8. Пентагональная теорема Эйлера

8.1. Формулировка

Мы уже упоминали (с. 40) пентагональную теорему Эйлера, которая утверждает, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\ldots$$

В правой части удивительным образом коэффициенты равны ±1, знаки чередуются парами, а степени получаются по формулам $k(3k\mp1)/2$.

8.1* Почему бесконечное произведение в левой части имеет смысл (не придётся складывать бесконечно много подобных членов)?

▷ Будем добавлять скобки по одной слева направо: при умножении на $(1-x^n)$ коэффициенты при степенях, меньших n, уже не меняются, так что они останутся такими навсегда. ◁

8.2* Формула утверждает, что в бесконечном произведении все коэффициенты — плюс-минус единицы. Убедитесь, что для конечных произведений это не всегда так (могут появиться и другие коэффициенты, которые потом полностью или частично сократятся).

▷ При некотором терпении или с помощью компьютера можно вычислить несколько первых произведений и обнаружить, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10}.$$

(Первые три члена уже окончательные, а $2x^5$ потом сократится.) ◁

8.3* Проверьте, что ту же самую формулу Эйлера можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

▷ Члены в правой части исходной формулы соответствуют значениям $k = 0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$; ещё можно отметить, что показатель степени всегда целый, так как $3k^2$ и k имеют одинаковую чётность. ◁

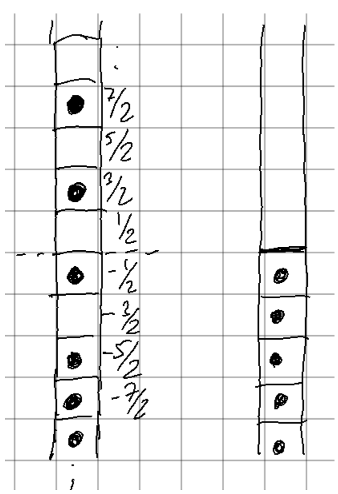
Одно из доказательств этой формулы использует комбинаторное соответствие, которое физики называют *бозонно-фермионным* — но его можно понять безо всякой физики (не считая терминологии).

8.2. Фермионы

Рассмотрим бесконечный вниз и вверх столб из коробок. Каждая коробка может быть пустой, или в ней может лежать шар (только один). При этом мы считаем, что все достаточно высокие коробки пусты, а все достаточно низкие (глубокие) заполнены. Будем называть такую конфигурацию (шаров в коробках) *состоянием*. Следуя физикам, будем называть коробки *уровнями*, а шары — *фермионами*. (Так называют частицы, которые не могут быть вместе на одном уровне, в отличие от *бозонов*, о которых ещё будет речь.)

Уровни можно нумеровать снизу вверх целыми числами, но нам будет удобно нумеровать их *полуцелыми* числами, и называть эти числа *энергией* фермиона на соответствующем уровне: у нас есть уровни с энергией $\ldots, -7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$. На рисунке слева показано состояние, где на положительных уровнях есть два фермиона с энергиями 3/2 и 7/2, а отрицательные уровни заполнены все, кроме одной дырки с энергией $-3/2$. На рисунке справа показано *основное состояние*, где все отрицательные уровни энергии заполнены, а все положительные — нет.

Из одного состояния можно получить другое, добавив шар, забрав шар или переложив шар с одного места на другое. Так можно перейти в любое другое состояние после конечного числа действий (напомним, что мы требуем, чтобы все достаточно высокие состояния были пусты, а все достаточно низкие заполнены).



$\boxed{\mathbf{8.4}^*}$ Нельзя говорить об общем количестве фермионов в состоянии или об их общей энергии, потому что получаются бесконечные суммы. Но можно определить *разницу* в количестве фермионов или энергии для двух состояний. Какова эта разница для двух состояний на рисунке? Как её определить в общем случае?

▷ Отбросим совпадающие хвосты сверху и снизу (с какого-то момента, с которого они совпадают), и сравним то, что осталось (количество фермионов и их суммарную энергию). Состояние слева имеет на $1 = 2 - 1$ фермион больше и энергию на $13/2 = 7/2 + 3/2 - (-3/2)$ больше, чем основное состояние справа. ◁

$\boxed{\mathbf{8.5}^*}$ Покажите, что разницы в предыдущей задаче (0.4) определены корректно в следующем смысле: если есть три состояния A, B, C, то разница между состояниями C и A равна сумме разниц между C и B и между B и A.

▷ Сравнивая два состояния, можно отбрасывать хвосты с любого места (совпадающие участки всё равно не повлияют), поэтому все три разницы можно вычислять, отбросив одни и те же далёкие хвосты. ◁

$\boxed{\mathbf{8.6}^*}$ У какого состояния энергия минимальна?

▷ У основного: от добавления фермиона сверху или удаления фермиона снизу (создания дырки) энергия станет только больше. ◁

Для удобства мы будем говорить о *количестве* фермионов или об *энергии*, приняв за точку отсчёта основное состояние, то есть в основном состоянии будем считать оба параметра равными нулю.

В отличие от энергии, количество фермионов (по сравнению с основным состоянием) может быть и отрицательным (возможно любое целое число).

Перекладывание шара (перемещение фермиона) с одного уровня на другой не меняет их количество, но меняет энергию (на некоторое целое число, разницы энергий между уровнями целые), добавление или удаление шара меняет и количество (на единицу), и энергию (на некоторое полуцелое число).

Разделяя положительные и отрицательные уровни, можно сказать, что число фермионов равно разнице между числом фермионов на положительных уровнях и числом дырок на отрицательных уровнях.

$\boxed{\mathbf{8.7}^*}$ Как изменится число фермионов в состоянии, если всю конфигурацию сдвинуть (как единое целое) вверх на один уровень? (Заметим, что при этом она останется корректной в смысле хвостов.)

▷ Увеличится на 1: это видно, если рассмотреть участок в середине, отбросив далёкие хвосты. В него войдет один фермион снизу и не выйдет ни одного фермиона сверху.

Можно объяснить это в терминах числа фермионов в верхней половине и числа дырок в нижней: в зависимости от того, что было на уровне $-1/2$, либо появится один фермион в верхней половине, либо пропадёт одна дырка в нижней. ◁

$\boxed{\mathbf{8.8}^*}$ Как изменится энергия основного состояния после сдвига на N уровней вверх? Покажите, что то же самое изменение будет и для любого состояния с нулевым числом фермионов.

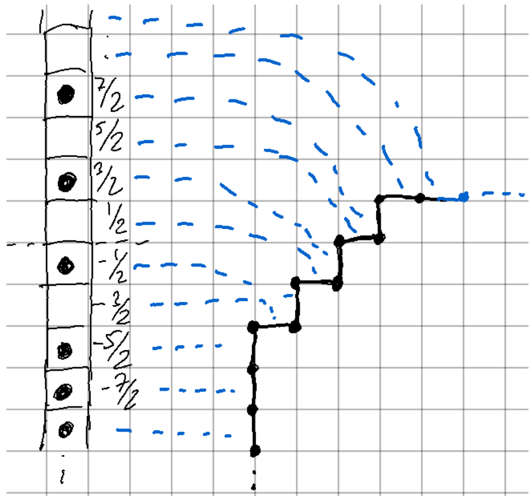
▷ Для основного состояния нужно просто вычислить сумму $1/2 + 3/2 + \ldots + (2N-1)/2 = N^2/2$ при положительных N, и тот же ответ (по аналогичным причинам) будет и для отрицательных N. Чтобы понять, что то же самое изменение будет для любого состояния с нулевым числом фермионов, можно сначала заполнить дырки снизу фермионами сверху, получив основное состояние, потом сдвинуть всё вверх на N, потом вернуть сдвинутые фермионы на свои места. Поскольку сдвиг фермиона на k уровней вверх увеличивает его энергию на k, независимо от того, где он находится, то изменения энергии на первом и третьем этапах сократятся. ◁

Всё сказанное даёт такую картину: если разбить состояния на классы, отличающиеся сдвигами, то в каждом классе есть одно «сбалансированное» состояние с нулевым числом фермионов, из которого все остальные получаются сдвигами: сдвиг на N вверх даёт состояние с N фермионами (поэтому состояния внутри класса можно однозначно задавать числом фермионов). Что касается энергий, то среди всех состояний класса минимальную энергию имеет состояние с нулевым числом фермионов, если сдвинуть его на N в любую сторону, то энергия возрастёт на $N^2/2$.

Классы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с диаграммами Юнга, и сейчас мы увидим, как это сделать.

8.3. Бозонно-фермионное соответствие

Пусть дано некоторое состояние, то есть способ заполнения уровней фермионами. Просматривая состояние снизу вверх, нарисуем ломаную на клетчатой бумаге: заполненный уровень соответствует шагу вверх, а пустой уровень соответствует шаг вправо.

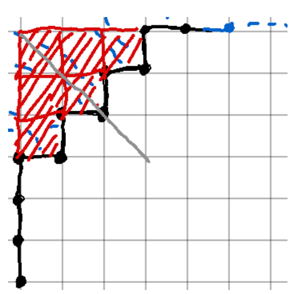


На картинке пунктиром показано, какой уровень какому звену ломаной соответствует.

Наше условие на состояния (что снизу с какого-то места всё заполнено, а сверху пусто) означает, что ломаная приходит вертикально снизу вверх, а уходит горизонтально вправо.

Наоборот, каждая такая ломаная из шагов вверх и вправо (приходящая вертикально снизу и уходящая горизонтально вправо) соответствует состоянию — вернее, состоянию с точностью до сдвига, потому что на ломаной не написано, где какие энергии. Чтобы задать состояние полностью, нужно ещё отметить, в каком месте ломаная переходит из зоны отрицательных энергий в зону положительных.

Глядя на такую картинку, хочется заделать откушенный угол, добавив недостающее:



Эта недостающая часть представляет собой диаграмму Юнга (мы говорили о них в разделе 7.1.1). Таким образом, каждому классу состояний (с точностью до сдвига) соответствует диаграмма Юнга, и это соответствие взаимно однозначно, как показывает следующая задача.

8.9* Как по диаграмме Юнга восстановить состояние (с точностью до сдвига)?

▷ Диаграмма Юнга естественно вписывается в прямой угол (с раструбом вправо-вниз). Граница и будет ломаной, соответствующей состоянию: мы идём снизу вверх по левой границе угла, обходим диаграмму по границе и потом уходим вправо в бесконечность по другой стороне угла. Шаги вверх и вправо соответствуют заполненным и пустым уровням. ◁

• Заметим, что мы восстановили состояние с точностью до сдвига — мы не указали, где кончаются отрицательные энергии и где начинаются положительные. (Так и должно быть, потому что сдвиг не меняет формы ломаной.)

8.10* Какая диаграмма соответствует основному состоянию?

▷ Пустая: мы сначала идём только вверх, а потом только вправо, так что от угла ничего не откушено. ◁

Несложно понять, где нужно поставить на ломаной точку перехода от отрицательных энергий к положительным, чтобы получить сбалансированное состояние (где фермионов сверху столько же, сколько дырок снизу) — ответ даёт следующая задача.

8.11* Докажите, что для сбалансированного состояния граница между отрицательными и положительными энергиями проходит на пересечении ломаной с биссектрисой прямого угла (которую мы заранее нарисовали).

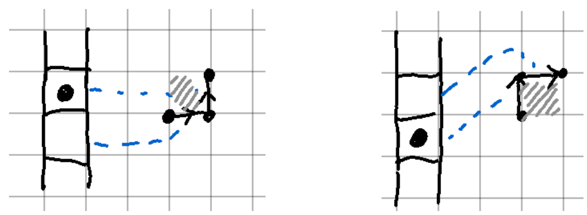
• Такое пересечение единственно: каждый шаг вверх или вправо приближает нас к биссектрисе, пока мы её не достигнем, а потом отдаляет от неё.

▷ Сдвиг вправо (от минус бесконечности до текущего момента) равен числу дырок снизу от границы, а последующий сдвиг вверх (от текущего момента до плюс бесконечности) равен числу фермионов сверху от границы — так что равенство достигается как раз на биссектрисе. ◁

Оказывается, что и энергия имеет ясный смысл в терминах диаграмм.

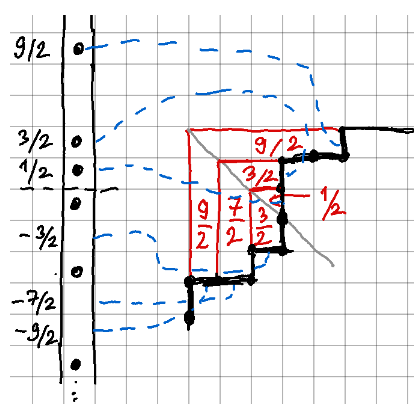
8.12* Докажите, что энергия сбалансированного состояния равна числу клеток в соответствующей диаграмме.

▷ Можно это понять, посмотрев на то, что происходит с энергией, числом фермионов и диаграммой, когда один из фермионов спускается в пустую клетку под ним. Энергия при этом уменьшается на 1 (все остальные фермионы остаются где были, а этот теряет единицу энергии). С другой стороны, ломаная начинает обходить сверху клетку, которую обходила снизу, и тем самым площадь диаграммы Юнга уменьшается тоже на единицу.



Так что если наше утверждение о равенстве энергии и числа клеток было верно до спуска, то оно останется верным и после, и наоборот. Будем повторять такие шаги, пока это возможно (есть заполненный уровень сразу над пустым). После этого получится состояние, где все заполненные уровни ниже пустых. Поскольку общее число частиц не меняется (и остаётся равным нулю по предположению сбалансированности), то получится основное состояние с нулевой энергией и пустая диаграмма, так что всё сходится. ◁

• Раз площадь диаграммы Юнга равна сумме энергий фермионов сверху и (минус) энергий дырок снизу, естественно спросить, нельзя ли прямо-таки разбить диаграмму на части, соответствующие этим слагаемым, и доказать равенство таким способом. Оказывается, что можно — пример такого разбиения показан на рисунке, где три фермиона в положительной части соответствуют трём трапециям сверху от биссектрисы (одна из которых вырождается в треугольник), а три дырки в отрицательной части — трём трапециям снизу.



8.4. Производящие функции и тройное тождество

После этой подготовки можно начать двигаться в сторону тождеств и пентагональной теоремы. Заметим, что каждому состоянию s (размещению фермионов по уровням) соответствуют два числа: число фермионов $N(s)$ и энергия $E(s)$ — обе величины берутся в сравнении с основным состоянием. Число $E(s)$ — целое, а $N(s)$ — полуцелое. Бывает, что для каких-то двух разных состояний значения E и N совпадают, так что все состояния делятся на группы. Нас интересует, сколько состояний будет в каждой группе.

В терминах производящих функций можно сказать так. Рассмотрим бесконечную сумму

$$\sum_s q^{E(s)} z^{N(s)}, \qquad (*)$$

в которой суммирование происходит по всем состояниям s, и приведём в ней подобные члены.

8.13* Чему будет равен коэффициент при $q^e z^n$ в получившейся формальной (двумерной) сумме?

▷ Количеству разных состояний s, у которых $E(s) = e$ и $N(e) = n$, то есть количеству состояний с данным числом частиц и данной энергией. ◁

8.14* Докажите, что бесконечная сумма $(*)$ равна произведению

$$(1+q^{1/2}z)\cdot(1+q^{3/2}z)\cdot(1+q^{5/2}z)\cdot\ldots\cdot(1+q^{1/2}z^{-1})(1+q^{3/2}z^{-1})(1+q^{5/2}z^{-1})\cdot\ldots$$

• Это произведение состоит из двух бесконечных групп скобок. Его можно понимать так: мы «раскрываем скобки», то есть всевозможными способами выбираем в каждой скобке одно из слагаемых, причём неединицу можно выбрать только конечное число раз, и такие произведения складываем и приводим подобные члены. Заметим, что каждый неединичный множитель увеличивает степень q по крайней мере на $1/2$, так что подобных членов будет только конечное число.

▷ Это более или менее прямо следует из определения. Состояние определяется тем, какие есть занятые уровни в области положительных энергий и какие есть свободные уровни в области отрицательных энергий. Занятые положительные уровни соответствуют выбранным неединичным сомножителям в первом произведении, а свободные отрицательные уровни — во втором. При перемножении энергии занятых уровней (и минус энергии свободных уровней) суммируются в показателях степеней переменной q, а в показателях степеней переменной z происходит вычитание числа дырок в отрицательной зоне из числа фермионов в положительной зоне (для чего в отрицательной зоне у z степень -1). $\triangleleft$

В более компактной форме это бесконечное произведение можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)$$

Теперь вспомним о бозонно-фермионном соответствии и заметим, что в исходной сумме по всем состояниям можно сгруппировать состояния, отличающиеся сдвигом. Если мы знаем число частиц и энергию для сбалансированного состояния в этой группе, то после сдвига на N число частиц увеличится на N, а энергия увеличится на $N^2/2$. (Здесь N может быть любым целым числом; если оно отрицательно, то число частиц уменьшается, а энергия всё равно увеличивается.) Из одного слагаемого в сумме, соответствующего сбалансированному состоянию, получится двусторонний ряд слагаемых, получающихся из исходного умножением на

$$F=\sum_{N=-\infty}^{\infty} z^N q^{N^2/2}$$

Поэтому достаточно вычислить сумму для всех сбалансированных состояний, а потом результат умножить на F. А сбалансированные состояния в точности соответствуют диаграммам Юнга, у них число фермионов равно 0 (и переменную z в нулевой степени можно опустить), а энергия равна площади, так что сумма по сбалансированным состояниям равна

$$\sum_{y} q^{E(y)},$$

где сумма берётся по всем диаграммам Юнга, а $E(y)$ — число клеток (площадь) диаграммы y. В этой сумме коэффициент при q^e равен числу диаграмм Юнга из e клеток. Диаграммы Юнга из e клеток соответствуют разбиениям числа e на положительные слагаемые (как мы обсуждали в разделе 7.1.1), так что получается производящая функция для числа разбиений (задача 7.9), равная

$$(1+q+q^2+q^3+\ldots)(1+q^2+q^4+q^6+\ldots)(1+q^3+q^6+q^9+\ldots)\ldots$$

Суммируя бесконечные геометрические прогрессии, можно было бы записать последнее произведение как

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \ldots$$

но удобнее не выходить за пределы формальных рядов (избегая деления), так что можно умножить на обратное произведение

$$(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot(1-q^3)\cdot\ldots = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

чтобы оно сократилось с производящей функцией для числа разбиений. Собирая всё сказанное вместе, мы видим, что два различных способа вычисления суммы $(*)$ — непосредственный и с переходом к диаграммам Юнга — дают равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} z^N q^{N^2/2}$$

Это тождество для рядов объединяет в себе бесконечное число тождеств, соответствующих равенству коэффициентов левой и правой частей при $z^n q^e$ для всех пар (n,e), и называется «тройным тождеством Якоби».

▷ Это тождество было доказано Карлом Густавом Якобом Якоби (1804–1851) в 1829 году. Приведённое нами доказательство придумали ????? ◁

8.5. Доказательство пентагональной теоремы

Из тройного тождества легко вывести пентагональную теорему, надо только сделать несколько подстановок.

$\boxed{\textbf{8.15}^*}$ Что получится, если подставить в это тождество $z = -q^{-1/6}$?

▷ Подстановка даёт

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\cdot q^{-1/6}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\cdot q^{1/6}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{N=-\infty}^{\infty}((-q)^{-1/6})^N q^{N^2/2},$$

то есть

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{2}{3}}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{3}}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{N=-\infty}^{\infty}(-1)^N q^{\frac{3N^2-N}{6}},$$

$\triangleleft$

Видно, что после такой подстановки в левой части есть три серии показателей степеней: целые положительные, они же минус 1/3 и они же минус 2/3.

$\boxed{\mathbf{8.16}^*}$ Замените в этой формуле q на q^3, объедините эти три серии в одну и получите пентагональную теорему Эйлера.

$\triangleright$ Просто объединение серий дало бы произведение по всем положительным степеням с шагом 1/3 (целые положительные числа, делённые на три). Если заменить q на q^3, то получится произведение по всем целым положительным степеням (а в правой части надо вместо 6 в знаменателе поставить 2). Получится

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}(-1)^N q^{\frac{3N^2-N}{2}}$$

что отличается от приведённой выше формулы лишь названием переменной суммирования справа, а также тем, что вместо $3k^2+k$ стоит $3N^2-N$ с минусом (что исправляется заменой $N=-k$, поскольку справа сумма двусторонняя). $\triangleleft$

• В этих рассуждениях мы свободно обращались с бесконечными суммами и произведениями, как если бы к ним были применимы обычные правила алгебры и не заботясь об обосновании этих действий. Но вообще-то тут недалеко и до абсурда. Скажем, если перемножать геометрические прогрессии и написать

$$(1+z+z^2+\ldots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{z}{1-(2z-z^2)},$$

затем в правой части воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии в обратную сторону, написав

$$-\frac{z}{1-(2z-z^2)}=-z(1+(2z-z^2)+(2z-z^2)^2+\ldots)=-z-2z^2-3z^3-\ldots,$$

а затем сравнить коэффициенты при разных степенях z в левой и правой части, то получится, что бесконечная сумма из единиц равна одновременно 0, -1, -2 и т. д. По-хорошему, конечно, надо внимательно следить, что все наши выражения имеют смысл (то есть что не получается бесконечного числа подобных членов) и что наши преобразования законны (скажем, что можно перемножать сомножители в любом порядке). Для нашего случая тут никаких принципиальных сложностей нет, но мы этого делать не будем.

После всего сказанного уже несложно понять, как связана пентагональная теорема с рекуррентным соотношением для чисел разбиений.

$\boxed{\mathbf{8.17}^*}$ Выведите из пентагональной теоремы рекуррентное соотношение для количества T_n разбиений n на слагаемые

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

▷ Производящая функция для числа разбиений $T_0 + T_1 q + T_2 q^2 + T_3 q^3 + \ldots$ равна произведению

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots)(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \ldots)\ldots,$$

и если её домножить на произведение из пентагональной теоремы,

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \ldots,$$

умножая первую скобку на первую, вторую на вторую и так далее, получается 1. А сравнение коэффициентов при степенях в равенстве

$$(T_0 + T_1 q + T_2 q^2 + T_3 q^3 + \ldots)(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \ldots) = 1$$

как раз и даёт искомое рекуррентное соотношение. ◁

▷ Пентагональную теорему мы доказали, но кто такие бозоны? *Фермионы* для нас — шары, которые можно класть в коробки (уровни) с полуцелыми номерами (энергиями на соответствующих уровнях), причём в одну коробку помещается не больше одного шара (два фермиона не могут иметь одну энергию). Рассмотрим теперь столб из коробок, бесконечный только вверх (уровни 1, 2, 3, …) и при этом разрешим в каждый ящик класть сколько угодно шаров. Шары нового типа будем называть *бозонами*. Легко понять, что размещения бозонов с общей энергией E соответствуют разбиениям числа E: каждый бозон на уровне k соответствует слагаемому, равному k (и таких слагаемых может быть несколько, как бозонов в одном ящике — или может не быть вообще). А такие разбиения соответствуют диаграммам Юнга. На этом языке основной шаг доказательства можно изложить так: *каждому размещению фермионов с точностью до сдвига взаимно однозначно соответствует размещение бозонов* с энергией, равной минимальной энергии размещений фермионов среди всех сдвигов.

Как рассказывают физики, все элементарные (на самом деле — не только элементарные) частицы делятся на *бозоны* и *фермионы*. Согласно их теориям, бозоны — частицы с целым *спином* — переносчики взаимодействий. Важнейшим из бозонов для нас является *фотон* (квант света). Бозоны могут занимать одно и то же состояние, например один и тот же уровень энергии, даже если этот уровень *невырожден* (одномерен). А фермионы — частицы материи — имеют полуцелый спин. Например таковы *электроны*, и они не могут занимать один и тот же уровень энергии.

Как уточняют математики, состояния и бозонов, и фермионов описываются элементами *векторных пространств*. Но состояние со многими бозонами одной природы описывается элементом *симметрической алгебры* бозонного векторного пространства, тогда как состояние со многими фермионами — элементом *внешней алгебры* фермионного.

Идея, что частицы делятся на два класса (бозоны и фермионы) принадлежит основоположникам квантовой механики — Вольфгангу Паули, Альберту Эйнштейну, Полю Дираку, Энрико Ферми и Шатьендранату Бозе. Дирак, предложив своё уравнение для частиц с полуцелым спином, столкнулся с проблемой: согласно этому уравнению, энергия электрона не ограничена снизу. Это противоречит интуиции, так как роняя электрон на достаточно глубокий уровень, можно было бы получать сколько угодно энергии. Дирак предположил, что все уровни с отрицательной энергией — кроме, быть может, конечного числа — уже заняты. Такая конфигурация называется *морем Дирака*. Отсутствие частицы на отрицательном уровне может быть также интерпретировано, как наличие (анти)частицы с положительной энергией, так как для создания такого состояния необходимо эту энергию потратить. Так Дирак предсказал существование *позитрона* (1929) — а к 1932 году эти самые позитроны уже были обнаружены, за что Карл Дэвид Андерсон получил нобелевскую премию 1936 года (Дирак получил свою в 1933 году).

А что сделали вы? ◁