально вычислять квадрат правой части, то есть произведение

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots\right)= \\ =1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)x^3+\ldots= \\ =1+x+0x^2+0x^3+\ldots\end{gathered}$$

и наблюдать, что всё больше и больше коэффициентов оказываются равными нулю, и остаётся $1 + x$, как и должно быть при возведении в квадрат $(1 + x)^{1/2}$.

Формулу бинома с нецелыми показателями придумал Ньютон — в честь которого теперь говорят «бином Ньютона» (хотя для целых положительных показателей это было известно многим и до Ньютона). Кстати, и для отрицательных показателей это имеет смысл: подставив $n = -1$, мы получим $(1 + x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$ (проверьте, что именно такие коэффициенты получаются), формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. ◁

$\boxed{\textbf{5.15}^*}$ Аня придумала способ находить биномиальные коэффициенты на калькуляторе: $11^2 = 121$ (вторая строка треугольника Паскаля), $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Но с $11^5 = 161051$ вышло что-то не то, и Аня задумалась. «А-а-а, конечно, тут же двузначные коэффициенты… Но ничего страшного, я сейчас вычислю ⟨…⟩» — и всё получилось. Что сделала Аня и почему всё получилось?

▷ По формуле бинома Ньютона $(1 + 10)^2 = 1\cdot 10^0 + 2\cdot 10^1 + 1\cdot 10^2$, то есть разряды — биномиальные коэффициенты. Так же будет и для $(1 + 10)^3$: коэффициенты при 1, 10, 10^2, 10^3 будут 1, 3, 3, 1, аналогично и для $(1 + 10)^4$. Но для пятой степени появляются *двузначные* биномиальные коэффициенты, которые смешиваются с коэффициентом в старшем разряде (получаются «цифры» 1, 5, 10, 10, 5, 1, и единица от 10 портит пятёрку, получается 6). Но можно вычислить $101^5 = 1\,05\,10\,10\,05\,01$ и поделить его на группы по две цифры с конца, тогда такого не будет и все биномиальные коэффициенты видны, потому что $(1+100)^5 = 1 + 5\cdot 100 + 10\cdot 100^2 + 10\cdot 100^3 + 5\cdot 100^4 + 1\cdot 100^5$. $\triangleleft$

Рассматривая треугольник Паскаля с разных сторон, можно обнаружить интересные закономерности. Приведём несколько примеров.

$\boxed{\mathbf{5.16}}^*$ Докажите, что сумма *квадратов* всех чисел в строке треугольника Паскаля стоит в нём в середине строки с вдвое большим номером:

$$(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(Например, $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = C_6^3$.)

$\triangleright$ Можно доказывать это с помощью биномиального разложения. Возведём в квадрат разложение для $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n(1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)\cdot(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n).$$

Какой в этом выражении будет коэффициент при x^n? Слева стоит $(1+x)^{2n}$, поэтому коэффициент должен быть C_{2n}^n. С другой стороны, коэффициент при x^n в правой части можно вычислить по правилу перемножения многочленов (взяв все произведения, дающие x^n, и сложив их коэффициенты). Получится

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \ldots + C_n^n C_n^0.$$

Поскольку $C_n^{n-i} = C_n^i$, то это и будет сумма квадратов биномиальных коэффициентов в строке треугольника Паскаля. Остаётся сослаться на такой алгебраический факт: если два многочлена равны при всех значениях переменной, то их коэффициенты одинаковы.

Если мы не хотим этим фактом пользоваться, можно изложить по существу то же рассуждение комбинаторно. Число C_{2n}^n равно способу выбрать n предметов из $2n$ предметов. Разобьём эти самые $2n$ предметов на две группы по n предметов. Тогда нам надо выбрать сколько-то (пусть k) предметов из первой группы и сколько-то из второй, чтобы в сумме было n предметов.

Сколько есть вариантов с данным k? Выбор из первой группы осуществляется C_n^k способами, из второй C_n^{n-k} способами, которые можно комбинировать со всеми способами первой группы. Всего вариантов выбора с данным k будет поэтому $C_n^k C_n^{n-k}$, то есть $(C_n^k)^2$, потому что $C_n^k = C_n^{n-k}$. А всего вариантов (с любым k от 0 до n) будет C_{2n}^n, откуда и получаем искомое тождество. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{5.17}}^*$ Докажите, что

$$C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_m^k C_n^0.$$

(В правой части в некоторых биномиальных коэффициентах C_u^v может быть $v > u$, такие коэффициенты считаем равными нулю.)

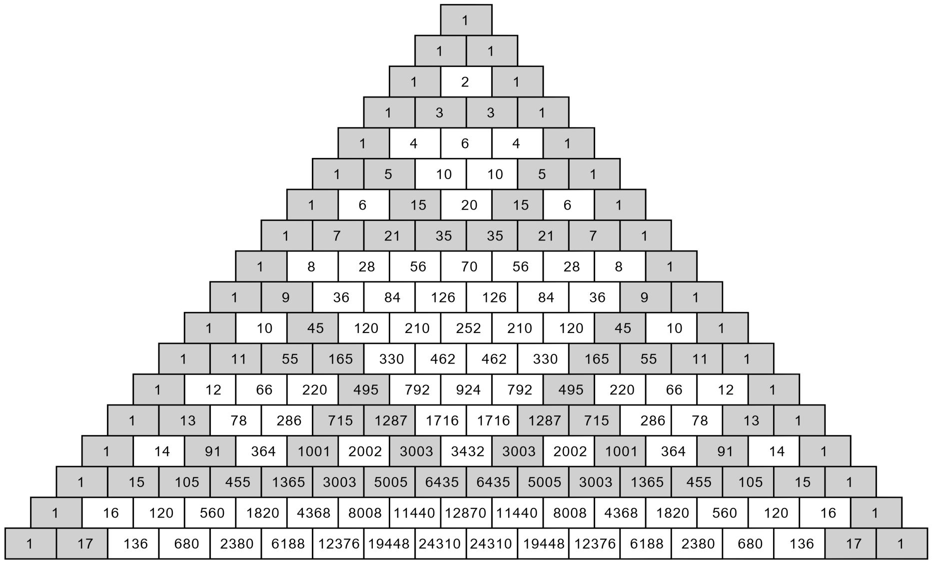
▷ То же рассуждение, что в предыдущей задаче: множество из $m+n$ элементов разбиваем на части из m и n элементов, а все варианты выбора k элементов мы разбиваем на группы — номер группы определяется тем, сколько элементов выбрано из первой части. ◁

$\boxed{\mathbf{5.18}^*}$ Докажите, что до середины числа в каждой строке треугольника Паскаля возрастают, а потом убывают (так что наибольшим является число в середине — или два одинаковых числа, в зависимости от чётности номера строки).

▷ Сравним два соседних числа в строке, то есть C_n^k и C_n^{k+1}. Вспомним формулу и заметим, что во втором появляются дополнительно множители $n-k$ в числителе и $k+1$ в знаменателе, то есть второе получается из первого умножением на $(n-k)/(k+1)$. При $n-k > k+1$, то есть при $2k < n-1$ (слева от середины) этот множитель больше 1, а дальше он становится либо равным 1 (тогда есть два одинаковых числа), либо сразу становится меньше 1, откуда и следует требуемое утверждение.

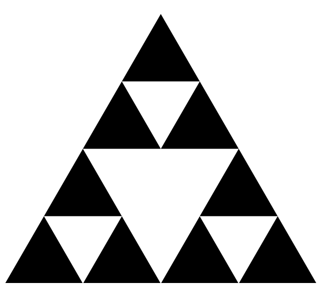
Заметим ещё, что это отношение соседних членов мы уже вычисляли комбинаторно (задача 4.19), изучив, сколькими способами можно получить $(k+1)$-элементное подмножество из данного k-элементного и из скольких k-элементных получается данное $(k+1)$-элементное. ◁

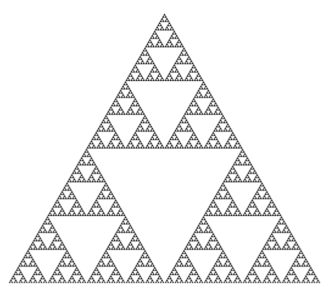
Рассматривая треугольник Паскаля, можно заметить, что там бывают строки, состоящие только из нечётных чисел, а также строки, в которых все числа (кроме крайних единиц) чётны. В википедии есть соответствующая картинка — числа там мелкие, но нечётные числа выделены цветом, и можно рассматривать соответствующий узор:



Хорошо видны и серые горизонтали, на которых стоят только нечётные числа, и серые треугольники с дырками, на них опирающиеся.

▷ Любители красивых картинок, вероятно, узнают тут «треугольник Серпинского». Он получается, если из треугольника выбросить середину (треугольник из средних линий), потом с каждым получившимся треугольником сделать то же самое (см. левый рисунок), и продолжать так до бесконечности (ещё несколько шагов показаны на правом рисунке, дальнейшее выбрасывание уже на рисунке не увидишь). Такие фигуры называются «самоподобными фракта́лами». Самоподобными — потому что фигура состоит из трех своих вдвое меньших копий, стянутых гомотетично к вершинам. Фракталами — потому что они имеют «размерность» между 1 и 2, что-то среднее между линиями и плоскими фигурами (со внутренностью). Мы не будем про это говорить подробно, ограничившись уже указанным выше свойством треугольника Паскаля.





◁

$\boxed{\textbf{5.19}^*}$ Докажите, что при $n = 1, 3, 7, 15, \ldots$ (числа, на единицу меньшие степеней двойки) все биномиальные коэффициенты C_n^k нечётны (при всех k от 0 до n).

▷ Это утверждение (частный случай *теоремы Люка́*) можно доказать, подсчитывая количество степеней двойки в разложениях числителя и знаменателя в формуле для числа сочетаний, но мы приведём более наглядное доказательство с треугольником Паскаля.

Прежде всего заметим, что достаточно знать только чётность и нечётность чисел в строке, чтобы определить чётность и нечётность в следующей строке (сложение по модулю 2). Можно представлять себе дело так, что мы выращиваем сверху вниз наш рисунок, добавляя следующую строку из белых и серых клеток (складывая пары чисел в предыдущей). А начинаем мы с «зародыша» из одной серой клетки (самой верхней).

Посмотрим на строку 7 (для $n = 7$, по счёту она восьмая, если считать с единицы). Там стоят одни единицы. Значит можно сразу же сказать, что в следующей строке только крайние числа будут серыми, остальные белыми (чётными). Что будет дальше? Из двух серых клеток начнут расти такие же треугольники, как из зародыша, потому что вокруг них чётные числа. Так будет, пока растущие колонии не коснутся друг друга — это происходит в строке 15. В этой строке получатся все нечётные числа, значит, в строке 16 будут все чётные (белые) — кроме крайних клеток, которые будут серыми. Дальше из этих крайних клеток начнут расти две колонии, и расстояние между ними будет уменьшаться на 1 на каждом шаге. В строке 16 расстояние равно 15, значит, оно дойдёт до нуля в строке 31, где будут одни нечётные числа (как и требует доказываемое утверждение). В строке 32 будут две единицы и 31 белых клеток между ними, интервал будет уменьшаться, пока в строке $63 = 32 + 31$ не дойдёт до нуля, и так далее (рассуждение по индукции). ◁

• Это рассуждение объясняет и самоподобную природу рисунка: два новых треугольника, растущих из крайних клеток, растут в точности так же, как и начальный треугольник сверху от них.

Бином Ньютона указывает коэффициенты в разложении $(a + b)^n$. Можно задать себе аналогичный вопрос про $(a + b + c)^n$ — какие там коэффициенты? Скажем

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

что легко проверить (коэффициент 2 возникает, когда ab соединяется с ba и так далее). Чуть сложнее вычислить

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Но какая тут общая формула? Следующая задача отвечает на этот вопрос.

5.20* Докажите, что $(a+b+c)^n$ состоит из членов вида $a^p b^q c^r$, где $p, q, r \geqslant 0$, $p+q+r=n$, а коэффициент при $a^p b^q c^r$ равен

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

(*мультиномиальные коэффициенты*).

▷ Раскрывая скобки в $(a+b+c)^n$, мы получим сумму всех слов длины n, составленных из букв a, b, c (слово понимается как произведение букв). Нам надо найти, сколько будет слов, где есть p букв a, есть q букв b и r букв c. Это мы уже проходили (задача 4.22): надо временно представить себе, что все буквы a пронумерованы от 1 до p, все буквы b пронумерованы от 1 до q и все буквы c пронумерованы от 1 до r. Тогда у нас n разных букв, и $n!$ слов. Объединим в одну группу слова, которые соответствуют одному слову при стирании номеров букв. В каждой группе $p!q!r!$ слов, потому что в ненумерованном слове нужно расставить номера букв a (это можно сделать $p!$ способами), потом номера букв b (это можно сделать $q!$ способами) и номера букв c (это можно сделать $r!$ способами). ◁

Аналогичная формула (по тем же причинам) есть для любого числа слагаемых: скажем, $(a+b+c+d)^n$ равно сумме одночленов $a^p b^q c^r d^s$ с $p+q+r+s=n$, а коэффициенты равны $n!/(p!q!r!s!)$.

В заключение приведём ещё одну ситуацию, где появляются биномиальные коэффициенты.

5.21* Докажите, что число решений уравнения $x+y+z=10$ в целых неотрицательных числах равно C_{12}^2. Чему равно число решений уравнения $x+y+z=13$ в целых положительных числах?

Решением уравнения $x+y+z=10$ считается тройка чисел (x, y, z), где все три числа целые и неотрицательные, и в сумме дают 10. Скажем, $(1, 3, 6)$ и $(3, 1, 6)$ — два решения этого уравнения, причём различные.

▷ Установим взаимно однозначное соответствие между двоичными словами длины 12 с двумя единицами и решениями этого уравнения. Взяв слово, найдём в нём две единицы, и посчитаем, сколько нулей стоит в интервалах, на которые они разбивают слово. Получатся три числа, которые мы запишем (слева направо) и получим тройку чисел, в сумме равных общему числу нулей (то есть 10).

Например, слово 010001000000 соответствует тройке $(1, 3, 6)$ (сначала один нуль, потом три нуля, в конце шесть нулей), а слово 100000000001 соответствует тройке $(0, 10, 0)$.

Легко понять, что это соответствие взаимно однозначное (по решению легко указать соответствующее слово, и наоборот), так что количество решений равно количеству слов, то есть C_{12}^2.

Что касается второго уравнения, то положительное число x можно записать в виде $1+x'$, где x' — неотрицательное, так что для x', y', z' получаем уравнение $x' + y +' z' = 10$, и ответ тот же самый: C_{12}^2. А можно вспомнить (задача 4.10), что решения уравнения $x + y + z = 13$ соответствуют движению по участку железной дороги с 13 перегонами, в котором мы делаем две остановки, и надо выбрать 2 места остановки из 12 возможных. ◁

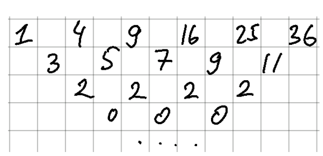
• Это рассуждение часто называют по-русски «шары и перегородки», потому что мы находим x, y, z как числа шаров (нулей) в группах, разделённых перегородками (единицами). Такое же рассуждение с n шарами и $k-1$ перегородками даёт и общую формулу.

Общее утверждение: *количество решений уравнения* $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ *в целых неотрицательных числах* (*при* $k \geqslant 1, n \geqslant 0$) *равно* C_{n+k-1}^{k-1}.

$\boxed{\textbf{5.22}^*}$ Найдите число решений неравенства $x + y \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах.

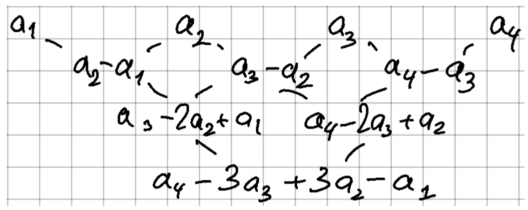
▷ Оно равно числу решений уравнения $x+y+z \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах (недостачу до 10, однозначно определяемую, можно обозначить через z). Ответ: C_{12}^2. ◁

Выпишем подряд точные квадраты $(1, 4, 9, 16, \ldots)$. Затем под каждыми двумя числами напишем разность, получим ряд из *первых разностей* $3, 5, 7, 9 \ldots$. Ещё раз сделаем то же, получится ряд из вторых разностей $2, 2, 2, \ldots$ (а третьи разности будут нулевыми).



Можно сделать аналогичный опыт с точными кубами, тогда понадобится на один шаг больше (четвёртые разности будут ненулевыми, но постоянными, а пятые нулевыми).

Если записать правила вычислений для третьей строки в общем виде, то там появятся знакочередующиеся биномиальные коэффициенты:



5.23* (а) Покажите, что выражение для k-й разности содержит последовательные члены исходного ряда с знакочередующимися биномиальными коэффициентами $C_k^0, -C_k^1, C_k^2, \ldots$. (б) Покажите, что если исходная последовательность является значениями многочлена $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в целых точках, то все k-е разности равны $k!a_k$ (а все следующие — нулю). (в) Докажите, что для целого положительного s сумма

$$C_k^0 0^s - C_k^1 1^s + C_k^2 2^s - C_k^3 3^s + \ldots$$

равна $(-1)^k k!$ при $s = k$ и равна 0 при $s < k$.

$\triangleright$ (а) Как видно из нашего рисунка, при вычитании двух соседних выражений для k-й разности знакопеременные суммы складываются как раз так, чтобы дать коэффициенты из следующей строки треугольника Паскаля.

(б) Рассуждаем по индукции. Первые разности для последовательности $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$ равны $(n+1)^k - n^k = kx^{k-1} + C_k^2 x^{k-2} + \ldots$; получается многочлен степени $k-1$ со старшим коэффициентом k, и от его значений надо взять $(k-1)$-е разности, так что можно воспользоваться индуктивным предположением. Остаётся заметить, что (по тому же предположению) важен только старший член многочлена $P(x)$.

(в) Непосредственно следует из двух предыдущих пунктов. $\triangleleft$