Содержание

0. Предисловие

Идеалом, конечно, являются просто открытые для всех занятия по интересам, где отбор осуществляется просто тем, что более ленивые сами разбегутся.

А. Н. Колмогоров
о преподавании школьникам,
(из письма В. П. Эфроимсону,
опубликовал Оскар Шейнин)

Мы старались собрать задачи, которые традиционно решаются в «математических классах» (или, более официально, в «классах с углублённым изучением математики»). Сначала они довольно простые, но со временем доля сложных увеличивается. Некоторые более сложные (или не вполне по теме) задачи помечены звёздочками.

Мы советуем сначала попробовать решить задачу, не глядя в решение. Если получится — сравнить с решением (там могут быть и дополнительные комментарии). Если долго не получается, тоже можно подглядеть в решение и попытаться понять его идею и довести до конца (ну или прочитать полностью и разобраться).

В этом выпуске разбираются «задачи по комбинаторике»; в 2023–2024 годах эти задачи выкладывались (порциями) в социальных сетях по частям; были выложены также и видеоразборы большинства задач (см. таблицу в конце предисловия) — в качестве образцов «живой математической речи», со всеми оговорками, ошибками, повторами и т. п. (как обычно бывает, устный язык заметно отличается от письменного).

В подготовке текстов и видео участвовали: Руслан Ишкуватов, Татьяна Михайлова, Владимир Фок, Александр Шаповал, Александр Шень, Иван Яковлев.

* * *

Задачи, в которых требуется кого-то (или что-то) пересчитать, в школе называют «задачами по комбинаторике».[1] Конечно, если нужно по-

[1]Более подробное название — «перечислительная комбинаторика» (enumerative combinatorics).

считать буквы в русском алфавите[2] или картофелины в мешке, математика не поможет — надо взять и посчитать, ничего не поделаешь.

Но если нужно посчитать, сколько есть четырёхзначных чисел, цифры которых разные и идут в убывающем порядке (3210, 4210, 4310,..., 9876), уже не обязательно их все выписывать и пересчитывать. То же самое — если мы хотим узнать, сколько можно составить «слов» (не обязательно осмысленных) из пяти букв, имея три кубика с буквой А и два кубика с буквой Б и по-разному их располагая[3].

Мы разберём задачи подобного рода и способы их решения — по большей части несложные[4] — и начнём с совсем простых вопросов.

---

[2]На сегодняшний день (2023) в русском алфавите принято числить 33 буквы — хотя дело это не такое простое, как заметил Владимир Андреевич Успенский. Он обнаружил, что в одном и том же четвертом томе словаря русского языка в четырёх томах, выпущенного Институтом русского языка Академии наук СССР в 1984 году, буква «У» названа двадцатой буквой русского алфавита (с. 441), а буква «Э» — тридцать первой (с. 745). Понятно, в чём тут проблема и откуда она возникла? (В первом томе того же словаря приведён русский алфавит: «..., у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э,...».)

[3]Кстати, раз уж речь зашла о этих задачах: понятно ли, какое следующее число будет идти в этом списке за 4310 (в порядке возрастания) и какое число будет перед 9876? Или ещё: можете ли вы сказать, все ли варианты слов из пяти букв указаны в списке «БАБАА, АБААБ, АААББ, ББААА, БАААБ, ААББА, АББАА, БАБАА, БААБА»?

[4]Несмотря на свою репутацию: Лев Толстой в «Юности» писал «На экзамен математики я пришёл раньше обыкновенного. Я знал предмет порядочно, но было два вопроса из алгебры, которые я как-то утаил от учителя и которые мне были совершенно неизвестны. Это были, как теперь помню: теория сочетаний и бином Ньютона.» Это как раз два вопроса из гимназического курса алгебры, относящиеся к комбинаторике. В «Мастере и Маргарите» Булгакова Коровьев тоже говорит «Подумаешь, бином Ньютона!» — вероятно, имея в виду, что бином Ньютона дело сложное.

1. Начальные задачи	https://youtu.be/5Jf0g0nNl4U
дополнительные	https://youtu.be/Ajxb_ov7Kl0
2. Сложение и умножение	https://youtu.be/4TodqREEz2Q
дополнительные	https://youtu.be/CF4RmHkBFJ4
3. Рекуррентные формулы	https://youtu.be/GsOjciQ3cdc
дополнительные	https://youtu.be/WuyWr5t9vuw
4. Соответствия	https://youtu.be/OBQym5l-Bwg
дополнительные	https://youtu.be/HRIA9GL4JRE
5. Сочетания и бином Ньютона	https://youtu.be/rhHkVmKrIAY
дополнительные	https://youtu.be/hnp8vkTgIpM
6. Включения и исключения	https://youtu.be/fYYzBLn-uz8
7. Что дальше? (начало)	https://youtu.be/0ovJPofPUpI
(часть 2)	https://youtu.be/512d71kmhuY
Пентагональная теорема	https://youtu.be/8YlXeo9Bz9g

1. Начальные задачи

$\boxed{1.1}$ Напишем числа от 1 до 9, то есть $1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9$. Сколько их будет? Тот же вопрос для чисел от 1 до 99.

$\triangleright$ Можно все их написать: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ — и начать их считать: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять. Видно, что мы просто называем числа по очереди, поэтому всего насчитаем 9 чисел.

Теперь ясно, что для чисел от 1 до 99 будет то же самое, и их всего 99 штук. $\triangleleft$

$\boxed{1.2}$ Напишем все двузначные числа от 10 до 99, то есть 10, 11, 12,..., 98, 99. Сколько их будет?

$\triangleright$ Можно считать их по десяткам, разбив на группы по первой цифре: от 10 до 19 будет десять чисел, столько же от 20 до 29, от 30 до 39,..., от 90 до 99, то есть девять десятков (90).

Но проще сделать так: у нас есть 99 чисел от 1 до 99, из них мы выбросили 9 чисел от 1 до 9 (см. предыдущую задачу), останется $99 - 9 = 90$ чисел. $\triangleleft$

$\boxed{1.3}$ Сколько трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

$\triangleright$ Если добавить 99 чисел от 1 до 99, то получится 999 чисел от 1 до 999, так что трёхзначных чисел $999 - 99 = 900$. (Можно также заметить, что они разбиваются по первой цифре на девять сотен.) $\triangleleft$

$\boxed{1.4}$ На термометре есть деления от -50 до $+50$ градусов (через один градус: $-50, -49, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 49, 50$). Сколько всего там делений?

$\triangleright$ Есть 50 делений с положительными температурами (от 1 до 50), столько же отрицательных (от -1 до -50), и ещё нуль, всего $50 + 50 + 1 = 101$. $\triangleleft$

$\boxed{1.5}$ Сколько чисел в ряду 17, 18, 19,..., 122, 123? Сколько чисел в ряду $-17, -16, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 122, 123$. Какая будет общая формула для количества чисел от m до n? (Сами m и n тоже включаются в этот ряд $m \ldots n$; мы считаем, что $m \leqslant n$.)

$\triangleright$ Из 123 чисел $1, 2, \ldots, 123$ надо вычесть 16 чисел $1, 2, \ldots, 16$, получится $123 - 16 = 107$ чисел. Второй вопрос: к 123 числам $1, 2, \ldots, 123$ надо добавить 17 чисел $-1, -2, \ldots, -17$ и ещё нуль, получится $123 + 17 + 1 = 141$ число.

В обоих случаях годится такая формула: в ряду чисел $m, m+1, \ldots, n$ всего $n-m+1$ чисел. В первом случае $m=17$, $n=123$ и мы вычитали $m-1$ из n, получалось $n-m+1$. Во втором случае $m=-k$ для $k=17$, мы добавляли k чисел и ещё одно число к n числам, получалось $n+k+1 = n+(-m)+1 = n-m+1$ число. Можно аналогично рассмотреть и случаи, когда одно из чисел m, n равно нулю или оба отрицательны, и убедиться, что эта формула годится для любых $m \leqslant n$.

Формулу $n-m+1$ можно объяснить ещё и так: при $n=m$ она даёт единственное число, как и требуется. Если же теперь увеличить n на 1, то одно число справа добавится, и одновременно ответ $n-m+1$ по формуле увеличится на 1, так что он останется верным. И то же самое будет при дальнейшем увеличении числа n. ◁

• Поначалу хочется сказать, что от m до n будет $n-m$ чисел — подобно тому, как от пятого километрового столба до двенадцатого будет $12-5=7$ километров, а между пятым и двенадцатым днём рождения пройдёт 7 лет. Но это не так — и эта ошибка даже имеет специальное название в программировании: “off-by-one error” (ошибка на единицу). Примерно ту же ошибку допустили те, кто считали, что третье тысячелетие началось в 2000 году: если считать, что первый год первого тысячелетия имел номер 1, то последний год второго тысячелетия имел номер 2000, а первый год третьего — 2001.

$\boxed{\textbf{1.6}}$ Человек поднимается с первого этажа на пятый за минуту. Сколько ему понадобится времени, чтобы с той же скоростью подняться с первого на десятый этаж?

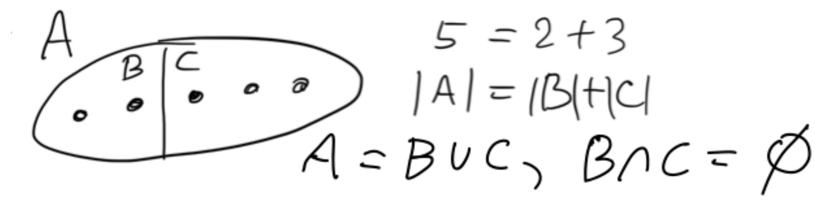
▷ Хочется сказать — две минуты, потому что 10 в два раза больше 5. Однако в первом случае ему придётся пройти $4 = 5-1$ пролёта, а во втором $9 = 10-1$ пролётов, так что правильный ответ $9/4$ минуты, или 2 минуты и 15 секунд. ◁

• В этих подсчётах мы используем сложение и вычитание. Если в мешке есть красные и зелёные яблоки (и только), можно подсчитать отдельно число тех и других, а потом сложить эти числа и получить общее число яблок. Наоборот, если мы знаем общее число яблок в мешке, а также число красных яблок, то можно получить число зелёных яблок вычитанием. То же самое и в наших примерах: мы делили числа $1, \ldots, 99$ на две части: однозначные[5] от 1 до 9 и дву-

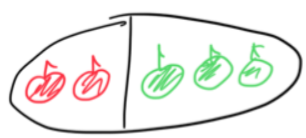
[5]Считать ли нуль (0) однозначным числом? Тут есть разные мнения: иногда говорят, что нуль однозначное число, потому что только одна цифра 0. Иногда однозначные числа начинают с 1 (и в этом тоже есть своя логика, потому что в других числах цифра нуль в начале не пишется). Мы будем это всегда оговаривать, чтобы не было путаницы.

значные от 10 до 99. В первой группе 9 чисел, а всего чисел 99, так что во второй группе $99 - 9 = 90$ чисел.

▷ Математики говорят, что *множество* всех чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ является *объединением* двух *непересекающихся подмножеств* $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ и $\{10, 11, \ldots, 99\}$ и потому число элементов в нём равно сумме чисел элементов в этих подмножествах, и что это — определение сложения. Вообще, если конечное множество A есть объединение двух непересекающихся множеств B и C, то число элементов в A равно сумме числа элементов в B и C. На картинке можно это изобразить так:



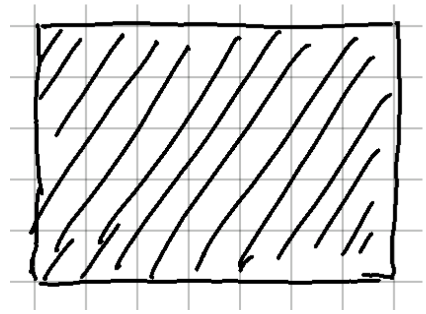
Здесь через $|A|$ обозначается число элементов в множестве A, через $B \cup C$ обозначается *объединение* множеств B и C (в которое входят те элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств B и C, через $B \cap C$ обозначается *пересечение* множеств B и C (те элементы, которые входят и в B, и в C), а $\varnothing$ — *пустое множество* (в котором нет элементов), так что $B \cap C = \varnothing$ означает, что в B и C нет общих элементов.



Впрочем, за всеми этими терминами скрываются те же самые красные и зелёные яблоки в мешке. ◁

Иногда полезно не складывать, а умножать.

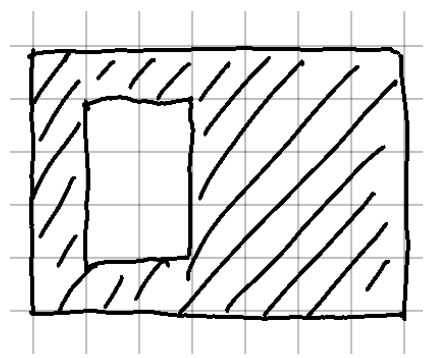
$\boxed{1.7}$ Сколько клеток попало в прямоугольник на рисунке?



▷ Можно посчитать все клетки, это не так долго, получится 35. Но можно и заметить, что в каждом столбце 5 клеток, а всего столбцов 7, получается $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5 = 35$. Или — что в каждой строке 7 клеток, а строк 5, получается $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$ (тот же самый ответ при другом способе подсчёта). ◁

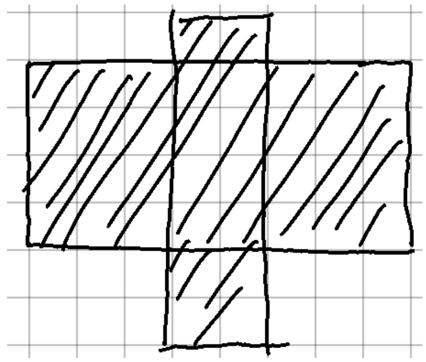
▷ Отсюда видно, что перестановка множителей не меняет произведения — как говорят математики, умножение *коммутативно* ($ab = ba$), равно как и сложение ($a + b = b + a$). ◁

$\boxed{\textbf{1.8}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



▷ Тут проще всего считать так: из прямоугольника как в предыдущей задаче вырезали прямоугольник 3×2, то есть шесть клеток надо вычесть). Получается $5 \times 7 - 3 \times 2 = 35 - 6 = 29$. ◁

$\boxed{\textbf{1.9}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?

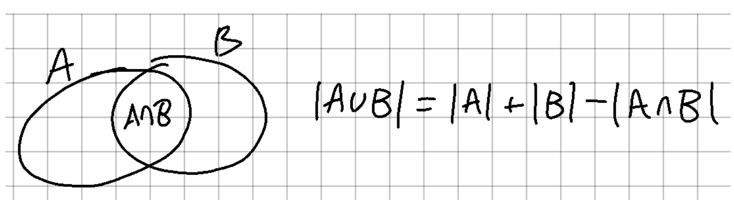


▷ Тут можно считать по-разному. Можно посчитать отдельно в каждом из пяти прямоугольников, на которые разрезается эта фигура, и получить

$$4 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times 2 + 4 \times 3 = 12 + 2 + 8 + 4 + 12 = 38.$$

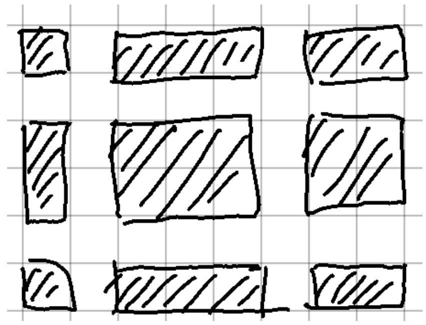
Но можно немного сократить вычисления, если рассуждать так: на рисунке есть два пересекающихся прямоугольника из $4 \times 8 = 32$ клеток и $7 \times 2 = 14$ клеток. Если мы сложим эти количества $(32 + 14 = 46)$, то каждую клетку в прямоугольнике 4×2 посчитаем дважды, поэтому эти клетки (их $4 \times 2 = 8$) надо вычесть, получится $32 + 14 - 8 = 38$ клеток. ◁

▷ Математики называют этот способ подсчёта *формулой включения и исключения*: чтобы подсчитать общее число элементов в в двух пересекающихся множествах, можно сложить числа элементов и вычесть элементы, посчитанные дважды.



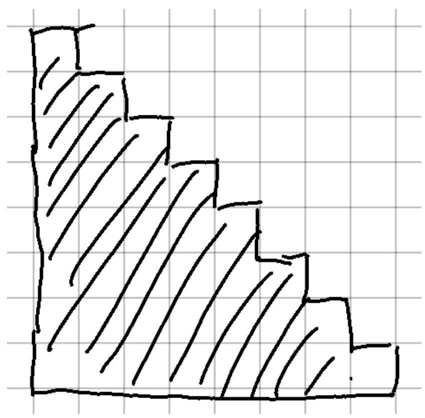
Мы ещё вернёмся к этой формуле (и к её вариантам для большего числа множеств) в разделе 6. ◁

$\boxed{\textbf{1.10}^*}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



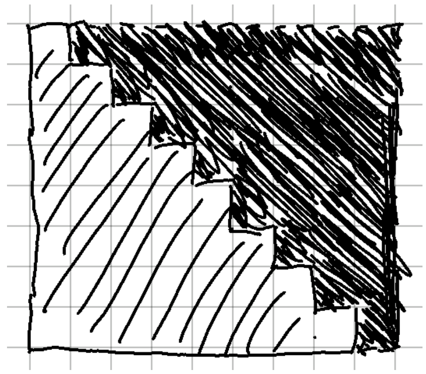
▷ Неважно, что столбцы (как и строки) теперь не сплошные: у нас есть 6 «столбцов» по 4 клетки в каждом, всего 24 клетки. (Можно было бы насчитать и четыре несплошных «строки» по 6 клеток в каждой.) ◁

1.11* Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



▷ Можно посчитать по строкам: в верхней одна клетка, потом две, потом три, и так далее до восьми, так что всего $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ клеток.

Но можно сэкономить на вычислениях, если пририсовать вторую такую же фигуру. В ней то же число клеток (просто вверх ногами), а вместе они дают прямоугольник 8×9, как видно на рисунке.



Так что ответ будет $8 \times 9/2 = 36$ (естественно, тот же самый). ◁

• Такую же картинку из двух частей можно нарисовать для лестниц любого размера, так что

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

На это соединение двух картинок можно смотреть и алгебраически:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \ldots + n) &= (1 + \ 2 \ + \ \ldots \ + n) + \\ &+ (n + (n-1) + \ldots + 1) = \\ &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

(в каждой из сумм с многоточиями n слагаемых).

1.12 Числа от 1 до 100 поделили на нечётные $(1, 3, 5, 7, \ldots, 99)$ и чётные $(2, 4, 6, \ldots, 100)$. Сколько получилось чётных чисел?

▷ Нечётные и чётные числа можно сгруппировать в пары: 1 и 2, потом 3 и 4, потом 5 и 6,…— в каждой паре первое число нечётное, а второе чётное. Последняя пара будет 99 и 100. Значит, нечётных и чётных чисел поровну, а всего чисел 100 — будет 50 пар, то есть 50 нечётных и 50 чётных чисел. ◁

▷ Математики говорят, что группировка нечётных и чётных чисел в пары задаёт *взаимно однозначное соответствие* между чётными и нечётными числами (среди $1 \ldots 100$). А если между множествами есть взаимно однозначное соответствие, то в них поровну элементов. ◁

Мы разобрали некоторые приёмы решения задач, к которым ещё вернёмся более подробно. А сейчас несколько более сложных задач — если они поначалу покажутся трудными, то ничего страшного.

1.13* Сколько есть двузначных чисел, в записи которых не используется цифра 0? Сколько есть двухзначных чисел, в записи которых используются только нечётные цифры $(1, 3, 5, 7, 9)$?

▷ На первом месте может стоять одна из цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$, так что интересующие нас двузначные числа делятся на 9 групп. В каждой группе 9 чисел (поскольку на втором месте может стоять одна из цифр $1, 2, \ldots, 9$), итого $9 \times 9 = 81$ число. Второй вопрос: есть 5 групп (для разряда десятков есть 5 вариантов) и в каждой группе 5 чисел (5 вариантов для разряда единиц), получается $5 \times 5 = 25$. ◁

1.14* Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько цифр 7 при этом будет использовано? (Другими словами, сколько раз нам понадобится нажать на клавишу 7, набирая все эти числа на компьютере?)

▷ Давайте немного изменим задачу, считая, что мы будем набирать числа $00, 01, \ldots, 09, 10, 11, \ldots, 19, \ldots, 98, 99$ (число 100 не использует цифру 7, и от добавления нулей вначале тоже число семёрок не изменится). Сколько раз мы используем цифру 7? Отдельно подсчитаем, сколько раз мы её используем в разряде десятков. Всего чисел 100, и в разряде десятков может стоять любая из цифр $0, 1, 2, \ldots 9$ (вместе с десятью возможными цифрами в разряде единиц). Значит, все цифры в разряде десятков встречаются одинаково часто, так что цифра 7 встретится 10 раз. По тем же причинам в разряде единиц она встретится 10 раз (вместе с десятью возможными цифрами в разряде десятков). Всего получается 20 раз. ◁

1.15* Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько из них используют цифру 7 в своей записи? (Понятно, чем эта задача отличается от предыдущей?)

▷ Эта задача отличается тем, что мы теперь считаем не цифры 7, а те числа, в которых они встречаются. Собственно, разницы почти нет — если не считать число 77, в котором две цифры 7 (в остальных нуль или одна). Значит, теперь нам надо считать 77 один раз, получаем 19 вместо 20. ◁

1.16* Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 3 нацело? (Это каждое третье число: 3, 6, 9, 12 и так далее.)

▷ Можно поделить числа на группы по три: $1, 2, 3$, затем $4, 5, 6$, затем $7, 8, 9$ и так далее. В каждой тройке одно число (последнее) делится на 3 нацело. Последняя тройка будет $97, 98, 99$, потом ещё останется число 100 (которое считать не надо, оно на 3 не делится). Всего троек $99/3 = 33$, в каждой по одному делящемуся на 3 числу, так что искомых чисел будет 33.

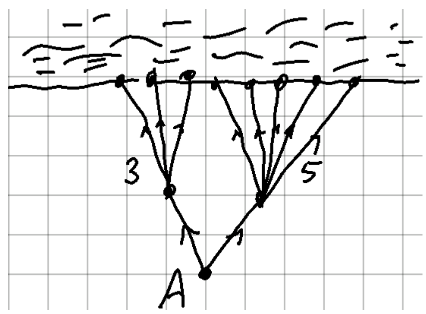
Можно сказать и так: нас интересуют числа вида $3n$ при $1 \leqslant 3n \leqslant 100$ (и при целых n). Неравенство можно переписать как $\frac{1}{3} \leqslant n \leqslant 33\frac{1}{3}$, и целые решения тут будут $1, 2, 3, \ldots, 33$, всего 33 варианта. $\triangleleft$

- Тем же способом получаем, что количество чисел от 1 до целого положительного n, делящихся на целое положительное k, равно $\lfloor n/k \rfloor$ (целой части n/k, то есть дроби n/k, округлённой вниз до ближайшего целого).

2. Сложение и умножение

Мы уже видели, что при подсчётах количеств полезно складывать и умножать. Вот ещё несколько задач такого рода.

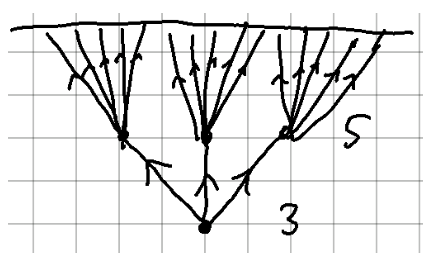
$\boxed{\textbf{2.1}}$ Из точки A к берегу ведут две дороги. Первая разветвляется на три, а вторая на пять. Сколькими способами можно пройти из A к берегу? (Идти обратно, удаляясь от берега, нельзя.)



▷ Все дороги можно посчитать — их восемь (на рисунке показаны места, где они упираются в берег). А можно просто сложить 3 и 5 и получить тот же ответ. ◁

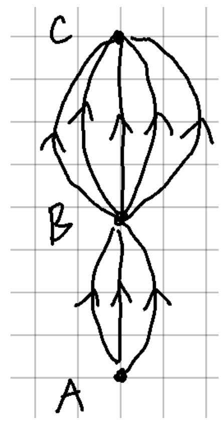
- Мы привели эту (очевидную) задачу, чтобы сравнить её со следующей.

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Из точки A к берегу ведут три дороги. Каждая из них разветвляется на 5 (и дальше дороги доходят до берега, не пересекаясь). Сколькими способами можно пройти из A к берегу?



▷ Здесь надо не складывать 3 и 5, а умножать: $3 \times 5 = 15$. В самом деле, пути делятся на три группы (в зависимости от того, куда мы пошли сначала). В каждой группе пять путей (отличающихся после развилки). Всего получается $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$. ◁

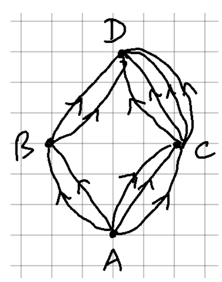
$\boxed{2.3}$ Из точки A в точку B ведут три дороги, а из точки B в точку C ведут пять дорог. Сколько есть способов добраться из A в C через B? (Возвращаться обратно нельзя.)



▷ И здесь нужно перемножить 3 и 5, даже рассуждение можно почти буквально повторить. Пути из A в C (через B) делятся на три группы, в зависимости от того, как мы шли из A в B. В каждой группе пять путей (отличающихся выбором на втором этапе). Всего получается $3\times 5 = 15$. ◁

В некоторых задачах полезно и складывать, и умножать.

$\boxed{2.4}$ Сколькими способами можно пройти из A в D? Можно идти и через B, и через C, но возращаться нельзя (дороги односторонние, как показано стрелками).



▷ Здесь все пути делятся на две группы: через B и через C. Надо подсчитать количество путей в каждой группе и потом сложить. Для каждой группы мы приходим к предыдущей задаче. Всего получится: 2×2 (через B) и 3×4 (через C), так что общее число $2 \times 2 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$. ◁

• Представление разных вариантов в виде «путей» может быть полезно и в задачах, где изначально речи о путях нет.

$\boxed{\textbf{2.5}}$ Сколько «слов» (осмысленных и бессмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове КОТ?

• Можно представить себе, что буквы К, О и Т написаны на трёх кубиках, из которых мы составляем трёхбуквенное слово. Скажем, можно составить слова ТОК или КТО. Спрашивается, сколько разных слов (включая исходное слово КОТ) можно составить таким образом.

▷ Вариантов не так много, и их можно все перечислить:

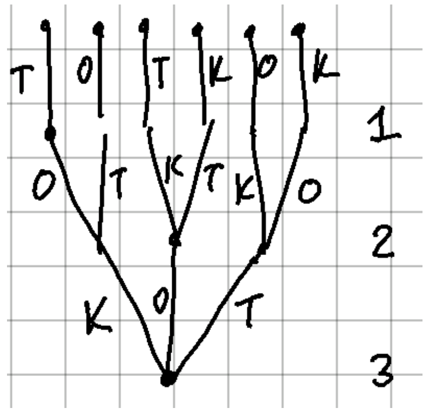
КОТ, ТОК, КТО, ОТК, ОКТ, ТКО.

Ответ: 6 «слов».

Можно ли на этом закончить решение? Придирчивый экзаменатор спросит: ну хорошо, вот вы перечислили шесть слов, но, может быть, какое-то ещё пропустили, и на самом деле их больше? Мы, конечно, можем ответить «ничего мы не пропустили — какое слово мы пропустили?!» — но экзаменатор на это скажет, что «бремя доказательства» лежит на решающем задачу: это мы должны доказать, что ничего не пропущено. Как это можно сделать?

Полезно перебирать слова более систематически. Посмотрим на первую букву. На первом месте может стоять буква К, буква О и буква Т. Поэтому все слова делятся на три группы: начинающиеся с К, с О и с Т. Пусть, скажем, с К. Осталось две буквы, и на второе место можно поставить любою из них — О или Т. Когда буква для второго места выбрана, дальше вариантов нет: осталась одна буква, которую только и можно поставить на третье место. Значит, на К есть два слова: КОТ и КТО. На О есть два слова ОКТ и ОТК, на Т есть два слова ТКО и ТОК. Всего получается 6 слов и вот теперь уже видно, что мы ни одной возможности не пропустили.

На картинке наши последовательные выборы можно изобразить как движение по «дереву вариантов»:



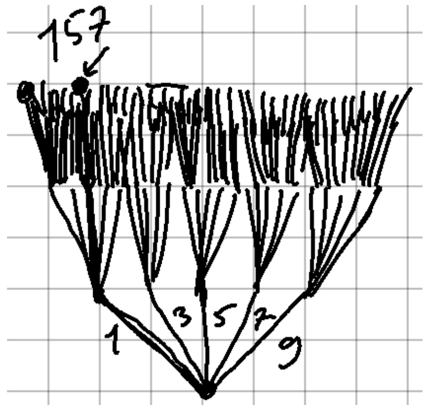
Сначала (на нижней развилке) у нас есть три варианта выбрать первую букву, потом есть два варианта для второй буквы, а третья определяется однозначно. ◁

▷ Можно перебирать варианты иначе, рассуждая так: буква К может стоять на любой из трёх возможных позиций, так что все слова делятся на три типа К**, *К*, **К (звёздочками показаны ещё не определившиеся буквы). Для каждого типа букву О можно поставить вместо любой из двух звёздочек (два варианта), и после этого положение буквы Т уже определяется однозначно. Получается такое же дерево (с ветвлением 3 в корне, 2 и 1 на следующих уровнях) и тот же ответ, но группы из двух слов другие: теперь, скажем, слова ТКО и ОКТ попали в одну группу (где К на втором месте), а раньше они были в разных (начинающиеся на Т и начинающиеся на О). ◁

2.6 Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны? Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны?

▷ Нечётных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9, и на первом месте может быть любая из них. Значит, все интересующие нас числа делятся на пять групп (1$**$, 3$**$, 5$**$, 7$**$, 9$**$; звёздочки обозначают какие-то нечётные цифры). Каждую группу снова можно разделить на пять групп по второй цифре. Скажем, группа 1$**$ делится на 11$*$, 13$*$, 15$*$, 17$*$ и 19$*$. Каждая из групп второго уровня состоит из пяти чисел (там одна звёздочка, которую можно заменить на любую из пяти нечётных цифр). Всего получается $5 \times 5 \times 5 = 125$ трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны.

Как и раньше, последовательные выборы можно представить в виде пути в дереве:



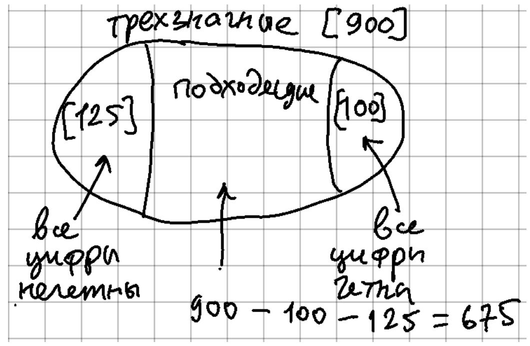
В каждой развилке пять вариантов, на первом уровне пять вершин, на втором $5 \times 5 = 25$, на третьем 125 трёхзначных чисел с нечётными цифрами.

То же самое рассуждение годится для чётных чисел, с одной поправкой. (Понятно, какой?) Нуль не может быть первой цифрой трёхзначного числа, поэтому на первом уровне только четыре варианта: $2, 4, 6, 8$. На следующих уровнях нуль ничем не хуже других, так что получается $4 \times 5 \times 5 = 100$ трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны. ◁

▷ Было бы проще, если бы мы рассматривали все числа от 000 до 999, записывая их тремя цифрами, тогда бы нуль ничем не отличался от остальных цифр. Но что есть, то есть: под трёхзначными числами понимают числа $100, \ldots, 999$. ◁

2.7* Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть и чётные, и нечётные цифры?

▷ Эта задача была бы сложнее, если бы она не шла после предыдущей. А так — достаточно понять, какие трёхзначные числа *не подходят* под описание «есть и чётные, и нечётные цифры». Для неподходящих чисел хотя бы одно из двух требований «есть чётные» и «есть нечётные» должно нарушаться. Если нарушается первое, то все цифры нечётны, если второе — то все чётны.



Как говорят математики, в множестве всех 900 трёхзначных чисел есть подмножество (часть), состоящая из тех, где все цифры нечётны (скажем, 757). На рисунке она показана слева, там, как мы уже знаем, 125 чисел. Есть другое подмножество — где все цифры чётны (справа, там 100 чисел). Заметим, что эти подмножества не пересекаются (у них нет общих чисел) — не может быть так, чтобы все три цифры были и чётны, и нечётны одновременно. Вне этих двух частей остаются как раз подходящие для нас числа — раз они не лежат в левой части, то у них есть чётная цифра, раз они не лежат в правой — есть нечётная.

Теперь осталось найти количество подходящих чисел вычитанием: $900 - 100 - 125 = 675$. ◁

• Можно считать подходящие числа «изнутри», а не дополнением до всех. Скажем, их можно разбить на две группы: одна чётная и две нечётных цифры, и наоборот. Каждую группу можно разбить на три: чётная (скажем) цифра может стоять на любом из трёх мест, и так далее. Но будет явно сложнее.

2.8 Пусть в какой-то стране автомобильные номера состоят из двух латинских букв, за которыми идут 4 цифры. Сколько различных номеров может быть в такой стране? (Считаем, что в латинском алфавите 26 букв.[6])

▷ Первую букву можно выбрать 26 способами, вторую тоже, затем первую цифру можно выбрать 10 способами и так далее до четвёртой. Как мы уже не раз видели, эти числа надо перемножить и получится $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000$. (Для небольшой страны вполне хватит.) ◁

• Можно вспомнить о полях шахматной доски: они обозначаются парой из буквы a, b, c, d, e, f, g, h и цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ («гроссмейстер сыграл e2–e4»). Всего получается 8 вариантов выбора буквы, для каждого по 8 вариантов выбора цифры, то есть 64 — как и должно быть для доски 8×8.

[6]Это не всегда было так: когда-то в латинских текстах не использовали буквы J, U и W.

Мы уже несколько раз использовали одни и те же рассуждения, которые можно сформулировать теперь в общем виде.

- Пусть мы хотим составить список из k позиций, на каждую из которых можно поместить любой из n элементов (без ограничений). Тогда это можно сделать n^k способами. То же самое иначе: если в алфавите n букв, то «слов» (осмысленных или нет) длины k будет n^k.

- Если мы дополнительно потребуем, чтобы все элементы списка были разными (один и тот же элемент не может быть использован повторно в другой позиции), то число таких списков будет

  $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

  Вариант: столько будет слов длины k в алфавите из n букв, в которые никакая буква не входит дважды.

- Частный случай предыдущего при $n = k$: если каждую из n букв требуется использовать в слове (длины n) ровно один раз, то таких слов будет $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

У этих ситуаций в русских учебниках есть традиционные названия. Вторая из них называется *размещения из n по k*, потому что мы размещаем какие-то из данных нам n элементов на k местах (первом, втором,..., k-м). Первая называется (немного странно) *размещениями с повторениями*. А последняя называется *перестановками n элементов*: мы переставляем алфавит из n букв в каком-то порядке.

Почему количества именно такие? В первом случае у нас k последовательных выборов, в каждом n вариантов, поэтому получается $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (k раз), то есть n^k. Во втором случае для первой буквы есть n вариантов, для второй $n-1$ (потому что первой буквы уже нет), для третьей надо выбирать из $n-2$ букв (кроме уже выбранной первой и второй), для четвёртой из $n-3$ и так далее до k-й буквы, где надо выбирать из $n-k+1$ (обратите внимание, что надо вычитать не номер буквы, а на единицу меньше: для четвёртой, скажем, было $n-3$ варианта, а не $n-4$). Всего получается $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

В случае перестановок мы доходим в произведении $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$ до конца (до множителя 1 — последняя буква без вариантов). Это произведение называют *факториалом числа n* и обозначают

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

▷ Математики в первом случае говорит о числе *отображений из k-элементного множества в n-элементное*, во втором — о числе *инъективных отображений из k-элементного множества в n-элементное*, в третьем — о числе *биективных отображений n-элементного множества в себя*. Смысл этих учёных терминов такой: отображение из k-элементного множества в n-элементное — это когда каждая из k позиций в списке отображается в занимающий её элемент, инъективность означает, что разные элементы отображаются в разные, а биективность — что имеется взаимно однозначное соответствие между позициями и элементами (все элементы разные и каждый элемент использован). ◁

2.9 Пусть, говоря о перестановках, мы вместо «ровно один раз» сказали «каждая буква используется не более одного раза». Изменится ли от этого количество перестановок? А если мы сказали «каждая буква используется не менее одного раза»?

▷ Если мы не забыли упомянуть, что число букв в алфавите и в слове одно и то же (n), то ничего не изменится: если каждая из n букв алфавита встречается в слове из n букв не более одного раза, то все буквы придётся использовать (если какую-то не использовать, то оставшихся $n-1$ букв не хватит, чтобы заполнить все позиции). Наоборот, если надо использовать в слове из n букв все n букв алфавита, то их нельзя использовать больше одного раза, потому что не хватит позиций. ◁

В задачах по комбинаторике, особенно школьных, часто вопросы о количестве объектов формулируются в бытовых терминах («оживляж»), и нужно вникнуть в формулировку (что именно мы подсчитываем? какие объекты считаются одинаковыми, а какие разными), чтобы узнать одну из описанных ситуаций. (Или констатировать, что задача более сложная и не сводится так сразу к готовым формулам.) Вот несколько простых примеров.

2.10 Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные и разные?

▷ Первую цифру можно выбрать 5 способами, после этого для второй есть 4 варианта, после её выбора для третьей есть 3 варианта, получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. ◁

2.11 Компьютерная память хранит *двоичные слова длины* 64 — последовательности из 64 битов.[7] (Бит — это нуль или единица). Сколько разных двоичных слов бывает?

[7]Это типичный размер для 2023 года — раньше часто было 32 или 16. Биты часто

▷ Для первого бита есть два варианта (все слова делятся на две группы — начинающиеся с нуля и с единицы), для каждого из двух вариантов есть два варианта второго бита (каждая группа делится ещё на две) и так далее. Всего 64 разветвлений и 2^{64} двоичных слов длины 64. ◁

• Если знать про двоичную систему счисления, можно сказать, что каждое двоичное слово изображает целое число от 000 … 000 (нуль) до 111 … 111 ($2^{64}-1$), и таких чисел как раз 2^{64}.

2.12 В классе проведено три контрольные работы, при этом каждый ученик получил за каждую из работ одну из оценок $3, 4, 5$. Какое максимальное число учеников может быть в классе, если известно, что нет двух учеников с одинаковым набором оценок?

▷ После этих контрольных у каждого ученика есть его результат — набор оценок. В нём три оценки, и каждая из них может принимать три значения $(3, 4, 5)$. Различных таких наборов, как мы знаем, $3^3 = 27$. Значит, в классе может быть максимум 27 учеников, если у каждого свой набор. ◁

2.13 Кодовый замок имеет девять кнопок. Известно, что для открытия двери нужно набрать код из трёх различных кнопок в определённом порядке. Сколько разных вариантов такого кода может быть? Тот же вопрос, если кнопки в коде не обязаны быть разными.

▷ Если коды — это последовательности из трёх *различных* кнопок (первый вопрос), то для первой кнопки в коде есть 9 вариантов (она может быть любой), для второй 8 (кроме первой), для третьей 7 (кроме первых двух), всего вариантов $9 \cdot 8 \cdot 7$.

Во втором случае все ветвления на 9 случаев, получаем 9^3. ◁

2.14* (Продолжение) Тот же вопрос, если для открытия замка нужно нажать на три кодовые кнопки одновременно.

▷ Эта задача уже более сложная (и мы к этому ещё вернёмся, так что пока скажем о решении коротко). Запишем все $9 \cdot 8 \cdot 7$ кодов (последовательностей с учётом порядка). Теперь сгруппируем их, поместив в одну группу те коды, которые используют одни и те же кнопки, но в разном порядке. Сколько кодов в каждой группе? Они получаются перестановками из любого кода в группе, то есть перестановками трёх элементов, таких перестановок $6 = 3!$. Раз каждая

разбивают на группы по 8, называемые *байтами*, так что каждое слово состоит из восьми байтов.

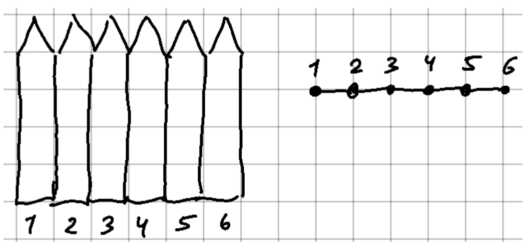
группа состоит из 6 элементов, то групп всего $9\cdot 8\cdot 7/6 = 84$. А их как раз столько, сколько кодов без учёта порядка. ◁

2.15* Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные, разные и идут в убывающем порядке. (Скажем, 751 годится, а 752, 775 или 375 — нет.)

▷ Все $60 = 5\cdot 4\cdot 3$ чисел с нечётными разными цифрами делятся на группы по $6 = 3\cdot 2\cdot 1$, если в группу объединить разные перестановки трёх цифр (из которых ровно одна убывающая). Поэтому искомых чисел столько, сколько групп, то есть $60/6 = 10$. ◁

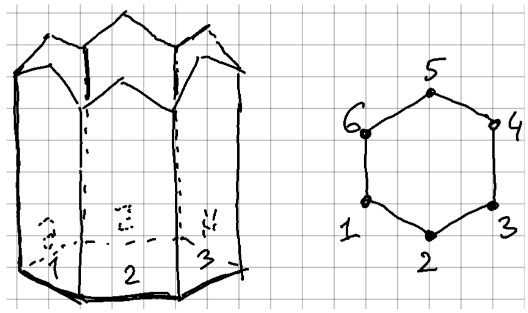
2.16 Забор из 6 досок раскрашивают в 3 цвета, каждую доску в какой-то цвет, причём соседние доски должны иметь разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

• На рисунке справа от забора нарисована схема задачи: каждая точка из шести точек изображает доску, а линии соединяют соседей, то есть доски, которые по условию должны быть покрашены в разные цвета. (Математики сказали бы, что надо покрасить вершины графа в три цвета, причём концы любого ребра должны иметь разные цвета.)



▷ Будем красить забор слева направо: для первой доски есть 3 варианта, для каждой из пяти следующих — только два (кроме цвета уже покрашенного левого соседа). Получаем $3\cdot 2^5 = 96$ вариантов раскраски. ◁

• Более сложная задача возникает для кольцевого забора (для шести досок он больше напоминает шестигранную беседку, но тем не менее).



2.17* Сколькими способами можно раскрасить кольцевой забор из шести досок, если есть три краски и соседние доски должны быть покрашены в разные цвета?

▷ Можно начать как в предыдущей задаче: сначала покрасить какую-то доску (3 варианта), затем красить доски по кругу (для каждой 2 варианта), пока мы не дойдём до последней доски. К этому моменту уже оба соседа будут покрашены, поэтому остаётся один вариант, получается $3 \cdot 2^4$.

Заметили ошибку в этом рассуждении? Для последней (шестой) доски может остаться и два варианта, если первая и пятая доски оказались покрашенными одинаково — а это вполне возможно, хотя и не обязательно. Можно сказать, что мы строим дерево вариантов, где в корне ветвление 3, выше ветвление 2 — вплоть до последнего уровня, где иногда ветвление 2, а иногда ветвление 1. Как же это учесть?

Давайте мысленно разрежем забор в каком-то одном месте (перестанем требовать различия цветов на этом стыке). Тогда получится предыдущая задача и $3 \cdot 2^5$ вариантов. В некоторых из этих вариантов доски по сторонам разреза покрашены по-разному и это годится для теперешней задачи, но в некоторых покрашены одинаково, эти варианты не годятся и их нужно вычесть. Сколько вариантов надо вычесть?

Мы вычитаем варианты, где две доски по краям разреза покрашены одинаково. Но если их надо красить одинаково, то это по существу одна доска удвоенной ширины. То есть надо посчитать, сколько есть правильных раскрасок кольцевого забора из пяти досок, и потом вычесть это число из $3 \cdot 2^5$.

Мы свели задачу для шести досок к задаче того же типа для пяти досок. Что это даёт? Мы можем точно так же свести задачу для пяти досок к задаче для четырёх, задачу для четырёх — к задаче для трёх. А для трёх все три цвета должны быть разными, так что мы знаем ответ ($6 = 3!$).

Итак, если S_n — число правильных раскрасок кольцевого забора из n досок, то $S_3 = 6$ и $S_n = 3 \cdot 2^{n-1} - S_{n-1}$. Получаем:

$$\begin{aligned} S_4 &= 3 \cdot 2^3 - S_3 = 24 - \ \ 6 = 18, \\ S_5 &= 3 \cdot 2^4 - S_4 = 48 - 18 = 30, \\ S_6 &= 3 \cdot 2^5 - S_5 = 96 - 30 = 66. \end{aligned}$$

Ответ: кольцевой забор из 6 досок имеет 66 раскрасок в три цвета, если требуется, чтобы соседние доски были раскрашены по-разному. ◁

• Задачу о правильных раскрасках можно поставить для любого *графа*, как сказали бы математики: надо нарисовать точки (*вершины*), которые красят в k цветов, и соединить линиями (*рёбрами*) те точки, которые нельзя красить одинаково. После этого можно спросить, сколько правильных раскрасок есть у такого графа.

▷ Для графа, где вершины соединены рёбрами по кругу (цикла) мы научились решать задачу сравнительно просто: хотя у нас и нет готовой формулы, но можно последовательно вычислять ответ для цикла из n вершин, используя ответ для предыдущего цикла. При некотором терпении даже без компьютера можно получить ответ для графов с десятками вершин (а уж с помощью компьютеров и десятки тысяч вершин не будут проблемой). Но это нам повезло: для произвольных графов найти число раскрасок в 3 цвета (или хотя бы просто узнать, равно ли это число нулю, то есть существуют ли такие раскраски) — вычислительно сложная задача, и математики подозревают (хотя и не могут доказать), что любой такой алгоритм требует «экспоненциального перебора» (если не всех раскрасок, то какого-то другого большого множества), и для графов из тысяч вершин это (пока?) недостижимо сложная задача.

Можно ещё спросить, есть ли явная формула для S_n в нашей задаче. Попробуйте её угадать; для начала можно поделить все числа на два, получатся числа $3, 9, 15, 33\ldots$ — они получаются из степеней двойки прибавлением или вычитанием единицы, и это не случайно: наше рассуждение позволяет доказать (по индукции), что $S_n = 2 \cdot (2^{n-1} + (-1)^n)$.

Можно фиксировать граф и рассматривать число правильных раскрасок в k цветов при разных k (как функцию от k). Эта функция всегда будет многочленом от k. Это можно доказать нашим способом, сведя граф к двум меньшим (надо выбрать ребро и рассмотреть два графа: в одном оно удалено, в другом стянуто в точку). Многочлен этот математики называют *хроматическим многочленом* графа. Приведённая выше формула для S_n обобщается на любое число цветов (k): хроматический многочлен равен $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$; при каждом n получаем многочлен от k степени n. ◁

2.18* В выражении

$$(a+b-c)(d+e-f)(g+h-i)(j+k-l)$$

раскрыли все скобки, получили сумму произведений групп из четырёх букв. Сколько слагаемых в этой сумме? Перед сколькими из ними стоит знак «минус»?

▷ Пока не будем смотреть на знаки. Слагаемое будет произведением четырёх букв: одной из первой скобки, одной из второй, из третьей и из четвёртой. Каждый выбор можно сделать (независимо от остальных) тремя способами, так что получаем $3^4 = 81$ слагаемых.

Перед сколькими из слагаемых стоит минус? Быстрее всего на этот вопрос можно ответить с помощью алгебраического трюка. Подставим вместо всех букв числа, равные единице. Тогда каждая скобка равна 1, произведение скобок равно 1, и каждая тройка букв даёт в произведении 1. Значит, троек букв с плюсом должно быть на одну больше, чем троек с минусом, то есть 41 и 40. Ответ: минус стоит перед 40 слагаемыми. ◁

Иногда перемножение количеств вариантов при независимом выборе полезно, даже если мы не знаем числа вариантов.

2.19* Пусть n — максимальное количество слонов, которое можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Покажите, что n чётно и что число способов расстановки n слонов, не бьющих друг друга, есть точный квадрат.

• Каждый слон атакует все поля на двух диагоналях, в пересечении которых он стоит.

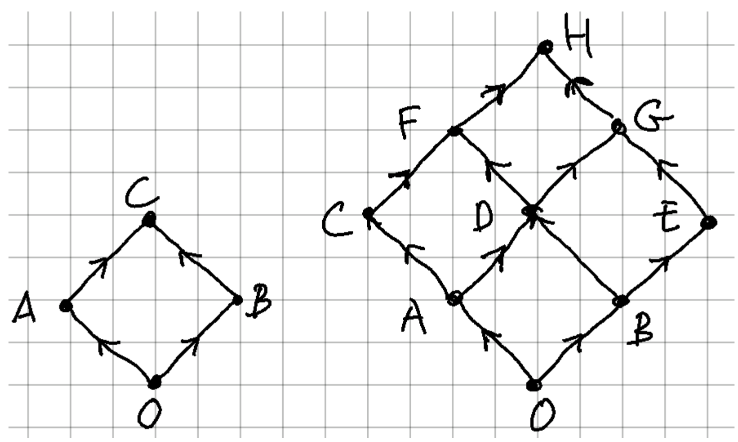
▷ Слоны бывают белопольные и чернопольные, и белопольный слон не может атаковать чернопольного. Поэтому тех и других можно расставлять независимо на белых и чёрных полях. При этом белые и чёрные поля устроены одинаково (отличаются поворотом на 90°), поэтому для них и максимальное число слонов k, и число расстановок для k слонов одно и тоже. Значит, для всей доски максимальное число слонов $2k$, а число их расстановок равно квадрату числа расстановок k белопольных слонов. ◁

3. Рекуррентные формулы

Не всегда ответ в комбинаторной задаче можно посчитать по какой-то формуле — но даже если нет, часто можно обойтись без перебора всех вариантов. Один из способов — свести задачу к другим задачам меньшего размера, которые предварительно решить.

Начнём с задачи, которая у нас уже была (и даже в более сложном варианте).

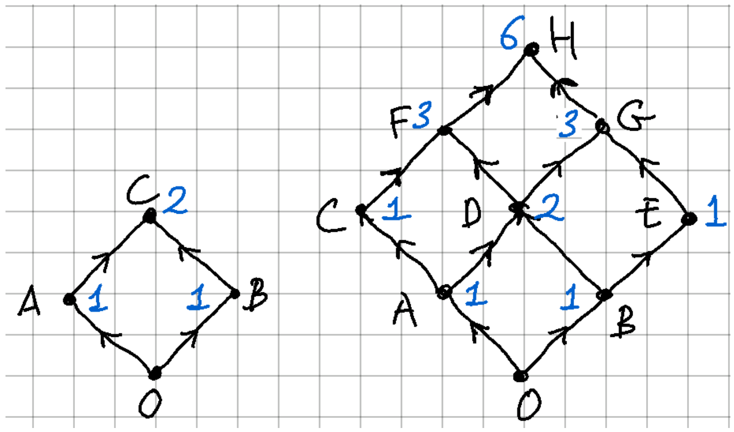
3.1 Найдите число различных путей из вершины O в вершины A, B и C (левый рисунок). Тот же вопрос для всех вершин (A, B, C, D, E, F) правого рисунка.



▷ В первом случае и искать нечего — в A и B есть единственный путь, а в C есть два пути (через A и B). У нас уже была более сложная задача, когда между городами было несколько дорог — тогда нужно было перемножать, а теперь достаточно только складывать.

Во втором случае для вершин A и B тоже есть единственный путь, а в вершину D можно прийти двумя путями (это тот же вопрос, что и для предыдущего рисунка). А что можно сказать про другие вершины? В вершины C и E путь единственный. Для вершины F можно заметить, что в неё можно прийти либо из C, либо из D, так что все пути делятся на две группы. Мы уже знаем, что в первой группе один путь (в C можно прийти единственным способом), а во второй — два. Всего в вершину F можно прийти тремя способами. Симметрично для вершины G.

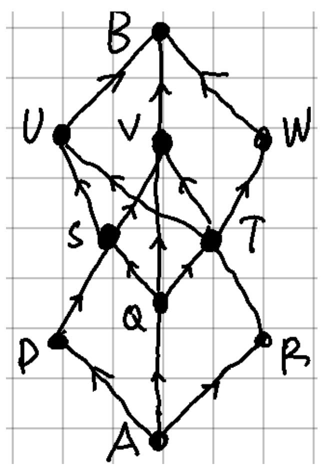
Наконец, в вершину H можно прийти из F и из G, получаются две группы из трёх путей каждая, всего 6 путей.



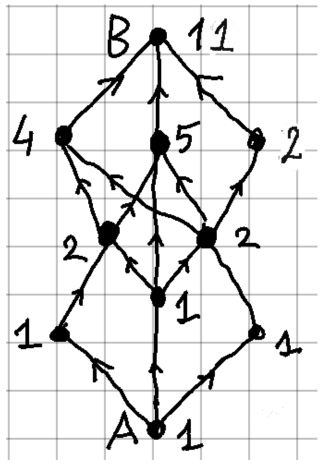
◁

Тот же приём работает и для более сложных схем дорог:

3.2* Найти число различных путей из вершины A в вершину B по дорогам на рисунке. (Стрелки указывают направление движения: дороги односторонние и ведут снизу вверх.)



▷ В этой задаче из разных вершин выходит разное число стрелок, так что нет какого-то простого способа поглядеть на картинку и сразу сказать ответ. Но если действовать систематически, то решить её легко. В вершины P, Q и R можно прийти (из вершины A) единственным способом. В вершину S можно прийти из P и из Q (куда можно было прийти единственными способом), значит, туда можно дойти двумя способами. Тот же ответ получается и для вершины T. Пути в вершину U проходят либо через S, либо через T, и тех и других по два (как мы видели), получается 4, и так далее.

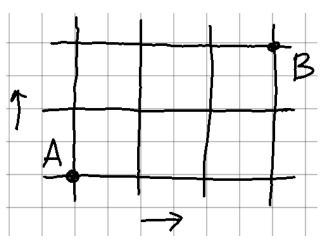


Общее правило: в исходной вершине стоит 1, во всех остальных стоит сумма чисел для всех возможных предшественников (откуда приходят дороги).

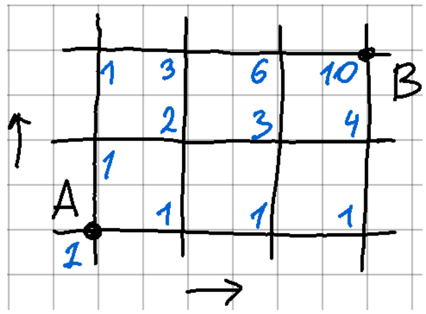
Для вершины B, таким образом, получается 11 возможных путей ($4+5+3=11$, складываем три группы идущих через трёх предшественников). ◁

Следующая задача продолжает уже решённую нами (только схема дорог тут чуть больше и она повёрнута так, что дороги горизонтальны и вертикальны).

3.3 Город разбит сеткой горизонтальных и вертикальных улиц на квадратные кварталы со стороной 1. Мы хотим пройти из точки A в точку B одним из кратчайших путей (то есть идя только вправо и вверх). Сколько таких путей существует?

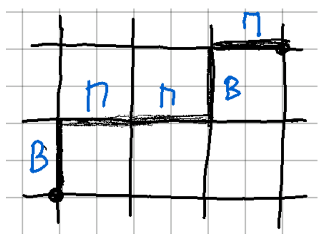


▷ Мы можем действовать по тому же принципу, постепенно расставляя в вершинах количество способов туда попасть из A. Для вершин на одной вертикали и горизонтали с A способ единственный, в остальные вершины можно попасть снизу и слева, так что все способы делятся на две группы: последний шаг снизу вверх или последний шаг слева направо. Значит, нужно сложить числа внизу и слева. Вот что получается:



Таким образом, из A в B есть 10 кратчайших путей. ◁

3.4 Перечислите эти 10 кратчайших путей из A в B, записывая каждый путь как последовательность шагов направо (П) и вверх (В).



Например, путь на картинке запишется как ВППВП. Пути удобно перечислять как в словаре («в лексикографическом порядке»): если два пути расходятся в каком-то месте, то раньше указывается путь, который идёт вверх (потому что «В» раньше «П» в алфавите). Первым в списке будет путь ВВППП.

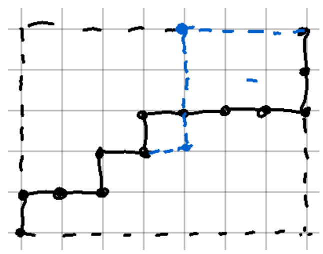
▷ Сначала идут пути, начинающиеся на В, потом начинающиеся на П:

ВВППП, ВПВПП, ВППВП, ВПППВ, ПВВПП, ПВПВП, ПВППВ, ППВВП, ППВПВ, ПППВВ.

(Как можно сразу сказать, что на В начинаются четыре пути, а на П шесть, глядя на числа на предыдущем рисунке?) ◁

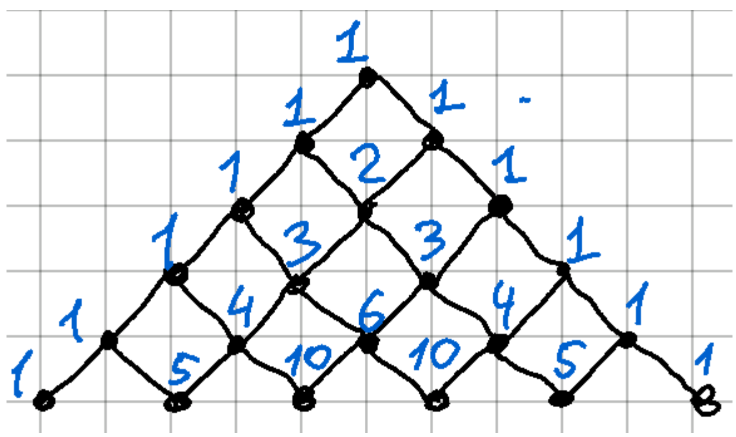
3.5* Мы перечисляем пути из точки A в точку B, которая на 7 кварталов правее и на 5 выше. Какой путь будет идти (в лексикографическом порядке) вслед за ВППВПВППППВВ?

▷ Следующий путь должен ответвляться от нашего, идя направо, когда наш идёт вверх, причём развилка должна быть как можно дальше от начала пути. Последние две буквы В мы не можем заменить на П (не меняя ничего раньше), так как тогда букв П станет слишком много. Значит, мы должны заменить третью справа букву В, и будет слово ВППВПП??????. Вопросительные знаки обозначают три буквы П и три буквы В, и раньше всех будет ВВВППП. Ответ: ВППВППВВВППП.



◁

Вернёмся к рисунку с количеством путей в разные перекрёстки. Для красоты его поворачивают так, чтобы вершина A была сверху и дороги вели вниз-влево и вниз-вправо:



Каждое число равно сумме двух стоящих над ним (а по левой и правой сторонам идущего вниз треугольника стоят единицы).

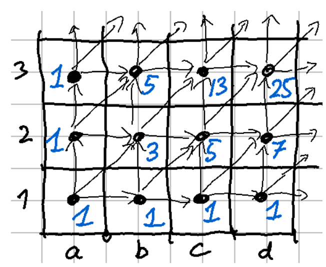
Заполненный таким образом числовой треугольник называют *треугольником Паскаля*[8] (хотя раньше его упоминал, скажем, знаменитый поэт Омар Хайям и другие), а его элементы — *биномиальными коэффициентами* или *числами сочетаний*. Немного позже мы объясним, откуда берутся эти названия.

[8]Блез Паскаль — французский математик и религиозный философ XVII века, один из основателей теории вероятностей.

Задачу о числе путей можно переформулировать так: «шахматная пешка идёт с поля a1 на поле d3, при этом она может идти направо и вверх (на одну клетку); сколькими способами она может это сделать?».

3.6 Как изменится ответ в этой задаче, если разрешить пешке ещё ходить вправо-вверх (в соседнюю клетку по диагонали)?

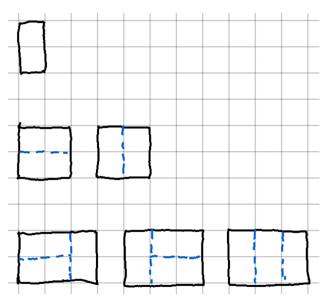
▷ На граф возможных ходов нужно добавить диагональные линии и пересчитать числа: на краю по прежнему единицы, но в остальные клетки можно попасть тремя способами и нужно сложить числа способов для трёх предшественников. Получится 25 способов.



◁

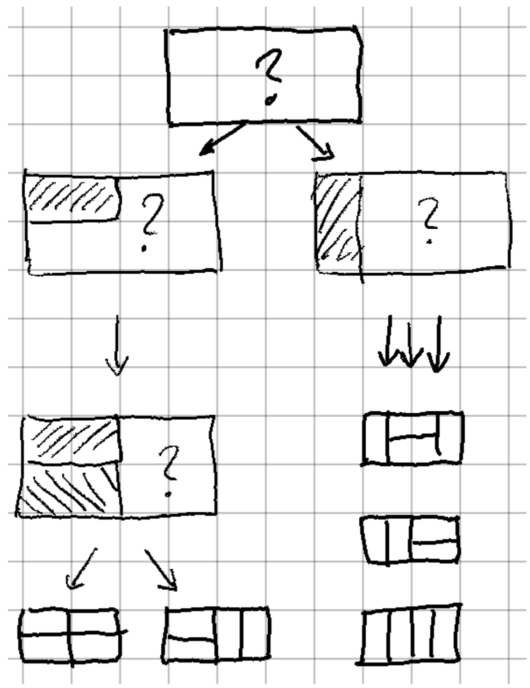
3.7 На клетчатой бумаге нарисована прямоугольная полоска 2×10. Мы хотим разрезать её на «доминошки» 1×2 (вертикальные и горизонтальные). Сколькими способами можно это сделать?

На рисунке показаны возможные способы разрезания для полосок 2×1, 2×2 и 2×3 (один, два и три способа соответственно).



Глядя на этот рисунок, можно предположить, что число способов для полоски $2 \times n$ равно n, но это не так — уже для $n = 4$ эта закономерность нарушается.

▷ Давайте подсчитаем число способов для полоски 2×4. Для этого разобьём все варианты на две части, посмотрев, какая доминошка примыкает е верхнему левому углу: горизонтальная или вертикальная.



В первом случае снизу от неё тоже горизонтальная доминошка (вертикальная никак не влезает), и остаётся разрезать квадрат 2×2. Во втором случае остаётся разрезать полоску 2×3. Обе эти задачи уже разбирались, соответственно есть 2 и 3 способа. Всего получается 5 способов. Другими словами, можно записать $S_4 = S_2 + S_3$, если через S_n обозначить число способов разрезания для полоски $2 \times n$. И вообще ровно по тем же причинам $S_n = S_{n-2} + S_{n-1}$ для любого $n \geqslant 4$. (Верно ли это для предыдущих n? Что надо взять за S_0, чтобы равенство было верно и для $n = 2$?)

Теперь несложно найти ответ:

$$S_4 = S_2 + S_3 = 2 + 3 = 5;$$
$$S_5 = S_3 + S_4 = 3 + 5 = 8;$$
$$S_6 = S_4 + S_5 = 5 + 8 = 13;$$
$$S_7 = S_5 + S_6 = 8 + 13 = 21;$$
$$S_8 = S_6 + S_7 = 13 + 21 = 34;$$
$$S_9 = S_7 + S_8 = 21 + 34 = 55;$$
$$S_{10} = S_8 + S_9 = 34 + 55 = 89.$$

Ответ: 89 способов разрезания полоски 2×10 на доминошки. $\triangleleft$

$\triangleright$ Последовательность $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ (где и дальше каждый член равен сумме двух предыдущих) называют *последовальностью Фибоначчи* (обычно к ней добавляют ещё единицу вначале, а часто и два члена $0, 1$, не нарушая закона построения). [9] Фибоначчи странным образом связывал эту последовательность с размножением кроликов (которые знать о ней не знают), но она и впрямь встречается в биологических объектах: если посчитать число спиралей в ананасах (или в шишках) в двух направлениях, часто можно увидеть соседние числа Фибоначчи.

У цветка Cota tinctoria (жёлтая ромашка) тоже можно увидеть 21 спираль в одном направлении и 13 в другом (фотография с дорисованными линиями спиралей взята из статьи в википедии о числах Фибоначчи). $\triangleleft$

[9] Про историю названия (довольно запутанную) можно прочесть, скажем, в википедии.

Мы уже обсуждали (задача 2.11), почему последовательностей нулей и единиц (двоичных слов) длины 10 есть $2^{10} = 1024$ штуки. Если наложить дополнительные ограничения, то некоторые последовательности отпадут и их станет меньше.

3.8 Сколько последовательностей длины 10 из нулей и единиц, в которых никакие два нуля не идут подряд?

• Например, из восьми последовательностей длины 3 исключаются последовательности `000`, `001` и `100` (проверьте, что остальные подходят), и остаётся пять.

▷ Давайте обозначим число двоичных слов длины n без двух нулей подряд через T_n. Тогда нам надо найти T_{10}, а $T_3 = 5$, как мы видели. Предыдущие члены: $T_1 = 2$ (обе годные) и $T_2 = 3$ (одна выброшена).

Все последовательности длины n без двух нулей подряд делятся на две категории: начинающиеся с нуля и начинающиеся с 1. Если последовательность начинается с нуля, то за ним должна быть единица (потому что два нуля подряд не разрешаются). Таким образом, последовательности бывают двух видов `01`x и `1`y. Здесь x — последовательность длины 8, а y — длины 9. Они не должны содержать двух нулей подряд (иначе вся последовательность будет выброшена). Но больше от них ничего не требуется: если в последовательности нет двух нулей подряд, то к ней можно приписать `01` или `1` слева, и двух нулей подряд не возникнет. Так что есть T_8 годных последовательностей вида `01`x и T_9 годных последовательностей вида `1`y. Отсюда находим: $T_{10} = T_8 + T_9$.

Аналогично $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}$, та же самая формула, что для чисел Фибоначчи. Только мы начинаем с $T_1 = 2$ и $T_2 = 3$, так что всё сдвинуто по сравнению с разрезанием полоски, и надо взять следующее число $55 + 89 = 144$. ◁

3.9* Сколько троичных слов (то есть последовательностей из цифр $0, 1, 2$) длины 10 без двух нулей подряд?

▷ Снова посмотрим на первую цифру. Если это не нуль, то с ней проблем нет. Если нуль, то вторая цифра может быть 1 или 2. Получаются группы `01`x, `02`y, `1z` и `1t`, так что рекуррентная формула теперь будет $T_n = 2T_{n-1} + 2T_{n-2}$. Начинаем с $T_1 = 3$ и $T_2 = 8$ (без одного), получаем (при некотором терпении или с помощью простой программы) последовательность

$$3, 8, 22, 60, 164, 448, 1224, 3344, 9136, 24960;$$

последний член как раз соответствует длине 10, так что он и будет ответом: 24960. ◁

3.10* Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых нет подряд идущих *трёх* нулей?

▷ Снова обозначая это число для длины n через T_n, мы видим, что $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_3 = 7$ (без одного). Что дальше? Слово может иметь вид $1x$, $01y$, $001z$ в зависимости от того, сколько у него спереди нулей (нуль, один или два, больше быть по условию не может). Остаток может быть любым словом (соответствующей длины) без трёх нулей. Получаем формулу $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, которая даёт последовательность

$$2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504.$$

Проверим ещё какой-нибудь член: скажем, эта формула даёт $T_4 = 13$, и это понятно, потому что выброшены три слова `0000`, `0001` и `1000` из 16. Получаем ответ 504. ◁

▷ Видно, что хороших слов (без трёх нулей) длины 10 чуть меньше половины от всех (504 из 1024). Если посчитать ещё несколько членов последовательности, мы увидим, что эта доля уменьшается с ростом n. Специалисты по теории вероятностей бы сказали, что *вероятность того, что при n бросаниях честной монеты не встретятся три орла подряд, убывает и стремится к нулю с ростом n.* ◁

Во всех предыдущих задачах мы находили нужное нам число способов, сведя задачу к меньшим — это часто бывает полезно (особенно если не удаётся сразу использовать какие-то известные формулы). В качестве иллюстрации вернёмся к задаче о положительных и отрицательных членах в произведении, которую мы уже разбирали (2.18).

3.11* Рассмотрим произведение скобок

$$(a + b - c)(d + e - f)(g + h - i)\ldots,$$

где переменные в скобках не повторяются и в каждой скобке два плюса и один минус. Сколько членов и перед сколькими стоит знак минус, если в произведении n скобок?

▷ Всего членов будет 3^n, потому что в каждой из n скобок можно выбрать переменную тремя способами. Мы видели, что можно определить число минусов с помощью такого трюка: подставить вместо всех переменных число 1, тогда в каждой скобке будет 1, произведение всех скобок будет 1, поэтому членов с плюсом на один больше, чем членов с минусом.

Если бы мы не знали этого трюка, можно было бы решить задачу так: пусть P_n и N_n — число положительных и отрицательных членов в произведении n скобок. Если мы добавим ещё скобку, положительных членов будет $P_{n+1} = 2P_n + N_n$ (умножаем положительные на две переменные с плюсом и отрицательные на переменную с минусом) и $N_{n+1} = 2N_n + P_n$ (по аналогичным причинам). Начинаем с $P_1 = 2$ и $N_1 = 1$, получаем $P_2 = 2P_1 + N_1 = 5$ и $N_2 = 2N_1 + P_1 = 4$, затем $P_3 = 2 \cdot 5 + 4 = 14$ и $N_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$, затем $P_4 = 2 \cdot 14 + 13 = 41$ и $N_4 = 2 \cdot 13 + 14 = 40$ и так далее. Можно заметить уже знакомую нам закономерность (положительных на единицу больше) и даже доказать, что она сохраняется при переходе к следующему значению n. Но и без того по нашей рекуррентной формуле можно найти интересующие нас количества довольно быстро. ◁

В заключение раздела приведём ещё несколько задач, где похожие соображения (сведение к задачам меньшего размера или более простым) позволяют получить ответ, не перебирая всех вариантов.

$\boxed{\textbf{3.12}^*}$ Сколькими способами можно заплатить 37 рублей, если есть только монеты в 1, 2 и 5 рублей? (Способы, отличающиеся только порядком монет, считаем одинаковыми.)

- Например, для 7 рублей есть пять способов

$$5 + 2, 5 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1$$

(мы не различаем, скажем, $5 + 2$ и $2 + 5$, потому что они отличаются только порядком уплаты).

▷ Для начала решим ту же задачу для двух типов монет: 1 и 2 рубля. Способ уплаты в таком случае определяется числом двухрублёвых монет (остаток платится рублёвыми монетами без вариантов), которых может быть от 0 до $n/2$. Поэтому для этой задачи число вариантов S_n можно найти по формуле $S_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (уголки обозначают округление вниз, в сторону уменьшения). Скажем, $S_3 = \lfloor 3/2 \rfloor + 1 = \lfloor 1{,}5 + 1 \rfloor = 1 + 1 = 2$, что соответствует $1 + 1 + 1$ и $2 + 1$.

Теперь перейдём к более сложной задаче, когда есть пятирублёвые монеты. Обозначим через T_n искомое число. Тогда $T_n = S_n$ при $n < 5$ (тогда пятирублёвые монеты использовать нельзя). Если $n \geqslant 5$, то можно не использовать пятирублёвые монеты (S_n способов), или использовать по крайней мере одну, тогда после её использования остаётся T_{n-5} вариантов, то есть $T_n = S_n + T_{n-5} = \lfloor n/2 \rfloor + 1 + T_{n-5}$. По этой формуле теперь находим искомое число (сводя 37 к

32, 27, 22, 17, 12, 7, 2):

$$\begin{aligned}
T_2 &= S_2 = \lfloor 2/2 \rfloor + 1 = 2,\\
T_7 &= \lfloor 7/2 \rfloor + 1 + T_2 = 4 + 2 = 6,\\
T_{12} &= \lfloor 12/2 \rfloor + 1 + T_7 = 7 + 6 = 13,\\
T_{17} &= \lfloor 17/2 \rfloor + 1 + T_{12} = 9 + 13 = 22,\\
T_{22} &= \lfloor 22/2 \rfloor + 1 + T_{17} = 12 + 22 = 34,\\
T_{27} &= \lfloor 27/2 \rfloor + 1 + T_{22} = 14 + 34 = 48,\\
T_{32} &= \lfloor 32/2 \rfloor + 1 + T_{27} = 17 + 48 = 65,\\
T_{37} &= \lfloor 37/2 \rfloor + 1 + T_{32} = 19 + 65 = 84,
\end{aligned}$$

Ответ: 37 монет можно уплатить с помощью монет в 1, 2, 5 рублей 84 различными способами. ◁

▷ Математики могли бы заметить, что нам нужно вычислить коэффициент при x^{37} в произведении

$$(1 + x + x^2 + x + 3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots),$$

но с точки зрения вычислений это мало что даёт, даже если просуммировать бесконечные ряды и записать это произведение как

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 + x^7 - x^8},$$

откуда можно получить рекуррентное соотношение

$$T_n - T_{n-1} - T_{n-2} + T_{n-3} - T_{n-5} + T_{n-6} + T_{n-7} - T_{n-8} = 0.$$

Но с точки зрения вычислений это соотношение, пожалуй, даже менее удобно, потому что надо вычислять все T_n подряд[10]. Зато, если уметь пользоваться какой-нибудь компьютерной системой символьных вычислений, можно получить ответ почти сразу (на рисунке часть вывода системы `wolframalpha`, обведён нужный коэффициент).

[10]Если только n не очень велико и мы не вычисляем степень матрицы повторным возведением в квадрат.

series	$\dfrac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^5\right)}$	point	$x=0$

Series expansion at x = 0

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+7x^8+8x^9+10x^{10}+11x^{11}+13x^{12}+14x^{13}+16x^{14}+18x^{15}+20x^{16}+22x^{17}+24x^{18}+26x^{19}+29x^{20}+31x^{21}+34x^{22}+36x^{23}+39x^{24}+42x^{25}+45x^{26}+48x^{27}+51x^{28}+54x^{29}+58x^{30}+61x^{31}+65x^{32}+68x^{33}+72x^{34}+76x^{35}+80x^{36}+84x^{37}+88x^{38}+92x^{39}+97x^{40}+101x^{41}+106x^{42}+110x^{43}+115x^{44}+120x^{45}+125x^{46}+130x^{47}+135x^{48}+140x^{49}+146x^{50}+151x^{51}+157x^{52}+162x^{53}+168x^{54}+174x^{55}+180x^{56}+O\left(x^{57}\right)$$

◁

3.13* Найдите число решений уравнения $x + 2y + 5z = 37$ в целых неотрицательных числах.

▷ Решения — это варианты уплаты 37 рублей нашими монетами (x — число рублёвых монет, y и z — число двух- и пятирублёвых), так что их будет 84. ◁

В следующей задаче мы считаем способы разбиения целого положительного числа на любые целые положительные слагаемые (можно сказать, что теперь есть монеты любого целого достоинства). Скажем, для числа 5 есть такие разбиения:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,$$

всего 7 вариантов.

3.14* Как объяснить, что в этом перечислении мы не пропустили ни одного варианта? Найдите число разбиений для $n = 10$.

▷ Можно рассортировать варианты по *наибольшему входящему в них слагаемому*. Если это 5, то на этом всё и кончается, и есть только один вариант (никаких слагаемых больше нет). Если это 4, то остаётся ещё разложить 1 (единственный вариант), если 3, то остаётся разложить 2 (два варианта 2 и 1+1), если 2, то остаётся 3, *и надо представить его суммой слагаемых, не превосходящих* 2 (потому что иначе 2 не было бы наибольшим слагаемым), и это можно сделать двумя способами ($2+1$ и $1+1+1$). Наконец, если наибольшее слагаемое 1, то все остальные слагаемые тоже 1 (единственный способ).

Это же рассуждение можно применить для определения числа $T_{n,k}$ — количества разбиений n на слагаемые, не превосходящие k для $n \geqslant k \geqslant 0$. (Искомое число разбиений будет $T_{n,n}$.) А именно,

$$T_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} T_{n-i,i}$$

(считаем отдельно для каждого варианта наибольшего слагаемого i; может оказаться, что $i > n-i$, тогда в правой части $T_{n-i,i}$ нужно заменить на $T_{n-i,n-i}$, потому что тогда i перестаёт быть ограничением). Теперь можно заполнить таблицу для $T_{n,k}$ (при $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 10$, по вертикали откладывается n, по горизонтали k):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	2								
3	0	1	2	3							
4	0	1	3	4	5						
5	0	1	3	5	6	7					
6	0	1	4	7	9	10	11				
7	0	1	4	8	11	13	14	15			
8	0	1	5	10	15	18	20	21	22		
9	0	1	5	12	18	23	26	28	29	30	
10	0	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42

В правом нижнем углу стоит искомый ответ: 42. $\lhd$

$\rhd$ Можно также написать коротную программу на каком-нибудь знакомом вам языке программирования (здесь использован питон)

```
N=10
T = [[0 for x in range(N+1)] for y in range(N+1)]
T[0][0]=1
for n in range(1,N+1):
  T[n][0]=0
  for k in range (1,n+1):
    T[n][k]= sum([(0 if n-i<0 else \
    (T[n-i][i] if i<=n-i else T[n-i][n-i]))\
    for i in range(1,k+1)] )
print ([T[i][i] for i in range(0,N+1)])

[1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42]
```

Есть и другое рекуррентное соотношение для количества $T_n (= T_{n,n})$ разбиений n на слагаемые, открытое Эйлером:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

Здесь знаки идут парами (два плюса, два минуса, потом снова два плюса и так далее), а вычитаемые из n числа получаются по формулам $k(3k-1)/2$ для первого члена пары и $k(3k+1)/2$ для второго члена пары ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Мы считаем, что $T_0 = 1$ и $T_i = 0$ при $i < 0$. Это соотношение связано с *пентагональной теоремой Эйлера*, говорящей, что в бесконечном произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \ldots$$

удивительным образом все ненулевые коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по указанным выше формулам. Название «пентагональная» связана с “pentagonal numbers” — пятиугольными числами, которые равны числу точек в составленных определённым образом пятиугольниках ($1, 5, 12, 22, 35, \ldots$); мы не будем рисовать эту картинку (её можно посмотреть в википедии). Они появляются как степени в группах из двух членов одного знака. $\lhd$

В последней задаче нужно найти, сколькими способами можно вычислить произведение n сомножителей, еесли сомножители нельзя переставлять, а можно только по-разному группировать. Скажем, для трёх сомножителей a, b, c есть два способа $(ab)c$ и $a(bc)$, а для четырёх есть пять способов $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ и $a(b(cd))$.

3.15* Найдите количество способов для 7 сомножителей.

$\rhd$ Для начала поймём, почему мы не пропустили ни одного способа для четырёх сомножителей. Посмотрим на *последнее* (в смысле порядка действий) умножение, которое даёт окончательный результат. Оно может быть в трёх местах: $a \cdot (bcd)$, $(ab) \cdot (cd)$ и $(abc) \cdot d$. Во втором случае есть только один вариант, а в первом и третьем случае есть два способа вычислить произведение (трёх сомножителей). Всего $2 + 1 + 2 = 5$ способов.

То же самое рассуждение позволяет получить общую формулу для числа способов для n сомножителей, которое мы обозначим через C_n:

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + C_3 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1.$$

Начав с $C_1 = 1$, мы можем вычислить $C_2 = 1 \cdot 1 = 1$, затем

$$
\begin{aligned}
&C_3 = C_1C_2 + C_2C_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2,\\
&C_4 = C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5,\\
&C_5 = C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14,\\
&C_6 = C_1C_5 + C_2C_4 + C_3C_3 + C_4C_2 + C_5C_1 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42,\\
&C_7 = C_1C_6 + C_2C_5 + C_3C_4 + C_4C_3 + C_5C_2 + C_6C_1 =\\
&\quad = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132,
\end{aligned}
$$

так что для семи сомножителей получается 132 способа. $\triangleleft$

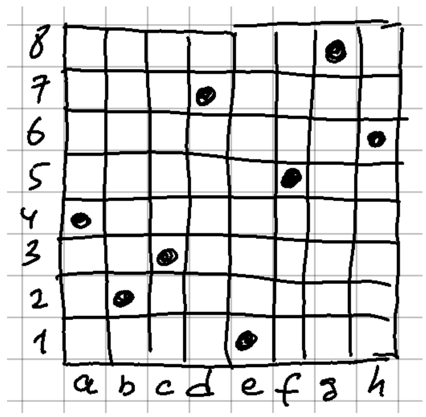
$\triangleright$ Эти числа $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots)$ появляются во многих других задачах и называются *числами Каталана*. Обычно нумерацию сдвигают и считают n-м числом Каталана количество способов вычислить произведение из $n+1$ сомножителей, так что в стандартных обозначениях наш ответ 132 будет C_6, а не C_7. Для чисел Каталана есть формула с факториалами $(2n)!/(n!(n+1)!$, при $n = 6$ будет как раз $12!/(6!7!) = 132$. Мы ещё встретимся с числами Каталана в следующих разделах. $\triangleleft$

4. Соответствия

Мы разберём несколько задач, в которых полезно сравнивать размеры разных множеств, устанавливая между ними соответствия (что это значит, будет видно из примеров).

4.1 На шахматную доску 8×8 ставят 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. (Это значит, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали должно быть не больше одной ладьи.) Сколькими способами это можно сделать?

На рисунке показана одна из таких расстановок.



▷ В шахматной нотации положение ладей на рисунке можно записать как

a4, b1, c3, d7, e1, f5, g8, h6.

Заметим, что вертикалей восемь, ладей тоже восемь, и в одной вертикали двум ладьям стоять нельзя, значит, все вертикали должны быть использованы (семи не хватит для восьми ладей — это простое соображение часто называют *принципом Дирихле*, а по-английски pigeon-hole principle[11]) Поэтому можно, перечисляя ладьи слева направо, вертикали

[11]Английское название объясняется просто: если у нас больше голубей (pigeons), чем нор (holes), значит, в какой-то норе будет больше одного голубя. Французский математик Дирихле использовал это простое соображение, доказывая теорему о приближении иррациональных чисел рациональными, и отсюда произошло русское название — хотя по-хорошему Дирихле должен быть знаменит совсем не этим: скажем, он доказал, что в арифметической прогрессии с взаимно простым первым членом и разностью бесконечно много простых чисел.

не указывать, и написать сокращённо 41371586. Условие задачи требует, чтобы и в каждой горизонтали стояло не больше одной ладьи, поэтому в этой сокращённой записи каждая цифра от 1 до 8 должна встречаться по одному разу. (Не более одного раза — а поскольку цифр столько же, значит, ровно по одному разу.)

Теперь можно вспомнить, что таких перестановок цифр от 1 до 8 (последовательностей из восьми цифр, где каждая цифра $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ встречается по разу), будет $8!$. (Первую цифру можно выбрать 8 способами, для каждого из них вторую можно выбрать 7, чтобы не совпало с первой, и так далее до последней цифры, которая определяется однозначно. Поэтому расстановок ладей тоже будет $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. $\triangleleft$

Говоря научно, мы установили *взаимно однозначное соответствие* между расстановками ладей, удовлетворяющими условию, и перестановками 8 цифр, и заключили отсюда, что искомых расстановок столько же, сколько перестановок 8 цифр.

В общем виде: если между двумя (конечными) множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число элементов.[12]

$\triangleright$ Этот приём часто иллюстрируют примерами «из жизни»: скажем, чтобы проверить, что в комнате столько же человек, сколько стульев, надо попросить их сесть на стулья. Взаимная однозначность соответствия при этом означает две вещи: что никакие два человека не сидят на одном стуле («отображение людей в стулья является инъекцией», сказали бы математики) и что ни один стул не пустой («это отображение является сюръекцией»).

Философы заметили бы, что сам процесс счёта предметов представляет собой установление взаимно однозначного соответствия между пересчитываемыми предметами и числами $1, 2, 3, \ldots, n$ (для какого-то n, которое и называется числом предметов). Дальше бы они спросили, почему это n оказывается тем же при повторном пересчёте, но это уже совсем философский вопрос… $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{4.2}}$ Беня решал задачу о ладьях, не бьющих друг друга, и расссуждал так. Первую ладью можно поставить на доску 64 способами. После этого

[12]Оговорка про конечные множества тут важна: про бесконечные множества не сразу ясно, что такое «число элементов в них». Ещё Галилей заметил, что все целые положительные числа $1, 2, 3, 4, \ldots$ можно поставить в соответствие с точными квадратами $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, при котором число n соответствует квадрату n^2 — хотя квадраты составляют лишь небольшую часть целых чисел. Этим занимается теория множеств; число элементов в бесконечном множестве называется там его *мощностью*.

одна вертикаль и одна горизонталь выбывают, для второй ладьи разрешены только 49 клеток (7 вертикалей по 7 клеток в каждой). Для третьей будут доступны 36 клеток и так далее до последней ладьи, которой останется единственная возможная клетка. Получаем ответ

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (8!)^2.$$

Почему у него получился другой (и гораздо больший) ответ?

▷ Природа явления станет понятной, если рассмотреть доску 2×2 и две ладьи. Их можно ставить по диагонали, и есть два способа, которые в нашей записи соответствуют `12` и `21`. Рассуждая как Беня, мы можем первую ладью поставить 4 способами, после чего положение второй определяется однозначно — получается четыре способа вместо двух.

Откуда берётся разница? потому что Беня считает расстановку `a1`, `b2` два раза — как первую ладью на `a1` и как первую ладью на `b2`. Его подсчёт был бы правильным, если бы ладьи имели бы каждая свою неповторимую индивидуальность (или просто пронумерованы) и мы бы различали эти конфигурации (с первой ладьёй на `a1` и с первой ладьёй на `b2`). ◁

• Для доски 8×8 ответ получается больше в 8! раз, потому что каждой расстановке одинаковых ладей соответствует 8! расстановок индивидуализированных ладей (ладьи можно пронумеровать 8! разными способами: сначала есть 8 вариантов для первой, потом 7 для второй, и так далее) — мы ещё увидим это рассуждение в дальнейшем.

▷ Мораль: решая комбинаторную задачу, важно чётко понимать, *что именно* мы считаем (какие ситуации допустимы, и какие мы считаем одинаковыми, а какие разными). ◁

$\boxed{\textbf{4.3}^*}$ Какое максимальное число ладей, не бьющих друг друга, можно поставить на половину доски (прямоугольник 4×8 — скажем, левую половину доски)? Сколькими способами можно это сделать?

▷ Теперь только четыре вертикали, поэтому можно поставить максимум четыре ладьи. Это сделать можно (горизонталей хватит с запасом). Сколькими способами? На первую вертикаль можно поставить 8 способами, после этого для ладьи на второй вертикали останется 7, потом 6, потом 5, всего $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. ◁

$\boxed{\textbf{4.4}}$ Аня хочет показать своей сестре фокус. Она пишет на листе бумаги

`НАУКА`

УМЕЕТ
МНОГО
ГИТИК

и предлагает сестре задумать одну из написанных букв и сказать, в каких строках эта буква есть (скажем, буква У есть в первой и второй строках, а буква И только в четвёртой). После чего она обязуется угадать задуманную букву. Сможет ли Аня гарантированно выполнить своё обещание? Получится ли этот фокус, если вместо УМЕЕТ во второй строке написать ИМЕЕТ (как герой повести Евгения Замятина «На куличках»)?

▷ Чтобы это понять, запишем про все буквы, в каких строках они есть:

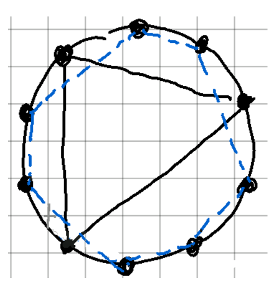
Н	А	У	К	М	Е	Т	О	Г	И
1, 3	1	1, 2	1, 4	2, 3	2	2, 4	3	3, 4	4

Видно, что все комбинации строк, соответствующие буквам, разные. Поэтому Аня сможет по такой комбинации восстановить букву. (Можно проверить также, что какую бы строку или две строки ни назвала сестра, Аня всегда подберёт подходящую букву: тут есть взаимно однозначное соответствие между буквами и вариантами для строк.)

А если написать ИМЕЕТ вместо УМЕЕТ, то буква И будет встречаться во второй и четвёртой строках и перепутается с буквой Т — однозначность нарушится. (А буква У будет встречаться только в первой строке и перепутается с буквой А.) ◁

$\boxed{\textbf{4.5}}$ На окружности отмечено 10 точек. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках или семиугольников с вершинами в этих точках?

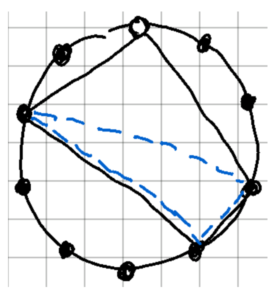
На рисунке показаны один такой треугольник и один такой семиугольник (мы считаем их непересекающимися, и вершины соединяются в порядке обхода по кругу).



▷ Треугольников и семиугольников с вершинами в данных точках поровну, потому что можно установить между ними взаимно однозначное соответствие. Намёк на это соответствие уже есть на картинке: треугольник включает три вершины, и остаётся семь. Если их соединить (это можно сделать единственным способом, иначе получатся самопересечения), будет семиугольник. С другой стороны, если взять семиугольник, то неиспользованные в нём три вершины образуют треугольник. ◁

• Мы решили задачу, установив соответствие и доказав тем самым, что треугольников и семиугольников одинаковое количество — но не указали этого количества. Мы увидим вскоре, что оно равно *числу сочетаний из* 10 *по* 7 (или *числу сочетаний из* 10 *по* 3).

4.6* На окружности отмечено 10 точек: девять чёрных и одна белая. Чего больше: многоугольников, у которых все вершины чёрные, или многоугольников, у которых есть и белая вершина (а остальные — чёрные)? Чего больше — треугольников с чёрными вершинами или четырёхугольников с одной белой и тремя чёрными вершинами?



Многоугольники в этой задаче — это треугольники, четырёхугольники и так далее (до десятиугольников, больше вершин нет). На рисунке показан один многоугольник (четырёхугольник) с белой вершиной и один (треугольник) без неё.

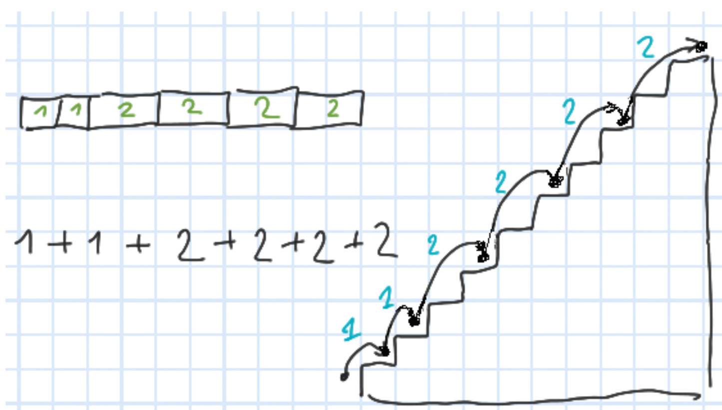
▷ Снова картинка подсказывает соответствие: для всякого многоугольника с чёрными вершинами можно добавить к нему белую вершину и получить многоугольник с белой вершиной. Будет ли это соответствие взаимно однозначным? Нет, потому что хотя разные многоугольники при добавлении белой вершины и остаются разными, но есть многоугольники с белой вершиной, которые никому не соответствуют. А именно, треугольники с белой вершиной — они получались бы из «чёрных двуугольников», но таких у нас нет.

Значит, многоугольников с белой вершиной больше. А вот треугольники с чёрными вершинами как раз соответствуют четырёхугольникам с белой вершиной, так что их поровну. ◁

$\boxed{\textbf{4.7}}$ Объясните, почему следующие три вопроса имеют один и тот же ответ:

- Сколькими способами можно замостить полоску 10×1, если разрешается использовать плитки 1×1 и 1×2?
- Сколькими способами можно представить 10 в виде суммы слагаемых, используя только 1 и 2 (и учитывая порядок слагаемых, скажем, варианты $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$ и $2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ считаются за разные)?
- Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек, делая шаги в одну или две ступеньки. Сколькими различными способами он может это сделать?

▷ Слагаемые в сумме можно понимать как длины шагов или как размеры плиток. Скажем, сумма $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$ соответствует тому, что Петя два раза поднялся по одной ступеньке, а потом четыре раза поднялся на две (перепрыгивая через ступеньку). С плитками:



слева направо плитка 1, потом ещё раз 1, потом четыре раза плитка 2×1.

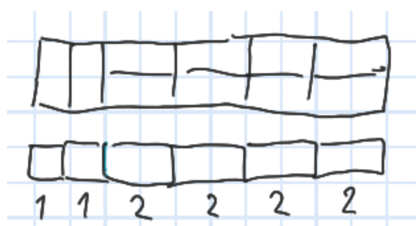
И наоборот, если, скажем, у нас полоска 10×1 выложена плитками шириной 1 и длиной 1 и 2, то длины плиток, читаемые с одного конца к другому, и будут слагаемыми (или размерами шагов). То же самое для способов подъёма: размеры шагов будут слагаемыми. ◁

4.8* Найдите количество способов в предыдущей задаче (как мы уже знаем, одно и то же для всех трёх вариантов).

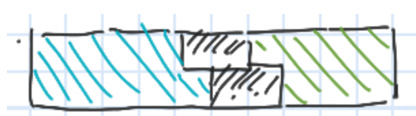
▷ Как мы уже делали, найдём рекуррентную формулу для полоски $n \times 1$, или числа способов разложения n на слагаемые 1 и 2, или числа способов подняться на n ступенек шагами по 1 и 2 ступеньки. Обозначим число способов за T_n. Например, $T_2 = 2$ (есть два разложения 2 и $1+1$), а $T_3 = 3$ (есть варианты $1+2$, $2+1$ и $1+1+1$).

Все они делятся на две категории — в зависимости от первого слагаемого (первого шага, первой плитки). Если первое слагаемое равно 1, то остаётся разложить $n-1$ в сумму слагаемых, если первое слагаемое 2, то разложить $n-2$, поэтому $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$. Значит, $T_4 = 2 + 3 = 5$, и получается последовательность $2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$, и нужный нам член 89. ◁

• То же рекуррентное соотношение — и тот же ответ — у нас был в задаче о разрезании полоски 2×10 на доминошки. И даже можно понять, почему: слагаемому 2 в сумме соответствует квадрат 2×2, разрезанный по горизонтали, а слагаемому 1 — вертикальная полоска.

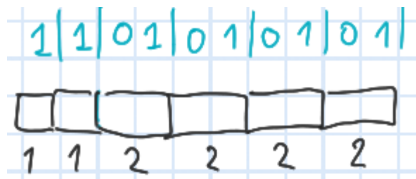


Тут, правда, возникает вопрос: а почему не бывает разрезаний, где две доминошки лежат со сдвигом (тогда это не соответствует никакой сумме слагаемых). На это можно ответить по-разному: во-первых, по индукции (отрезая левую вертикальную полоску или квадратик 2×2), во-вторых, можно заметить, что плитки со сдвигом разрезали бы полоску на две области с нечётным числом клеток, которые дальше не разрезать на целое число доминошек.



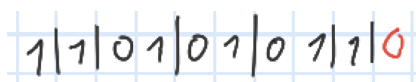
4.9* Решая предыдущую задачу, Беня вспомнил, что мы считали последовательности нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд, и разбивали последовательности на блоки 1 и 01 (слева направо, задача 3.8). Теперь мы разрезаем полоску длины 10 на квадраты 1×1, в которых можно написать 1, и доминошки 2×1, в которых можно написать

01. Значит, каждому разрезанию соответствует «хорошее» двоичное слово длины 10, в котором нет двух нулей подряд.



А хороших слов было 144, значит и разрезаний 144. Прав ли Беня?

▷ Нет — ведь ответ другой. А дело в том, что это соответствие не взаимно однозначно: например, хорошему слову 1101010110 не соответствует никакого разрезания



(последний нуль остаётся без следующей за ним единицы, и блока не получается). На самом деле можно заметить, что все слова, соответствующие разрезаниям, кончаются на 1 и наоборот, любое хорошее слово, кончающееся на 1, получается из разрезания (эта единица может оказаться в процессе разрезания либо отдельным блоком, либо второй в 01). Поэтому надо искать число хороших слов длины 10, кончающихся на 1, то есть число хороших слов длины 9, и получается правильный ответ 89. ◁

4.10* Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы целых положительных слагаемых с учётом порядка? (Скажем, для числа 3 способы $1 + 2$ и $2 + 1$ считаются разными, а всего способов четыре: есть ещё 3 и $1 + 1 + 1$.)

▷ Такое представления соответствуют способам проехать 10 перегонов железной дороги, при желании делая остановки на промежуточных станциях. (Скажем, для разложения $3 = 1 + 2$ мы сначала проезжаем один перегон и выходим, а потом проезжаем два без остановки.) Тем самым надо решить, в каких из 9 промежуточных станций мы делаем остановку, а в каких нет. Это кодируется словом из 9 нулей и единиц, так что вариантов $2^9 = 512$. ◁

4.11* Мы уже знаем, что есть 2^{10} двоичных слов длины 10 (см. задачу 2.11). В некоторых из них чётное число единиц (скажем, в слове `0000000000` или в `1111111111`), а в некоторых нечётное (скажем, в слове `0101010101`). Каких слов больше — с чётным или с нечётным числом единиц?

▷ Объединим двоичные слова в пары, включив в одну пару слова, отличающиеся в последнем бите (девять первых одинаковые, а в десятом разница). Тогда в каждой паре числа единиц будут соседними, то есть ровно одно слово в паре имеет чётное число единиц и ровно одно нечётное. Поэтому тех и других одинаковое количество (и столько же пар). ◁

Иногда полезны и не взаимно однозначные соответствия: бывают случаи, когда каждый объект одного типа соответствует какому-то фиксированному числу k объектов другого типа. Скажем, если школьники в классе решали задачи из списка и каждый школьник решил две задачи, а каждую задачу решил ровно один школьник, то задач в списке вдвое больше, чем школьников в классе.

4.12 В классе n школьников, и на каникулах каждый отправил по одному письму каждому (кроме себя, естественно). Сколько всего писем было написано? После каникул они встретились, и каждый пожал руку каждому (по одному разу). Сколько было рукопожатий?

▷ Каждый школьник написал $n-1$ писем (кроме себя), а школьников n, поэтому всего было написано $n(n-1)$ писем.

Можно ли то же самое рассуждение применить к рукопожатиям? Скажем, если школьников трое, то каждый отправит по два письма (всего шесть писем). Между тем, рукопожатий только три (А–Б, А–В, Б–В, если школьников обозначить А, Б и В). Причина понятна: одно рукопожатие соответствует двум письмам (в обе стороны). Значит, рукопожатий вдвое меньше чем писем, то есть $n(n-1)/2$. ◁

▷ Можно было бы опасаться: вдруг $n(n-1)$ не разделится? Но, с одной стороны, мы доказали, что число писем вдвое больше числа рукопожатий, поэтому должно делиться. С другой стороны (если одного доказательства вам мало), одно из двух соседних чисел n и $n-1$ всегда чётно, поэтому произведение тоже чётно.

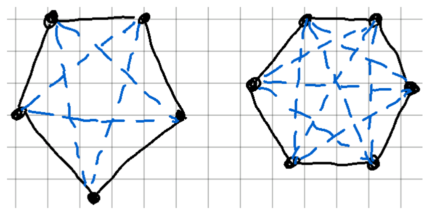
Ещё можно рассуждать так: если T_n — число рукопожатий для n школьников, то посмотрим на одного из них. Он сделает $n-1$ рукопожатий, и если их не учитывать, то получится задача с $n-1$ школьниками. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n &= (n-1) + T_{n-1} = (n-1) + (n-2) + T_{n-2} = \ldots \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + T_2 = \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n(n-1)/2 \end{aligned}$$

(последнее равенство мы уже имели случай обсуждать по другому поводу в задаче 1.11). ◁

$\boxed{\textbf{4.13}}$ Сколько диагоналей в (выпуклом) n-угольнике?

На картинке видно, что у пятиугольника пять диагоналей (образующих пятиконечную звезду), а у шестиугольника девять.



• Мы оговорили, что многоугольник выпуклый, чтобы не разбираться, учитывать ли диагонали, идущие снаружи многоугольника и т.п.

▷ Из каждой вершины n-угольника выходит $(n-3)$ диагонали (не считаем себя и двух соседей). Значит, всего $n(n-3)$ диагонали, если считать каждую по два раза (в обе стороны). А на самом деле вдвое меньше, получаем ответ $n(n-3)/2$. ◁

В следующей задаче мы по существу интересуемся количеством трёхэлементных подмножеств десятиэлементного множества. Но поскольку считается, что слова «множество» и «подмножество» пугают, скажем иначе.

$\boxed{\textbf{4.14}}$ Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать трёх, которые останутся сторожить вещи и разводить костёр, пока остальные семь пойдут на прогулку. Сколькими способами можно это сделать?

▷ Будем рассуждать как с рукопожатиями. Пусть сначала нужно выбрать не просто трёх человек, а, скажем, трёх ответственных: (1) за вещи, (2) за еду и (3) за костёр. Тогда получается $10 \cdot 9 \cdot 8$ вариантов: ответственного за вещи можно выбрать 10 способами, после этого есть 9 способов выбрать ответственного за еду (один уже занят вещами), а после этого 8 способов выбрать кострового (двое уже заняты вещами и едой).

Но так было бы при конкретном распределении обязанностей. Если же просто выбирать трёх человек (которые потом могут распределить обязанности как хотят), то вариантов будет меньше в 6 раз. Почему именно в 6? потому что есть ровно $6 = 3!$ вариантов распределения трёх людей по трём должностям (перестановка из трёх элементов: сначала выбор из 3, потом из 2, потом из 1). Так мы приходим к ответу: $(10 \cdot 9 \cdot 8)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$. ◁

$\boxed{\textbf{4.15}}$ Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать 7 человек, которые пойдут на прогулку, пока остальные сторожат вещи и разводят костёр. Сколькими способами можно это сделать?

▷ Если действовать так же, как в предыдущей задаче, то можно выбрать семь должностей для участников прогулки (скажем, направляющий, следующий, ..., замыкающий), тогда способов будет $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. А затем объединить варианты в группы, отличающиеся только распределением участников по должностям. Каждая группа состоит из 7! вариантов, так что надо поделить на 7!, чтобы найти число групп. Получится

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

(остальные множители сокращаются) — то есть тот же ответ, что в предыдущей задаче.

Что не удивительно, так как решить, кто пойдёт на прогулку — по сути то же самое, что решить, кто останется (между решениями того и другого вида есть взаимно однозначное соответствие: кто не пойдёт, тот и останется). Так что можно было просто заметить это и взять ответ из предыдущей задачи. ◁

$\boxed{\textbf{4.16}}$ Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно три единицы? Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно семь единиц?

▷ Это снова по существу та же самая задача. Составим список из десяти участников похода и будем против них ставить 1, если человек остаётся дежурить, и 0, если он идёт на прогулку. Тогда способы выбрать троих дежурных будут в точности соответствовать последовательностям из десяти нулей и единиц, в которых ровно три единицы.

Аналогично для семи. Можно также заметить, что между словами с тремя единицами (и семью нулями) и словами с семью единицами (и тремя нулями) можно установить взаимно однозначное соответствие: в слове все нули заменяются на единицы и наоборот. ◁

$\boxed{\textbf{4.17}}$ Сколько существует двоичных слов длины 5 с двумя единицами (и тремя нулями). Как объяснить, что их число равно числу кратчайших путей из одного угла прямоугольника 2×3 в другой (задача 3.3)?

▷ Количество таких слов мы уже умеем вычислять: это число способов выбрать два объекта из пяти, и оно равно $(5 \cdot 4)/(1 \cdot 2) = 10$. Тот же ответ был в задаче 3.3, и это не случайно: мы обсуждали тогда, что пути можно кодировать последовательностями из пяти букв П и В, в которых три буквы П (три шага вправо) и две буквы В (два шага вверх). ◁

Иногда полезно рассматривать и соответствия, в которых на каждый объект первого типа приходится m объектов второго типа, а на каждый объект второго типа приходится n объектов первого типа. Такая ситуация возникает в следующей задаче.

4.18 В классе 30 школьников, они решали задачи из некоторого списка, при этом вышло так, что каждый школьник решил по две задачи, а каждая задача из списка была решена (ровно) тремя школьниками. Сколько задач в списке?

▷ Пусть каждый школьник написал решения двух решённых им задач на двух отдельных листках из тетради и сдал эти листки на проверку. Всего будет сдано $30 \times 2 = 60$ листков. Рассортируем листки по задачам (что логично: удобно проверять решения одной и той же задачи подряд). Тогда на каждую задачу придётся три листка (от трёх решивших её школьников), так что задач всего $(30 \cdot 2)/3 = 20$. ◁

Этот приём позволяет решить следующую задачу почти что в уме.

4.19* Пусть A — число способов выбрать 10 предметов из 30, а B — число способов выбрать 11 предметов из 30. Кто больше — A или B — и во сколько раз?

▷ Для каждого способа выбрать 10 предметов можно получить 20 способов выбрать 11 предметов, добавляя к выбранным любой из 20 оставшихся предметов. При этом каждый способ выбрать 11 предметов получается таким способом из 11 разных способов выбрать 10 предметов (добавленным мог быть любой из 11 предметов). Получаем, что $20A = 11B$, то есть B в $20/11$ раз больше A. ◁

Вот ещё одна задача с неожиданно простым решением, надо только правильно выбрать соответствие.

4.20* Сколько существует двоичных слов длины 12 с тремя единицами, в которых единицы не идут подряд (между любыми двумя единицами есть хотя бы один нуль)?

▷ Посмотрим на три единицы в таком слове. Между первой и второй сколько-то нулей (хотя бы один есть), между второй и третьей — тоже. Вычеркнем по нулю из этих двух промежутков. Получится слово длины 10 с тремя единицами (потому что мы вычеркнули два нуля и число единиц не изменилось).

Напротив, в любое слово длины 10 с тремя единицами можно добавить по нулю между первой и второй, а также между второй и третьей единицами. (Там одни нули, так что всё равно куда добавлять.) Эти две операции *обратны друг другу*, как сказали бы математики. (Сделав одну, а потом вторую, мы вернёмся к слову, с которого начали — можно начать и с добавления, и с удаления.) Поэтому мы получаем взаимно однозначное соответствие между интересующими нас словами и словами длины 10 с тремя единицами, которые мы уже считали. Их $(10 \cdot 9 \cdot 8)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$. ◁

В большинстве решённых нами задач мы так или иначе сталкивались с *числами сочетаний* (которые также называют *биномиальными коэффициентами*), то есть с числом способов выбрать k элементов из n элементов. В следующем разделе мы посмотрим на них более систематически (и узнаем, что это за «бином», у которого коэффициенты), но полезно привыкнуть к ним заранее в простых ситуациях.

4.21 Сколько различных слов (осмысленных или нет) можно получить, переставляя буквы в слове ПАРК? Тот же вопрос для слов ПАРА и ПАПА.

▷ Мы уже решали такую задачу для слова КОТ (2.5), и там было $3! = 6$ вариантов (выбор из трёх вариантов для первой буквы, потом из двух для второй, а третья определяется однозначно). Поэтому для четырёхбуквенного слова ПАРК ответ будет $4! = 24$.

Можно ли сказать то же самое про слово ПАРА? Нет, потому что в нём две одинаковые буквы. Сделаем временно их разными, скажем, одну сделаем строчной (маленькой) вместо прописной (большой). Тогда в слове ПАРа будет четыре разные буквы, и будут 24 варианта. Если теперь заменить строчную букву на прописную во всех этих 24 вариантах, то они соединятся в группы по 2 (та или другая буква А может быть строчной). Значит, без учёта этой разницы (как в исходной задаче) будет 12 вариантов.

В слове ПАПА ещё больше возможностей слияния вариантов, поскольку есть две пары одинаковых букв. Если бы их не было и было бы слово ПАпа, то было бы 24 варианта. Они склеиваются в группы по 4 (два способа выбрать маленькую а умножаются на два способа выбрать маленькую п), получается $24/4 = 6$ способов. ◁

4.22* (Продолжение) Тот же вопрос для слов ПАППА и МАТЕМАТИКА.

▷ В слове ПАППА три буквы П, и чтобы их различить, придётся взять три разных варианта $П_1, П_2, П_3$. Тогда (если учитывать только буквы П) из одного «неразмеченного варианта» получается шесть (3!) «размеченных», а с учётом двух вариантов для букв А — всего 12. Так что надо поделить $5! = 120$ (для размеченных буквы) на 12, получится 10.

Можно, впрочем, заметить, что эту задачу мы уже два раза решали, вычисляя число способов выбрать два предмета из пяти (4.17) и число путей в прямоугольнике 3×2 (3.3).

Для слова МАТЕМАТИКА: есть две буквы М, три буквы А, две буквы Т, остальные по одной, всего 10 букв. Поэтому аналогичное рассуждение даёт $10!/(2! \cdot 3! \cdot 2!)$. ◁

• Мы встретимся ещё раз с подобной задачей, рассматривая мультиномиальные коэффициенты.

4.23 Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны и различны? Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны, различны и идут в убывающем порядке? (Скажем, число 1573 подходит в первом случае, но не во втором, а число 9531 годится в обоих случаях.)

▷ Первый вопрос для нас уже совсем стандартен: для первой цифры есть 5 вариантов, для второй 4 и так далее, итого получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ вариантов. Если же мы теперь будем «сортировать» в каждом числе цифры в порядке убывания, то числа с разными цифрами склеятся в группы по $4! = 24$ (потому что из каждого числа с убывающими цифрами можно перестановками получить $4! = 24$ числа с различными цифрами), получится $5!/4! = 5$ вариантов.

Впрочем, это можно усмотреть и сразу: если мы хотим использовать четыре из пяти нечётных цифр, то неиспользованной останется только одна. И если мы решили, какая именно, то дальше выбора нет: оставшиеся четыре надо расположить в убывающем порядке. Соответственно получается 5 чисел

$$9753, 9751, 9731, 9531, 7531,$$

соответствующим пяти вариантам неиспользования. ◁

5. Сочетания и бином

Сейчас мы сформулируем в общем виде определения и результаты, которые уже не раз встречались в предыдущих разделах.

Пусть n и k — целые числа, причём $0 \leqslant k \leqslant n$. *Числом сочетаний из n по k* называется число способов выбрать набор из k предметов (порядок не учитывается) из n данных нам предметов. (На более математическом языке: число k-элементных подмножеств n-элементного множества.)

По-русски число сочетаний из n по k обычно обозначают C_n^k, хотя в последнее время употребительно и принятое в английских текстах обозначение $\binom{n}{k}$. Запись C_n^k обычно читают «цэ из эн по ка» (буква C не от слова «сочетание», а от слова “combinations”). Например $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, поскольку из четырёх букв a, b, c, d можно выбрать две буквы (без учёта порядка) шестью способами: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

5.1 Чему равны C_n^0, C_n^1, C_n^{n-1}, C_n^n? (Мы предполагаем, что $n \geqslant 0$, а для второго и третьего выражений $n \geqslant 1$.)

▷ Сразу ясно, что $C_n^1 = n$ (если надо выбрать один предмет из n, это можно сделать n способами). Также и $C_n^{n-1} = n$ (если надо выбрать $n-1$ предметов из n, по существу надо решить, какой предмет *не* выбирать).

Чему равно C_n^0? Надо из n предметов выбрать 0 — то есть ничего не выбирать. Тут есть единственный вариант, так что $C_n^0 = 1$. (Математики сказали бы, что «у n-элементного множества есть единственное пустое подмножество».) Также и $C_n^n = 1$: если из n предметов надо взять n, то никакого выбора по существу нет, вариант единственный.

Обратите внимание, что C_0^0 тоже равно 1 («выбираем пустое подмножество пустого множества единственным способом»). ◁

▷ Иногда удобно считать, что $C_n^k = 0$ при $k < 0$ и $k > n$ (но мы будем стараться оговаривать такие случаи явно). ◁

5.2 Докажите, что при $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

▷ Выбрать k элементов из n — всё равно что решить, какие $n-k$ элементов оставить. ◁

• Более симметричный способ записи этого тождества: $C_{k+l}^k = C_{k+l}^l$ при целых $k, l \geqslant 0$: выбрать k из $k+l$ элементов (и оставить l) всё равно что выбрать l и оставить k.

5.3 Докажите, что C_n^k (при $0 \leqslant k \leqslant n$) равно числу двоичных слов длины n, в которых ровно k единиц.

▷ Можно построить взаимно однозначное соответствие между способами выбрать k предметов из n и двоичными словами длины n, в которых k единиц: для этого составим список всех предметов и будем записывать выбор нулями и единицами: если очередной предмет не берём, пишем 0, если берём, пишем 1. Мы это уже упоминали (для конкретного примера) в задаче 4.17. ◁

▷ Можно представить себе такую картину: мы просматриваем по очереди все двоичные слова длины n, и раскладываем их по ящикам с надписями $0, 1, 2, \ldots, n$ в зависимости от числа единиц (как сказали бы статистики, «строим гистограмму»). По окончанию работы в ящике k окажется C_n^k слов.

При больши́х n подавляющее большинство слов окажется в ящиках, близких к среднему (при $k \approx n/2$); в теории вероятностей это называют «законом больши́х чисел». ◁

5.4 Докажите, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

при любом $n \geqslant 0$.

▷ Все 2^n двоичных слов длины n делятся на группы в зависимости от числа единиц: в группе, где k единиц, будет C_n^k слов. ◁

5.5* Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$$

при любом $n \geqslant 0$. (Знаки чередуются, поэтому знак плюс или минус перед последним членом зависит от чётности n.)

▷ Здесь написано, что слов длины n с чётным и нечётным числом единиц поровну, а это мы уже видели в задаче 4.11 (они объединяются в пары, отличающиеся только последним битом). ◁

5.6 Докажите формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• В числителе первой дроби стоит k сомножителей (как и в знаменателе)

▷ Мы уже много раз встречались с этим рассуждением (задачи 2.14, 4.2, 4.12, 4.14): если считать способы последовательно выбрать k предметов (с учётом порядка), то их будет как раз $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (первый n способами, после этого второй $n-1$ способами и так далее, последний мы выбираем из $n-k+1$ предметов). Когда мы перестаём учитывать порядок, все способы, отличающиеся перестановками k выбранных предметов (их $k!$) сливаются в один, так что найденное число надо поделить на $k!$.

Второй вариант формулы получается из первого, если домножить числитель и знаменатель на $(n-k)!$, тогда сверху получится как раз $n!$. ◁

• Чтобы эта формула имела смысл при всех $0 \leqslant k \leqslant n$, надо считать $0! = 1! = 1$ (что вообще логично, если мы хотим, чтоб равенство $n! = n \cdot (n-1)!$ выполнялось при $n = 2$ и при $n = 1$).

Более симметричная запись той же формулы: $C_{k+l}^{k} = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}$ при $k \geqslant 0, l \geqslant 0$.

5.7* Докажите, что при любом $k \geqslant 2$ произведение любых последовательных k целых положительных чисел делится на $k!$. (Например, $n(n-1)$ всегда чётно, а $n(n-1)(n-2)$ всегда делится на 6.)

▷ Произведение $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ делится на $k!$ нацело, потому что частное равно числу сочетаний из n по k. ◁

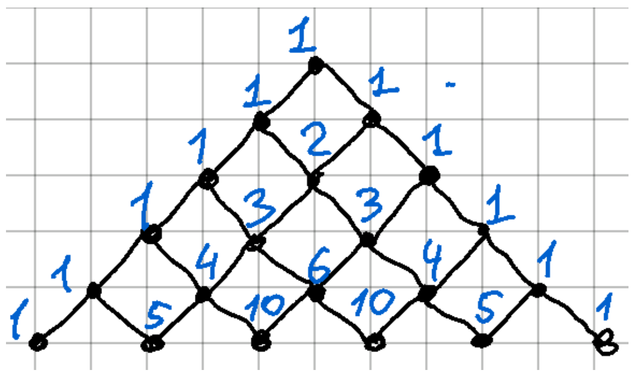
• Слово «положительные» в утверждении можно опустить: если числа все отрицательные, то можно изменить знак, а если есть нуль, то произведение равно нулю и делится на что угодно.

▷ Мы уже встречались (задача 4.12) с этим утверждением при $k = 2$: произведение $n(n-1)$ всегда чётно, так как одно из чисел n и $n-1$ чётно. Для произвольного k уже не так просто это доказать, не рассматривая число сочетаний (но можно: надо заметить, что кратные любого числа встречаюттся в произведении k подряд идущих чисел не меньше раз, чем в произведении чисел от 1 до k, потому что второе произведение начинается в самом невыгодном месте, и применить это утверждение к степеням простых чисел). ◁

5.8 Докажите, что число сочетаний C_{k+l}^{k} равно числу кратчайших путей из одного угла в другой для прямоугольного города $k \times l$, разрезанного улицами на квадратные кварталы 1×1.

▷ Для прямоугольника 2×3 мы это уже обсуждали в задаче 4.17. Кратчайшие пути могут быть закодированы последовательностями букв П и В (шаги направо и вверх; мы считаем, что идём из левого нижнего угла в правый верхний в прямоугольнике ширины k и высоты l), в котором k букв П и l букв В. А таких последовательностей, как мы видели, как раз C^k_{k+l} (или C^l_{k+l} — условие задачи симметрично относительно k и l). ◁

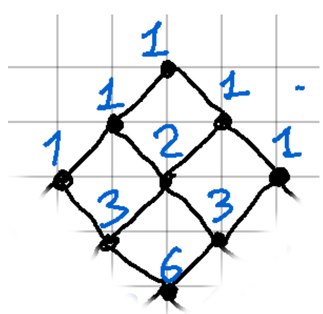
Мы уже записывали число путей для прямоугольников разного размера (в каждой точке записано число путей из вершины сверху-вниз по дорогам):



Теперь мы знаем, что эти числа соответствуют числам сочетаний C^k_n при различных n и k. Например, число 10 в нижней строке соответствует C^2_5 (а другое число 10 в той же строке соответствует C^3_5).

5.9 Найдите на этой картинке число C^2_4: числу путей в каком прямоугольнике оно соответствует?

▷ Это число способов выбрать две позиции из четырёх, или число слов из четырёх букв, содержащих по две буквы П и В. Значит, это число путей из одного угла квадрата 2×2 в другой — и действительно в нижнем углу такого квадрата на рисунке стоит число $6 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$.



◁

$\boxed{5.10}$ Докажите рекуррентную формулу

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

при $n \geqslant 1$ и $0 < k < n$.

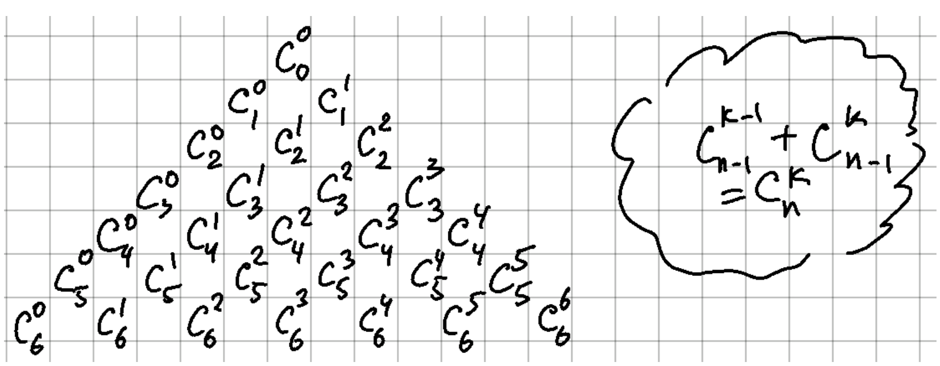
• Можно понять, что это означает в терминах числа путей. Величина C_n^k соответствует прямоугольнику размера $k \times (n-k)$. Величины в правой части тогда соответствуют прямоугольникам размера $(k-1)\times(n-k)$ и $k\times(n-k-1)$. Если, как и раньше, обозначить $n-k$ за l, то наша формула утверждает, что число путей из угла в угол для прямоугольника $k \times l$ равно сумме таких чисел для прямоугольников $k\times(l-1)$ и $(k-1)\times l$ — мы как раз это и использовали, когда начинали считать число путей. Но мы изложим по существу то же рассуждение более комбинаторно.

▷ Нас интересует число k-элементных подмножеств n-элементного множества. Зафиксируем какой-то элемент x нашего n-элементного множества (всё равно какой, но раз и навсегда) и поделим все k-элементные подмножества на две категории: которые содержат x и которые не содержат. Посчитаем, сколько тех и других — сумма будет равна C_n^k. (Все варианты назначения k дежурных из n человек делятся на две группы — когда Вася дежурит и когда нет.)

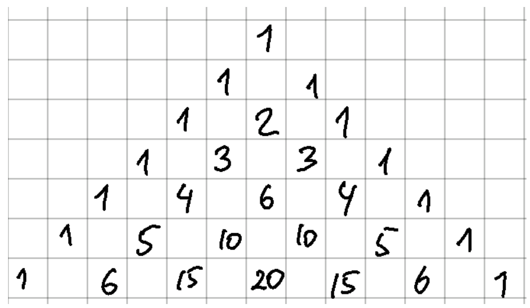
Те, которые содержат x: один элемент уже выбран, осталось выбрать $k-1$ элементов из $n-1$ (не считая уже выбранного x), вариантов C_{n-1}^{k-1}.

Те, которые не содержат x: решено x не использовать, так что надо выбрать k элементов из оставшихся $n-1$, вариантов C_{n-1}^k. ◁

Удобно записать числа сочетаний в треугольную таблицу (мы это уже делали, считая пути в разделе 3).



Тогда рекуррентную формулу предыдущей задачи можно сформулировать так: каждое число в этой таблице равно сумме чисел слева и справа от него в предыдущей строке. Зная, что на левом и правом краю этого *треугольника Паскаля* стоят единицы, его легко заполнять, переходя от строки к строке (достаточно уметь складывать):



▷ Из этой картинки видно, скажем, что $C_6^2 = 15$. Можно проверить это по формуле:

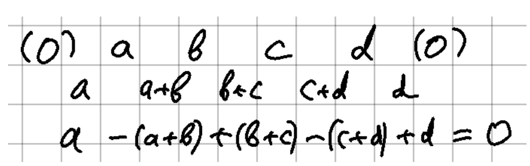
$$\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Если надо вычислить всю таблицу, то проще складывать верхних соседей, чем применять формулу с произведениями. (Даже если нужно вычислить только одно число, может быть проще заполнить таблицу до этого места, чем перемножать и делить большие числа.)

Для единиц с краю правило суммы не годится (потому что один сосед выходит за пределы треугольника). Таких исключений не будет, если договориться, что слева и справа от треугольника стоят одни нули. ◁

$\boxed{\textbf{5.11}^*}$ Докажите, используя правило заполнения треугольника Паскаля, что знакопеременная сумма чисел в любой его строке равна нулю ($1 - 2 + 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ и так далее).

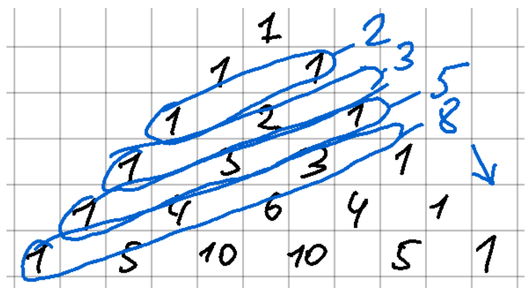
▷ Мы уже решали эту задачу (5.5) — но теперь это можно увидеть сразу, зная правило построения строк треугольника. Неважно, что стоит в n-й строке — если только мы строим $(n+1)$-ю строку по правилу сложения верхних соседей, её знакопеременная сумма будет равна нулю. В самом деле, если мы распишем каждое число через двух верхних соседей, то всё сократится



(полезно договориться, что слева и справа от треугольника стоят нули). ◁

- Если брать просто сумму (не знакопеременную), то видно, что она будет равна удвоенной сумме чисел предыдущей строки — что подтверждает ещё раз, что суммы по строкам растут как степени двойки.

5.12* Покажите, что суммы чисел в треугольнике Паскаля по наклонным прямым являются числами Фибоначчи:



▷ Поскольку несколько первых сумм там правильные, достаточно проверить, что дальше выполняется закон построения чисел Фибоначчи (каждое число равно сумме двух соседних). Это видно на картинке (многоточия означают, что мы продолжаем складывать, пока члены не станут нулевыми, выйдя из треугольника Паскаля).

$$
\begin{array}{lllll}
 & C_n^0 + & C_{n-1}^1 + & C_{n-2}^2 + & \dots \\
= & & C_{n-1}^0 + & C_{n-2}^1 + & \dots \\
\hline
 & C_{n+1}^0 + & C_n^1 + & C_{n-2}^2 + & \dots
\end{array}
$$

В строках написаны три соседние суммы по наклонным, и видно, что в каждом столбце нижнее число равно сумме двух верхних (исключением является первый столбец, но там оба числа равны 1). Чтобы не разбираться с тем, что происходит в конце сумм, удобно считать, что суммы продолжены до бесконечности нулями вне треугольника Паскаля. ◁

Теперь объясним, почему числа сочетаний называют ещё *биномиальными коэффициентами*. *Бино́м* — по-русски «двучле́н» — название для *полино́ма* (многочле́на), который содержит два *моно́ма* (одночле́на). Что будет, если возводить простейший бином $(a+b)$ в разные степени? Хорошо известна формула

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Чуть сложнее формула

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Что будет дальше, для четвёртой степени? Попробуем это себе представить, не выписывая всех членов. Мы раскрываем скобки в произведении четырёх скобок $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, сколько и какие члены получатся? Из каждой скобки нужно выбрать a или b, и все четыре буквы перемножить. Другими словами, нужно взять все четырёхбуквенные слова из букв a, b, считать их произведениями и сгруппировать одинаковые слагаемые (*приведение подобных*). В каждую группу подобных членов попадут слова с одинаковым числом букв a и b.

Скажем, a^4 будет в единственном числе (из всех скобок надо выбрать букву a), а a^3b встретится 4 раза (так как буква b может быть на любом из четырёх мест $baaa$, $abaa$, $aaba$, $aaab$). Дальше будет a^2b^2, и коэффициент будет равен числу слов длины 4 с двумя буквами a и двумя буквами b. Таких членов 6, а именно $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $babb$. При ab^3 будет тот же коэффициент 4, что при a^3b; наконец, b^4 встретится один раз. Получится

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Видно, что коэффициенты соответствуют строке треугольника Паскаля, и это не удивительно, потому что количество слов длины n, в которых k букв a, как раз равно C_n^k (надо выбрать из n позиций k мест для букв a). То же рассуждение показывает, что

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Можно было бы для единообразия вместо a^n и b^n написать $C_n^0 a^n b^0$ и $C_n^n a^0 b^n$. А можно, наоборот, вспомнить формулы для C_n^k и написать более явно

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Правую часть даже не надо обрывать специально, потому что коэффициент обратится в нуль — появится скобка $(n - n)$ и продолжать формулу дальше не надо (последний ненулевой будет как раз $n!/n! = 1 = C_n^n$).

5.13 Что получится, если в формулу для бинома (та, что выше в рамке) подставить $a = 1$, $b = 1$? А если подставить $a = 1$, $b = -1$?

▷ При $a = b = 1$ получаем

$$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n,$$

что мы уже доказывали (сумма строки в треугольнике Паскаля равна 2^n, задача 5.4). При $a = 1$, $b = -1$ получаем

$$(1 - 1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

что мы тоже уже видели (знакопеременная сумма равна нулю, задача 5.5). ◁

▷ Используя традиционные обозначения для суммирования, наши равенства можно записать так:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

◁

5.14* Подставляя $a = 1$, $b = 2$ в формулу для бинома, получаем тождество

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^k C_n^k + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Как доказать его комбинаторно, не используя формулы бинома?

▷ Естественная комбинаторная интерпретация для 3^n — это слова длины n из букв a, b, c (или в любом другом трёхбуквенном алфавите). Теперь их нужно разбить на части, соответствующие отдельным слагаемым. Это можно сделать, поместив в одну часть слова с данным числом букв a. В самом деле, сколько есть слов длины n, в которых есть k букв a? Для этого надо выбрать, где находятся эти буквы, это можно сделать C_n^k способами. Кроме того, надо решить, какая буква (b или c) стоит на каждом из оставшихся мест. Получаем $C_n^k 2^{n-k}$ способов, и мы доказали тождество $3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}$. Это почти то, что надо, остаётся заменить переменную суммирования, взяв $l = n - k$ и заметив, что $C_n^k = C_n^l$. ◁

▷ Забудем временно о том, что в формуле бинома n — целое число, и подставим, скажем $a = 1$, $b = x$ и $n = 1/2$. Получится формула

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

с бесконечной суммой в правой части (потому что теперь уже коэффициенты не обращаются в нуль). Но удивительным образом эта формула имеет смысл, и даже несколько разных смыслов. При малых x (меньших 1 по модулю) её можно воспринимать как приближённую формулу: если брать больше членов в правой части, будет всё точнее и точнее. А можно формально вычислять квадрат правой части, то есть произведение

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\ldots\right)&\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\ldots\right)=\\ =1+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)x+\left(-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\right)x^2&+\left(\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right)x^3+\ldots=\\ &=1+x+0x^2+0x^3+\ldots\end{aligned}$$

и наблюдать, что всё больше и больше коэффициентов оказываются равными нулю, и остаётся $1 + x$, как и должно быть при возведении в квадрат $(1 + x)^{1/2}$.

Формулу бинома с нецелыми показателями придумал Ньютон — в честь которого теперь говорят «бином Ньютона» (хотя для целых положительных показателей это было известно многим и до Ньютона). Кстати, и для отрицательных показателей это имеет смысл: подставив $n = -1$, мы получим $(1 + x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$ (проверьте, что именно такие коэффициенты получаются), формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. ◁

5.15* Аня придумала способ находить биномиальные коэффициенты на калькуляторе: $11^2 = 121$ (вторая строка треугольника Паскаля), $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Но с $11^5 = 161051$ вышло что-то не то, и Аня задумалась. «А-а-а, конечно, тут же двузначные коэффициенты... Но ничего страшного, я сейчас вычислю ⟨...⟩» — и всё получилось. Что сделала Аня и почему всё получилось?

▷ По формуле бинома Ньютона $(1 + 10)^2 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$, то есть разряды — биномиальные коэффициенты. Так же будет и для $(1 + 10)^3$: коэффициенты при 1, 10, 10^2, 10^3 будут 1, 3, 3, 1, аналогично и для $(1 + 10)^4$. Но для пятой степени появляются *двузначные* биномиальные коэффициенты, которые смешиваются с коэффициентом в старшем разряде (получаются «цифры» 1, 5, 10, 10, 5, 1, и единица от 10 портит пятёрку, получается 6). Но можно вычислить $101^5 = 1\,05\,10\,10\,05\,01$ и поделить его на группы по две цифры с конца, тогда такого не будет и все биномиальные коэффициенты видны, потому что $(1+100)^5 = 1 + 5\cdot 100 + 10\cdot 100^2 + 10\cdot 100^3 + 5\cdot 100^4 + 1\cdot 100^5$. $\lhd$

Рассматривая треугольник Паскаля с разных сторон, можно обнаружить интересные закономерности. Приведём несколько примеров.

$\boxed{\textbf{5.16}}^*$ Докажите, что сумма *квадратов* всех чисел в строке треугольника Паскаля стоит в нём в середине строки с вдвое большим номером:

$$(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(Например, $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = C_6^3$.)

$\rhd$ Можно доказывать это с помощью биномиального разложения. Возведём в квадрат разложение для $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n(1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n)\cdot(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n).$$

Какой в этом выражении будет коэффициент при x^n? Слева стоит $(1+x)^{2n}$, поэтому коэффициент должен быть C_{2n}^n. С другой стороны, коэффициент при x^n в правой части можно вычислить по правилу перемножения многочленов (взяв все произведения, дающие x^n, и сложив их коэффициенты). Получится

$$C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \ldots + C_n^nC_n^0.$$

Поскольку $C_n^{n-i} = C_n^i$, то это и будет сумма квадратов биномиальных коэффициентов в строке треугольника Паскаля. Остаётся сослаться на такой алгебраический факт: если два многочлена равны при всех значениях переменной, то их коэффициенты одинаковы.

Если мы не хотим этим фактом пользоваться, можно изложить по существу то же рассуждение комбинаторно. Число C_{2n}^n равно способу выбрать n предметов из $2n$ предметов. Разобьём эти самые $2n$ предметов на две группы по n предметов. Тогда нам надо выбрать сколько-то (пусть k) предметов из первой группы и сколько-то из второй, чтобы в сумме было n предметов.

Сколько есть вариантов с данным k? Выбор из первой группы осуществляется C_n^k способами, из второй C_n^{n-k} способами, которые можно комбинировать со всеми способами первой группы. Всего вариантов выбора с данным k будет поэтому $C_n^kC_n^{n-k}$, то есть $(C_n^k)^2$, потому что $C_n^k = C_n^{n-k}$. А всего вариантов (с любым k от 0 до n) будет C_{2n}^n, откуда и получаем искомое тождество. $\lhd$

$\boxed{\textbf{5.17}}^*$ Докажите, что

$$C_{m+n}^k = C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + \ldots + C_m^kC_n^0.$$

(В правой части в некоторых биномиальных коэффициентах C_u^v может быть $v > u$, такие коэффициенты считаем равными нулю.)

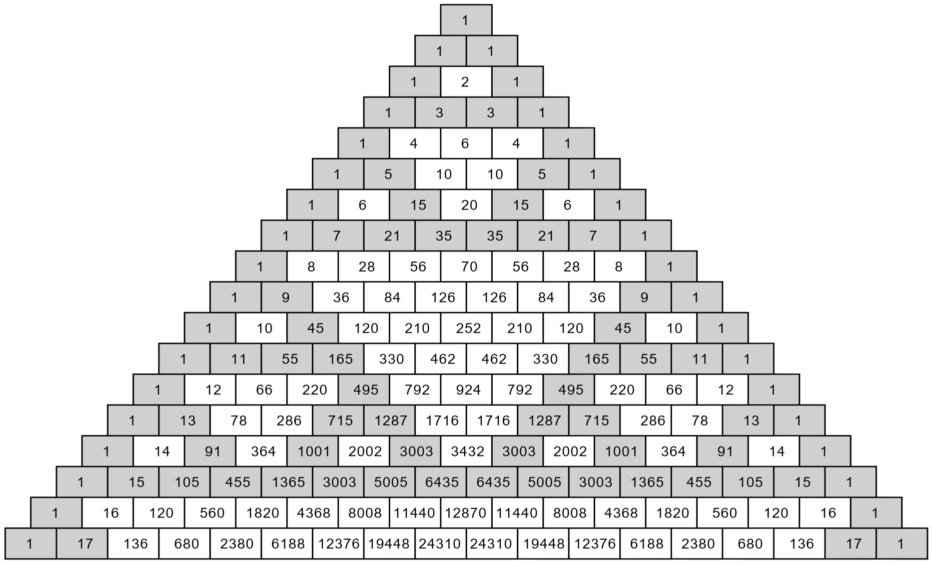
▷ То же рассуждение, что в предыдущей задаче: множество из $m+n$ элементов разбиваем на части из m и n элементов, а все варианты выбора k элементов мы разбиваем на группы — номер группы определяется тем, сколько элементов выбрано из первой части. ◁

$\boxed{\textbf{5.18}^*}$ Докажите, что до середины числа в каждой строке треугольника Паскаля возрастают, а потом убывают (так что наибольшим является число в середине — или два одинаковых числа, в зависимости от чётности номера строки).

▷ Сравним два соседних числа в строке, то есть C_n^k и C_n^{k+1}. Вспомним формулу и заметим, что во втором появляются дополнительно множители $n-k$ в числителе и $k+1$ в знаменателе, то есть второе получается из первого умножением на $(n-k)/(k+1)$. При $n-k > k+1$, то есть при $2k < n-1$ (слева от середины) этот множитель больше 1, а дальше он становится либо равным 1 (тогда есть два одинаковых числа), либо сразу становится меньше 1, откуда и следует требуемое утверждение.

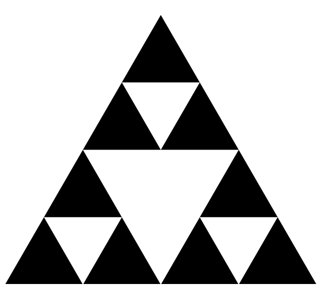
Заметим ещё, что это отношение соседних членов мы уже вычисляли комбинаторно (задача 4.19), изучив, сколькими способами можно получить $(k+1)$-элементное подмножество из данного k-элементного и из скольких k-элементных получается данное $(k+1)$-элементное. ◁

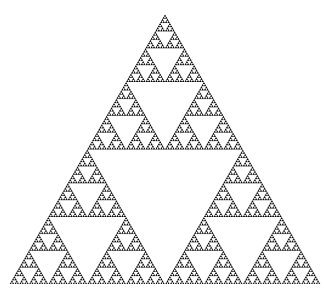
Рассматривая треугольник Паскаля, можно заметить, что там бывают строки, состоящие только из нечётных чисел, а также строки, в которых все числа (кроме крайних единиц) чётны. В википедии есть соответствующая картинка — числа там мелкие, но нечётные числа выделены цветом, и можно рассматривать соответствующий узор:



Хорошо видны и серые горизонтали, на которых стоят только нечётные числа, и серые треугольники с дырками, на них опирающиеся.

▷ Любители красивых картинок, вероятно, узнают тут «треугольник Серпинского». Он получается, если из треугольника выбросить середину (треугольник из средних линий), потом с каждым получившимся треугольником сделать то же самое (см. левый рисунок), и продолжать так до бесконечности (ещё несколько шагов показаны на правом рисунке, дальнейшее выбрасывание уже на рисунке не увидишь). Такие фигуры называются «самоподобными фракта́лами». Самоподобными — потому что фигура состоит из трех своих вдвое меньших копий, стянутых гомотетично к вершинам. Фракталами — потому что они имеют «размерность» между 1 и 2, что-то среднее между линиями и плоскими фигурами (со внутренностью). Мы не будем про это говорить подробно, ограничившись уже указанным выше свойством треугольника Паскаля.





◁

$\boxed{\mathbf{5.19}^*}$ Докажите, что при $n = 1, 3, 7, 15, \ldots$ (числа, на единицу меньшие степеней двойки) все биномиальные коэффициенты C_n^k нечётны (при всех k от 0 до n).

▷ Это утверждение (частный случай *теоремы Люка́*) можно доказать, подсчитывая количество степеней двойки в разложениях числителя и знаменателя в формуле для числа сочетаний, но мы приведём более наглядное доказательство с треугольником Паскаля.

Прежде всего заметим, что достаточно знать только чётность и нечётность чисел в строке, чтобы определить чётность и нечётность в следующей строке (сложение по модулю 2). Можно представлять себе дело так, что мы выращиваем сверху вниз наш рисунок, добавляя следующую строку из белых и серых клеток (складывая пары чисел в предыдущей). А начинаем мы с «зародыша» из одной серой клетки (самой верхней).

Посмотрим на строку 7 (для $n = 7$, по счёту она восьмая, если считать с единицы). Там стоят одни единицы. Значит можно сразу же сказать, что в следующей строке только крайние числа будут серыми, остальные белыми (чётными). Что будет дальше? Из двух серых клеток начнут расти такие же треугольники, как из зародыша, потому что вокруг них чётные числа. Так будет, пока растущие колонии не коснутся друг друга — это происходит в строке 15. В этой строке получатся все нечётные числа, значит, в строке 16 будут все чётные (белые) — кроме крайних клеток, которые будут серыми. Дальше из этих крайних клеток начнут расти две колонии, и расстояние между ними будет уменьшаться на 1 на каждом шаге. В строке 16 расстояние равно 15, значит, оно дойдёт до нуля в строке 31, где будут одни нечётные числа (как и требует доказываемое утверждение). В строке 32 будут две единицы и 31 белых клеток между ними, интервал будет уменьшаться, пока в строке $63 = 32 + 31$ не дойдёт до нуля, и так далее (рассуждение по индукции). ◁

• Это рассуждение объясняет и самоподобную природу рисунка: два новых треугольника, растущих из крайних клеток, растут в точности так же, как и начальный треугольник сверху от них.

Бином Ньютона указывает коэффициенты в разложении $(a + b)^n$. Можно задать себе аналогичный вопрос про $(a + b + c)^n$ — какие там коэффициенты? Скажем

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

что легко проверить (коэффициент 2 возникает, когда ab соединяется с ba и так далее). Чуть сложнее вычислить

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Но какая тут общая формула? Следующая задача отвечает на этот вопрос.

5.20* Докажите, что $(a+b+c)^n$ состоит из членов вида $a^p b^q c^r$, где $p, q, r \geqslant 0$, $p+q+r=n$, а коэффициент при $a^p b^q c^r$ равен

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

(*мультиномиальные коэффициенты*).

▷ Раскрывая скобки в $(a+b+c)^n$, мы получим сумму всех слов длины n, составленных из букв a, b, c (слово понимается как произведение букв). Нам надо найти, сколько будет слов, где есть p букв a, есть q букв b и r букв c. Это мы уже проходили (задача 4.22): надо временно представить себе, что все буквы a пронумерованы от 1 до p, все буквы b пронумерованы от 1 до q и все буквы c пронумерованы от 1 до r. Тогда у нас n разных букв, и $n!$ слов. Объединим в одну группу слова, которые соответствуют одному слову при стирании номеров букв. В каждой группе $p!q!r!$ слов, потому что в ненумерованном слове нужно расставить номера букв a (это можно сделать $p!$ способами), потом номера букв b (это можно сделать $q!$ способами) и номера букв c (это можно сделать $r!$ способами). ◁

Аналогичная формула (по тем же причинам) есть для любого числа слагаемых: скажем, $(a+b+c+d)^n$ равно сумме одночленов $a^p b^q c^r d^s$ с $p+q+r+s=n$, а коэффициенты равны $n!/(p!q!r!s!)$.

В заключение приведём ещё одну ситуацию, где появляются биномиальные коэффициенты.

5.21* Докажите, что число решений уравнения $x+y+z=10$ в целых неотрицательных числах равно C_{12}^2. Чему равно число решений уравнения $x+y+z=13$ в целых положительных числах?

Решением уравнения $x+y+z=10$ считается тройка чисел (x, y, z), где все три числа целые и неотрицательные, и в сумме дают 10. Скажем, $(1, 3, 6)$ и $(3, 1, 6)$ — два решения этого уравнения, причём различные.

▷ Установим взаимно однозначное соответствие между двоичными словами длины 12 с двумя единицами и решениями этого уравнения. Взяв слово, найдём в нём две единицы, и посчитаем, сколько нулей стоит в интервалах, на которые они разбивают слово. Получатся три числа, которые мы запишем (слева направо) и получим тройку чисел, в сумме равных общему числу нулей (то есть 10).

Например, слово 010001000000 соответствует тройке $(1, 3, 6)$ (сначала один нуль, потом три нуля, в конце шесть нулей), а слово 100000000001 соответствует тройке $(0, 10, 0)$.

Легко понять, что это соответствие взаимно однозначное (по решению легко указать соответствующее слово, и наоборот), так что количество решений равно количеству слов, то есть C_{12}^{2}.

Что касается второго уравнения, то положительное число x можно записать в виде $1+x'$, где x' — неотрицательное, так что для x', y', z' получаем уравнение $x' + y +' z' = 10$, и ответ тот же самый: C_{12}^{2}. А можно вспомнить (задача 4.10), что решения уравнения $x + y + z = 13$ соответствуют движению по участку железной дороги с 13 перегонами, в котором мы делаем две остановки, и надо выбрать 2 места остановки из 12 возможных. ◁

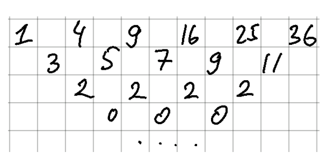
• Это рассуждение часто называют по-русски «шары и перегородки», потому что мы находим x, y, z как числа шаров (нулей) в группах, разделённых перегородками (единицами). Такое же рассуждение с n шарами и $k-1$ перегородками даёт и общую формулу.

Общее утверждение: *количество решений уравнения* $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ *в целых неотрицательных числах* (*при* $k \geqslant 1, n \geqslant 0$) *равно* C_{n+k-1}^{k-1}.

$\boxed{\textbf{5.22}^*}$ Найдите число решений неравенства $x + y \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах.

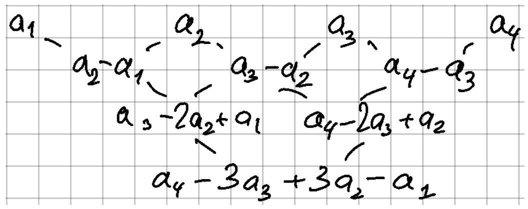
▷ Оно равно числу решений уравнения $x+y+z \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах (недостачу до 10, однозначно определяемую, можно обозначить через z). Ответ: C_{12}^{2}. ◁

Выпишем подряд точные квадраты $(1, 4, 9, 16, \ldots)$. Затем под каждыми двумя числами напишем разность, получим ряд из *первых разностей* $3, 5, 7, 9 \ldots$. Ещё раз сделаем то же, получится ряд из вторых разностей $2, 2, 2, \ldots$ (а третьи разности будут нулевыми).



Можно сделать аналогичный опыт с точными кубами, тогда понадобится на один шаг больше (четвёртые разности будут ненулевыми, но постоянными, а пятые нулевыми).

Если записать правила вычислений для третьей строки в общем виде, то там появятся знакочередующиеся биномиальные коэффициенты:



5.23* (а) Покажите, что выражение для k-й разности содержит последовательные члены исходного ряда с знакочередующимися биномиальными коэффициентами $C_k^0, -C_k^1, C_k^2, \ldots$. (б) Покажите, что если исходная последовательность является значениями многочлена $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в целых точках, то все k-е разности равны $k!a_k$ (а все следующие — нулю). (в) Докажите, что для целого положительного s сумма

$$C_k^0 0^s - C_k^1 1^s + C_k^2 2^s - C_k^3 3^s + \ldots$$

равна $(-1)^k k!$ при $s = k$ и равна 0 при $s < k$.

▷ (а) Как видно из нашего рисунка, при вычитании двух соседних выражений для k-й разности знакопеременные суммы складываются как раз так, чтобы дать коэффициенты из следующей строки треугольника Паскаля.

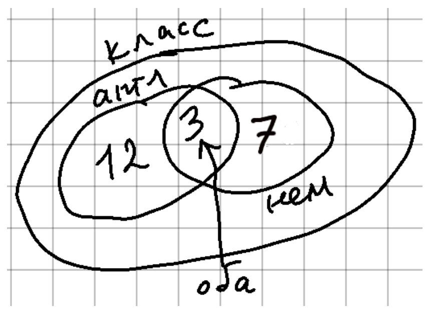
(б) Рассуждаем по индукции. Первые разности для последовательности $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$ равны $(n+1)^k - n^k = kx^{k-1} + C_k^2 x^{k-2} + \ldots$; получается многочлен степени $k-1$ со старшим коэффициентом k, и от его значений надо взять $(k-1)$-е разности, так что можно воспользоваться индуктивным предположением. Остаётся заметить, что (по тому же предположению) важен только старший член многочлена $P(x)$.

(в) Непосредственно следует из двух предыдущих пунктов. ◁

6. Включения и исключения

$\boxed{\textbf{6.1}}$ В классе 10 учеников знают немецкий, 15 знают английский, и среди них есть трое, которые знают оба языка (они входят в 10 и 15, о которых шла речь). Сколько учеников знает хотя бы один из этих двух языков?

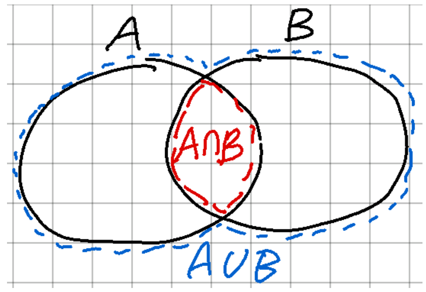
▷ Если мы сложим 10 и 25, то тех, кто знает оба языка, мы посчитаем дважды, а нужно только один раз. Значит, их надо вычесть: получаем, что $10 + 15 - 3 = 22$ человек знают хотя бы один из двух языков. ◁



• Можно объяснить иначе. Ученики в классе делятся на четыре непересекающиеся группы:

- знающие оба языка;
- знающие только немецкий;
- знающие только английский;
- не знающие ни немецкого, ни английского.

К первой группе по условию относятся 3 человека. Вместе со второй группой получаем всех знающих немецкий, их 10, так что во второй группе 7. Первая с третьей — знающие английский, их 15, значит в третьей 12. Ответ — сумма первой, второй и третьей группы, то есть $3+7+12 = 22$. (Заметим, что из условий задачи нельзя определить, сколько человек в четвёртой группе.)



На более математическом языке (мы уже упоминали это в разделе 1) говорят так. Есть два конечных множества A и B (тех, кто знает немецкий, и тех, кто знает английский). Тогда можно рассмотреть их *пересечение* $A \cap B$ (тех, кто знает оба языка) и *объединение* $A \cup B$ (тех, кто знает хотя бы один язык). Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

где через $|X|$ обозначено число элементов в (конечном) множестве X. В нашем примере было $22 = 15 + 10 - 3$.

• Аналогичное утверждение можно сформулировать для площадей: площадь объединения фигур A и B на рисунке равна сумме площадей фигур минус площадь их пересечения.

Можно задать такой же вопрос для большего числа множеств — известны размеры множеств и размеры всех пересечений, надо найти размер объединения. Можно было бы задать такой вопрос про английский, немецкий и французский, но чтобы не запутывать дело, будем сразу говорить о множествах.

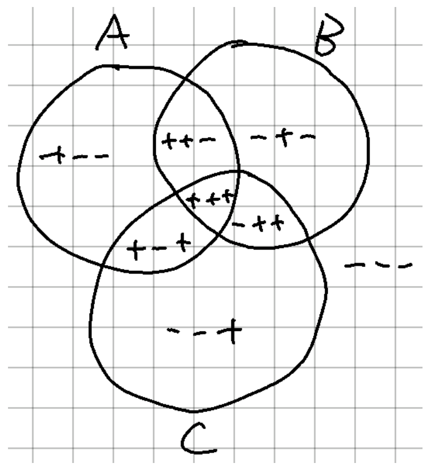
6.2 Докажите, что

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

для любых трёх конечных множеств A, B, C.

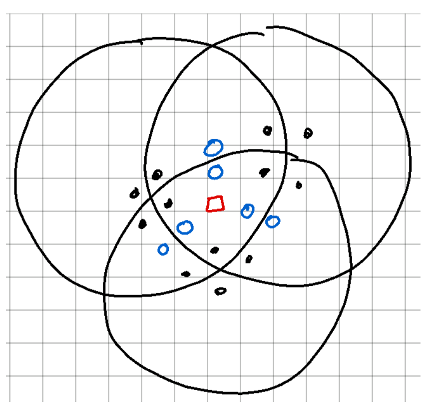
Словами: чтобы найти число людей, знающий хотя бы один язык из трёх, надо сложить числа людей, знающих немецкий, знающих французский и знающих английский, затем вычесть числа людей, знающих одновременно английский и немецкий, английский и французский, немецкий и французский, и, наконец, прибавить число людей, знающих все три языка.

▷ Как и раньше, можно посмотреть, правильно ли будут учтены элементы всех сортов. Теперь сортов 8 (для каждого множества есть два варианта: принадлежит или нет; каждый язык можно знать или не знать). Можно нарисовать аналогичную диаграмму (и проверить, что она «представительна» в том смысле, что представлены все восемь вариантов)



Здесь плюсами и минусами отмечена принадлежность и непринадлежность трём множествам (слева направо: A, B, C), видно, что для любой комбинации из трёх плюсов или минусов есть своя область (ровно одна).

Теперь надо проверить, что во всех частях учёт (согласно правой части доказываемой формулы) проводится правильно.



Отметим точками части, учтённые в $|A| + |B| + |C|$: видно, что знающие ровно один язык учтены правильно, знающие ровно два языка учтены дважды, а знающие три языка учтены трижды. После того как мы вычтем попарные пересечения (кружочки), знающие ровно два языка будут вычтены один раз (они попадут только в одно попарное пересечение), а знающие три языка будут вычтены три раза. Наконец, при добавлении тройного пересечения (квадратик) всё будет учтено правильно ($2 - 1$ и $3 - 3 + 1$ равны единице). ◁

6.3 Как изменятся слагаемые в правой части, если из множества A удалить элемент, который не входил ни в B, ни в C? Если удалить элемент, который входил в A и B, но не входил в C? Если удалить элемент, который входил во все три множества?

▷ Если удалённый элемент входил только в A, то изменится только $|A|$ (уменьшится на единицу). Если удалённый элемент входил в A и B (но не в C), то уменьшатся на единицу A, B и $A \cap B$ (и последнее изменение частично скомпенсирует два первых: выражение в целом уменьшится на единицу). Наконец, если элемент входил во все три множества, то все слагаемые уменьшатся на единицу (и сумма тоже уменьшится на единицу, так как слагаемых с плюсом на одно больше). ◁

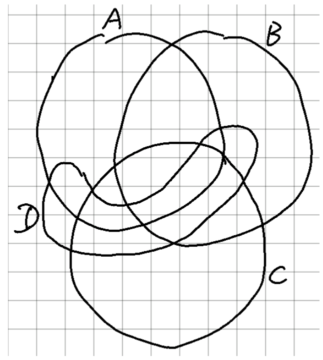
• Эта задача показывает, что во всех трёх случаях правая часть уменьшается на единицу — синхронно с левой. Если по очереди удалить все элементы, то она станет равной нулю — значит, изначально она была равна числу элементов в $A \cup B \cup C$, как и утверждает формула включений и исключений.

Теперь уже можно догадаться, как будет выглядеть формула для четырёх множеств: чтобы найти число элементов в их объединении, надо

- сложить числа элементов в этих множествах;
- вычесть все шесть попарных пересечений;
- добавить четыре тройных пересечения;
- наконец, вычесть пересечение всех четырёх множеств.

(Понятно, почему попарных пересечений шесть? потому что $C_4^2 = 6$.)

▷ Чтобы доказать эту формулу, тоже можно нарисовать «представительную» картинку для четырёх множеств, где были бы все 16 вариантов принадлежности и непринадлежности. Это уже не так просто, но если не настаивать на симметрии, то можно:



По этой картинке тоже можно посчитать, сколько раз вошла и вышла каждая часть. Но нам хотелось бы доказать аналогичную формулу для любого числа множеств, так что надо искать другое доказательство. ◁

$\boxed{\mathbf{6.4}^*}$ Докажите общую *формулу включений и исключений*:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots - (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Здесь написано, что для подсчёта размера объединения надо сложить размеры множеств, вычесть размеры попарных пересечений, прибавить размеры тройных пересечений и так далее (последний знак будет плюс при нечётном n и минус при чётном n, поэтому там и стоит коэффициент $-(-1)^n$).

▷ Есть разные способы это доказать, но раз уж мы изучали свойства биномиальных коэффициентов, то можно их использовать. Пусть у нас есть какой-то элемент, который принадлежит s множествам среди $A_1, \ldots, A_n$, а остальным $(n - s)$ множествам не принадлежит. Надо понять, сколько раз он будет учтён на каждом шаге, и проверить, что вместе получится правильно (однократный учёт).

На первом шаге, раз он принадлежит s множествам, он будет учтён (с плюсом) s раз. На втором шаге он будет вычтен столько раз, скольким попарным пересечениям он принадлежит. Эти пересечения — пересечения пар, выбранных среди s множеств, поэтому их C_s^2. На третьем шаге он будет добавлен столько раз, сколько есть троек среди s множеств, то есть C_s^3. И так далее — последний раз он будет добавлен или вычтен один раз, это соответствует $C_s^s = 1$ (а знак зависит от чётности s). Можно ещё заметить, что число s на первом шаге есть C_s^1. Общее число раз будет, таким образом,

$$C_s^1 - C_s^2 + C_s^3 - \ldots \pm C_s^s.$$

Это знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов из одной строки треугольника Паскаля, только не всех, а кроме первого ($C_s^0 = 1$). Если бы первый добавить с минусом, то получилась бы знакопеременная сумма всех, равная нулю (задача 5.5), так что без него эта сумма равна единице, как и требуется. ◁

6.5* Докажите, что выражение

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots - (-2)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

(добавлены степени двойки) тоже имеет комбинаторный смысл: оно равно числу элементов, которые входят в *нечётное* число множеств $A_1, \ldots, A_n$. (Если множества A_i не пересекаются, то по-прежнему получается сумма.)

▷ Можно использовать тот же метод и подсчитать, с каким коэффициентом будет учтён некоторый элемент x, принадлежащий ровно s множествам. Сначала он будет учтён $s = C_s^1$ раз, потом будет вычтен C_s^2 раз с коэффициентом 2, потом добавлен C_s^3 раз с коэффициентом 4, и так далее. Суммарный коэффициент будет

$$A = C_s^1 - 2C_s^2 + 4C_s^3 - \ldots + (-2)^{s-1}C_s^s$$

Это почти бином Ньютона для $(1-2)^s$:

$$(1-2)^s = 1 - 2C_s^1 + 4C_s^2 - 8C_s^3 + \ldots + (-2)^s C_s^s = 1 - 2A$$

Поэтому при чётных s это выражение равно 1 и $A = 0$, а при нечётных s это выражение равно -1 и $A = 1$, так что мы учитываем по разу все элементы, входящие в нечётное число множеств A_i (а входящие в чётное число — не учитываем). ◁

Приведём два примера, где можно использовать формулу включений и исключений: (1) перестановки без неподвижных точек и (2) слова, использующие все буквы (сюръекции).

6.6* Слово состоит из n различных букв. Сколько разных слов можно составить, переставляя эти буквы, если дополнительно требуется, чтобы ни одна буква не осталась на своём прежнем месте?

▷ Можно было бы спросить, сколькими способами n писем для n адресатов можно разложить по n надписанным конвертам, если нужно, чтобы каждый адресат получил бы неправильное письмо. (А математики сказали бы коротко «найти число перестановок без неподвижных точек».) ◁

▷ Пусть A_i — те варианты, когда i-я буква остаётся на своём месте. Тогда объединение всех A_i будет состоять из слов, которые нам не годятся (где есть буква, остающаяся на месте). Если мы будем знать, сколько слов в этом объединении, то вычтя это число из $n!$, получим число годных слов.

В каждом A_i переставляются произвольным образом все буквы, кроме i-й (остальные буквы могут оставаться на своём месте или нет, для A_i это не важно). Значит, в нём $(n-1)!$ элементов. Попарные пересечения $A_i \cap A_j$ состоят из слов, у которых обе буквы i и j остаются на месте (а остальные как хотят), в таком пересечении $(n-2)!$ элементов, и разных таких пересечений будет C_n^2. Тройных пересечений будет C_n^3, и в каждом $(n-3)!$ элементов. Теперь остаётся написать формулу включений и исключений: негодных слов будет

$$n \cdot (n-1)! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! + \ldots \pm C_n^{n-1}1! \mp C_n^n 0!$$

(два последних знака противоположны и зависят от чётности n). Чтобы упростить эту формулу, вспомним, что $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ и сократим $(n-k)!$, а также вынесем из всех слагаемых $n!$, получится

$$n!(1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + \ldots \mp 1/n!).$$

Это число надо вычесть из $n!$, так что окончательный ответ будет

$$n!(1 - 1 + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \ldots \pm 1/n!)$$

(первые два члена можно сократить, а можно для единообразия переписать как $1/0! - 1/1!$). ◁

▷ Знатоки математического анализа сразу скажут, что выражение в скобках с ростом n быстро приближается к значению $1/e$, где $e = 2{,}7182818284\ldots$ — так называемое «основание натуральных логарифмов», так что в примерно 37% случаев ни одна буква не стоит на своём месте.

(А знатоки теории вероятностей добавили бы, что в среднем в перестановке n букв есть одна неподвижная точка, так что не очень и удивительно, что около трети слов не имеют её — зато другие имеют больше одной.) ◁

А вот второй пример, где полезна формула включений и исключений.

Мы знаем, что слов длины n в алфавите из k букв (то есть последовательностей из n символов, выбираемых из k-элементного списка) всего k^n (для каждой буквы есть k вариантов). Наложим дополнительное ограничение: *в слове должны встречаться все буквы*. Сколько тогда останется слов?

Вопрос имеет смысл при $n \geqslant k$ (иначе мест для всех букв не хватит). Скажем, можно спросить (и мы сделаем это в следующей задаче), сколько существует десятизначных чисел с нечётными цифрами, в которых каждая из пяти нечётных цифр встречается не менее одного раза. Это соответствует $n = 10$, $k = 5$. Но нет смысла спрашивать, сколько бывает пятизначных чисел, в которых встречаются все 10 цифр — их не бывает.

В случае $k = n$ ответ будет $n!$ (или $k!$), потому что мест столько же, сколько букв, и если каждая буква встречается, то ровно один раз (иначе мест для других не хватит). Но как найти ответ при $n > k$?

$\boxed{\mathbf{6.7}^*}$ Сколько существует десятизначных чисел, составленных из нечётных цифр, в которых каждая нечётная цифра использована (встречается хоть раз)? (Скажем, таковы числа 1975311111 или 5533997711, но не 1111335777.)

▷ Эту задачу можно решать, используя формулу включений и исключений, а можно написать рекуррентную формулу. Вот как это делается.

(Первое решение) Всего десятизначных чисел с нечётными цифрами 5^{10}. Из них надо вычесть те, где *хотя бы одна из нечётных цифр не встречается*, так что достаточно подсчитать их количество. Интересующее нас множество является объединением пяти множеств N_1, N_3, N_5, N_7 и N_9: числа, где не встречается цифра 1 (множество N_1), числа, где не встречается 3 (множество N_3), и так далее. Каждое из множеств имеет размер 4^{10} (скажем, N_1 состоит из слов длины 10 из букв $3, 5, 7, 9$). Но они пересекаются, поэтому нельзя просто сложить их размеры, чтобы найти размер объединения, надо использовать формулу включений и исключений.

В неё входят пересечения множеств, скажем, $N_1 \cap N_3$. Это пересечение состоит из чисел, в которых нет ни цифры 1, ни цифры 3 — то есть это слова длины 10 из букв $5, 7, 9$, и их будет 3^{10}. А самих этих пересечений будет C_5^2 — надо из пяти множеств выбрать два и их пересечь. Аналогично пересечений по три будет C_5^3, а каждое из них содержит 2^{10} элементов, и так далее (до пересечения всех пяти множеств, которое пусто, так как числа без цифр не бывает). Теперь формула включений и исключений даёт ответ:

$$5^{10} - C_5^1 \cdot 4^{10} + C_5^2 \cdot 3^{10} - C_5^3 \cdot 2^{10} + C_5^4 \cdot 1^{10}$$

(последний член с 0^{10} мы опустили). Теперь несложно подсчитать ответ (особенно есть есть калькулятор или какая-нибудь программа для математических вычислений), получится 5 103 000.

(Второе решение) Представим себе, что мы стёрли первую цифру в числе, удовлетворяющем условию (все нечётные цифры входят). Может быть два случая:

- в оставшемся числе по-прежнему есть все пять цифр;
- в оставшемся числе какой-то цифры нет (только одной — той, которую мы стёрли).

Первый случай сводит задачу к паре $(9, 5)$ (количество девятизначных чисел из нечётных цифр, в которых есть все цифры), второй случай разбивается на пять подслучаев в зависимости от отсутствующей цифры. Количество чисел в каждом подслучае соответствует нашей задаче для пары $(9, 4)$.

Эту же альтернативу можно сформулировать иначе: первая буква встречается больше одного раза (дальше есть такие же буквы) или только один раз.

Более точно, пусть $T(n, k)$ при $n \geqslant k$ — количество слов из n букв в k-буквенном алфавите, в которых встречаются все буквы. Тогда

$$T(n, k) = kT(n-1, k) + kT(n-1, k-1).$$

Первое слагаемое соответствует первому случаю: если после удаления первой буквы получается слово, где есть все k букв (что бывает $T(n-1, k)$ способами), то первую букву можно добавить любым из k способов.

Второе слагаемое (для второго случая): если после удаления первой буквы остаётся слово, в котором первой буквы нет, а все остальные есть, то таких слов $T(n-1, k-1)$, и надо ещё умножить на k вариантов для первой буквы.

Эта рекуррентная формула имеет смысл при $n > k$, при $n = k$ мы знаем ответ ($k!$). (Если считать, что $T(n, k) = 0$ при $n < k$, то формула станет верной при всех n и k.) Теперь по ней можно вычислить нужное нам число $T(10, 5)$:

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	
5	1	30	150	240	120
6	1	62	540	1560	1800
7	1	126	1806	8400	16800
8	1	·	5796	40824	126000
9	1	·	·	186480	834120
10	1	·	·	·	5103000

$T(n, k)$

(показана только часть таблицы, нужная для вычисления $T(10,5)$). $\triangleleft$

• Два решения этой задачи дают нам две формулы для $T(n,k)$:

$$\begin{aligned} T(n,k) &= C_k^0 k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n - \ldots \pm C_k^k (k-k)^n \\ &= k(T(n-1,k) + T(n-1,k-1)) \end{aligned}$$

(для единообразия в первой формуле мы записали k^n как $C_k^0 k^n$ и оставили один нулевой член в конце). Вторая формула проще, но использует предыдущие значения S, в отличие от первой.

$\triangleright$ Для вычисления по рекуррентной формуле можно написать простую программу типа такой (это `python`):

```
N=10
K=5
T = [[0 for i in range(K+1)] for j in range(N+1)]
T[1][1]=1
for n in range(2,N+1):
    for k in range(1,K+1):
        T[n][k]=k*(T[n-1][k-1]+T[n-1][k])
print (T[10][5])
```

В этой программе мы окружаем интересующую нас таблицу нулями, чтобы не разбирать случаи $k = 1$ и $k = n$ отдельно. Благодаря этому единственное ненулевое значение, которое нам надо явно указать, это $T(1,1) = 1$. $\triangleleft$

• Посмотрим ещё раз на десятизначные числа из нечётных цифр, в которых встречаются все нечётные цифры. В таком числе можно переставить цифры по какому-то правилу. Скажем, если применить перестановку (1→5, 3→3, 5→7, 7→1, 9→9) к числу 5533997711, то получится другое число того же типа, а именно 7733991155. (Как сказали бы математики, «на нашем множестве действует группа перестановок пяти цифр».)

Сколько чисел можно получить из одного такими перестановками? («Сколько элементов в орбите одного числа при действии группы перестановок?») Разные перестановки дадут разные числа (поскольку все цифры входят, отличие проявится), поэтому получится $120 = 5!$ чисел в каждой группе. Такая группа соответствует разбиению всех разрядов числа (позиций в его записи) на пять классов (групп) — в каждом классе стоит одна и та же цифра. Можно сказать, что мы сначала разбиваем разряды на пять групп, а потом решаем, какую цифру назначить для каждой группы. Способов такого разбиения (на пять групп) будет $5\,103\,000/120 = 42\,525$ (из нашего рассуждения было сразу ясно, что поделится нацело).

Тот же вывод в общем случае: *число разбиений множества из n элементов на k различных классов равно* $T(n,k)/k!$. Если обозначить его через $S(n,k)$, то получается рекуррентная формула

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Надо только отчётливо понимать, что́ именно мы подсчитываем, говоря о числе разбиений: разбиение определяется тем, какие позиции входят в один класс, а какие в разные (а, скажем, порядок перечисления классов не учитывается). Математики сказали бы, что мы подсчитываем «отношения эквивалентности на n-элементном множестве с k классами эквивалентности».

▷ Для чисел $S(n,k)$ есть традиционное название: *числа Стирлинга второго рода*. (Это тот же самый английский математик Стирлинг (1692–1770), который нашёл приближённую формулу для факториалов: $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.) ◁

7. Что дальше?

В предыдущих разделах мы разобрали базовые понятия и методы перечислительной комбинаторики из категории «это должен знать каждый». В этом разделе мы немного расскажем о более сложных результатах, приведя примеры биективных доказательств и простейших рассуждений с производящими функциями, укажем на вероятностный смысл комбинаторных задач и приведём список книг разного уровня о комбинаторике на русском языке.

7.1. Биективные доказательства

7.1.1. Диаграммы Юнга

Как мы уже видели в разделе 4, иногда можно доказать, что в двух множествах поровну элементов, установив между ними взаимно однозначное соответствие («биекцию»). Иногда это соответствие совсем простое, но не всегда — бывает, что равенство сначала доказали каким-то другим способом, а соответствие построили только позже (или вообще пока не построили). Вот немного более сложный пример биективного рассуждения.

7.1* Пусть n и k — целые положительные числа. Докажите, что количество разбиений числа n на целые положительные слагаемые, *не превосходящие* k, равно количеству разбиений числа n на *не более чем* k целых положительных слагаемых.

• Как и раньше, порядок слагаемых мы не учитываем. Скажем, для $n = 5$ и $k = 3$ можно перечислить разбиения 5 на не более чем 3 слагаемых:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

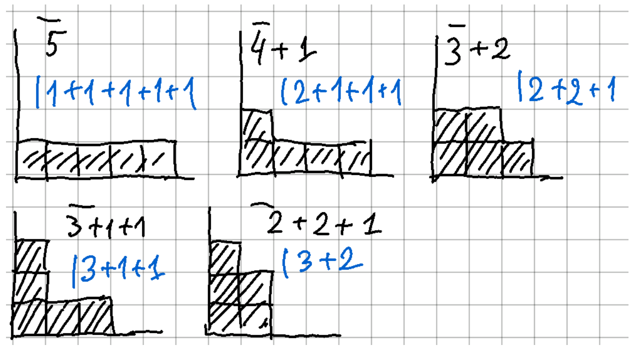
(пять вариантов, в первом единственное слагаемое, равное 5). Можно также перечислить разбиения 5 на слагаемые, не большие 3:

$$[5 =]\ 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Здесь 5 в скобках, потому что теперь оно уже не будет разбиением. Можно проверить, что мы ничего не пропустили (в обоих случаях слагаемые в разбиении указаны в убывающем порядке, а сами разбиения указаны в порядке убывания наибольшего слагаемого).

Видно, что и тех, и других разбиений поровну (5 при $n = 5$, $k = 3$). Требуется доказать, что их будет поровну и для всех других целых $n, k \geqslant 1$.

▷ Решение можно увидеть на таком рисунке:



Здесь изображены пять фигур из клеток, которые можно читать двумя способами: можно считать, что каждая строка представляет собой слагаемое, а можно считать, что каждый столбец представляет собой слагаемое. Скажем, средний рисунок в верхней строке по горизонтали читается как $4+1$, а по вертикали как $2+1+1+1$. Горизонтальные чтения дают всевозможные разбиения 5 на суммы из не более чем 3 слагаемых, а вертикальные — всевозможные разбиения 5 на суммы из слагаемых, не превосходящих 3.

Надо только объяснить, почему так будет получаться в общем случае. Это делается так. Фигуру из клеток (внутри прямого угла на клетчатой бумаге, как на рисунке) называют *диаграммой Юнга*, если она вместе с каждой клеткой содержит все клетки слева и снизу вплоть до границы угла («монотонна вниз и влево»). Отсюда следует, что каждая строка сплошная и начинается с левого края (монотонность влево), а также что длины строк неубывают, если брать строки снизу вверх (монотонность вниз). Наоборот, если у нас есть сумма из неубывающих слагаемых, то её можно изобразить фигурой из строк неубывающей длины.

Эти (очевидные) соображения показывают, что *разбиения числа n на слагаемые соответствуют диаграммам Юнга из n клеток*: у нас есть соответствие между разбиениями и диаграммами (описанное выше). Точнее, у нас есть два таких соответствия — по горизонталям и вертикалям.

Теперь рассмотрим диаграммы Юнга из 5 клеток *высоты не более* 3. Тогда при чтении их по горизонтали они соответствуют представлениям числа 5 в виде суммы не более чем 3 слагаемых, а при чтении по вертикали они соответствуют представлениям числа 5 в виде суммы любого числа слагаемых (ширина не ограничивается), не превосходящих 3. Поэтому тех и других представлений одинаковое число.

Это рассуждение годится для любых n и k. ◁

• Напомним, что мы считаем разбиения на слагаемые без учёта порядка слагаемых — чтобы избежать повторного счёта, мы предполагаем, что слагаемые идут в неубывающем порядке.

7.1.2. Числа Каталана

Много интересных биекций можно построить для разных определений чисел Каталана. Напомним, что мы рассматривали (задача 3.15) произведение n сомножителей, и считали, сколькими способами можно расставить в нём скобки, указывающие порядок действий (переставлять сомножители не разрешается). Это число способов, как мы уже упоминали, называется *числом Каталана* и обозначается C_{n-1} (так принято, так что C_4 — это число способов расставить скобки в произведении пяти сомножителей, а не четырёх).

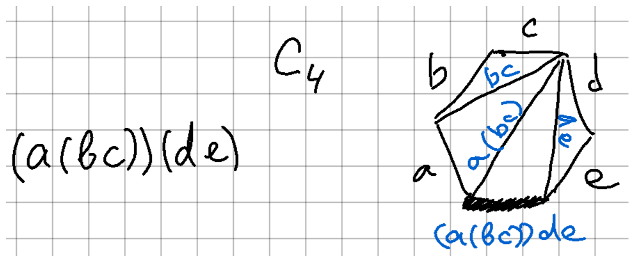
$\boxed{\mathbf{7.2}^*}$ Докажите, что C_4 равно числу способов разрезать выпуклый 6-угольник диагоналями на треугольники, и вообще C_n равно числу способов разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник диагоналями на треугольники.

• Скажем, четырёхугольник можно разрезать двумя способами (по одной диагонали и по другой) — и это соответствует C_2, или числу способов перемножить три множителя.

Важное уточнение: мы рассматриваем разрезания данного n-угольника, поворачивать его не разрешается (так что разрезания по разным диагоналям считаются разными разрезаниями).

▷ Можно также понять, сколько нужно диагоналей и сколько получится треугольников. Каждое разрезание увеличивает число частей на единицу, так что число треугольников на 1 больше числа диагоналей (вначале была одна часть). Если провести все диагонали из одной вершины, то будет $n-3$ диагоналей и $n-2$ треугольников. Но из подсчёта углов следует, что число треугольников не зависит от способа разрезания: сумма углов всех треугольников должна равняться сумме углов многоугольника, как ни разрезай. Так что при любом разрезании n-угольника будет столько же треугольников и диагоналей ($n-2$ и $n-1$ соответственно). ◁

▷ Выберем (произвольно) одну из сторон шестиугольника и объявим её «основанием», а на остальных сторонах напишем по часовой стрелке сомножители a, b, c, d, e. Тогда, отрезая треугольник, можно перемножать числа на его сторонах и писать произведение на третьей стороне. В конце концов на основании появится произведение всех чисел (с некоторым порядком действий, то есть с некоторой расстановкой скобок).



Наоборот, если есть какой-то порядок действий, то можно взять самое внешнее умножение, посмотреть, какие буквы слева и какие справа, и соединить основание с соответствущей точкой треугольником.

Аналогичное рассуждение годится для любого n: если сомножителей $n+1$, то сторон будет $n+2$ (стороны, на которых пишут сомножители, и основание). ◁

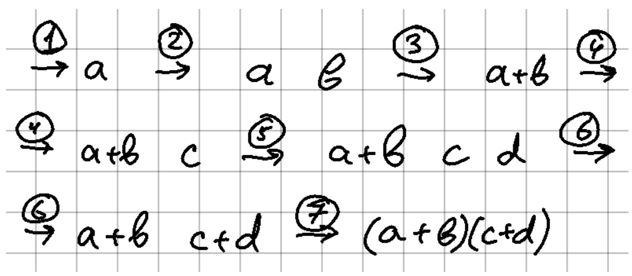
▷ Дотошные люди попросят тут доказать, что действительно возникает взаимно однозначное соответствие. Хотя это и выглядит очень правдоподобно после рассматривания рисунка и других примеров, строгое доказательство прежде всего потребовало бы формального определения понятий «расстановка скобок для указания порядка дейтсвий» и «разрезания многоугольника на треугольники», что совсем не так просто (не зря в школьном курсе про многоугольники говорят без точных определений), так что мы не будем этого делать. Аналогичным образом в следующей задаче мы тоже позволим себе описать соответствие неформально и декларировать его взаимную однозначность. ◁

$\boxed{\textbf{7.3}^*}$ Докажите, что C_n равно количеству двоичных слов длины $2n$ из n нулей и n единиц, в которых каждый начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.

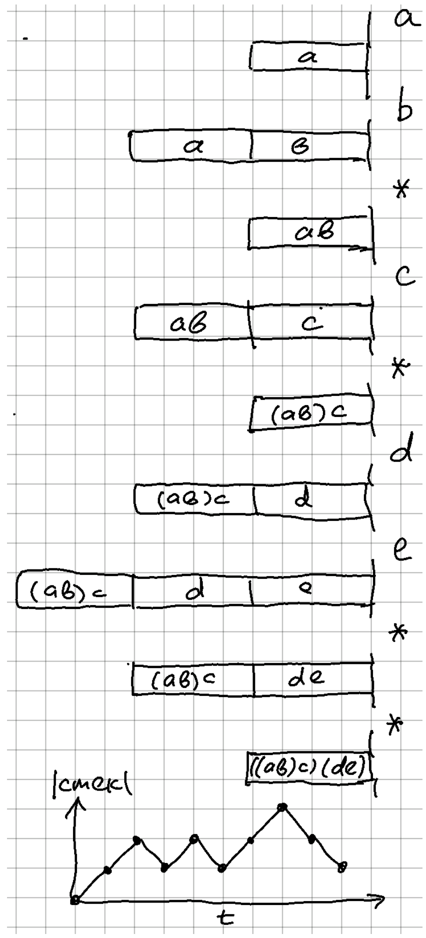
▷ Нужная для этого доказательства биекция устроена довольно хитро, и её скорее можно заметить саму по себе, чем придумать, решая эту задачу.

Мы начнём издалека. Когда-то выпускались «стековые калькуляторы», которые позволяли вычислять арифметические выражения в «обратной польской записи» (название объясняется тем, что такую запись рассматривал польский логик Лукасевич). В этой записи знаки арифметических действий пишутся не между выражениями, над которыми действие производится, а после них. Скажем, $a+b$ записывается как $ab+$, а $(a+b)\cdot(c+d)$ записывается как $ab+cd+*$ (звёздочка обозначает умножение). Со скобками это бы выглядело как $((ab+)(cd+)*)$, но скобки мы не пишем.

Замечательное свойство таких обозначений состоит в том, что в них для указания порядка действий скобки и не нужны. Такое выражение можно вычислять с помощью «стекового калькулятора», читая слева направо. (1) Видя число a, мы кладём на стол листок с этим числом. Затем, (2) видя b, мы кладём справа от a листок с числом b. (Можно было бы класть поверх, тогда бы это лучше соответствовало английскому слову *stack* (стопка), но для рисования удобнее слева направо). Затем, (3) видя операцию $+$, мы заменяем два правых листка одним, записывая на нём сумму (теперь стек имеет длину 1. Затем (4) мы кладём c справа, (5) d ещё правее, потом (6) выполняем операцию сложения с двумя правыми листками (c и d), заменяя их на один листок с $c + d$, и, наконец, (7) заменяем листки с $(a + b)$ и $(c + d)$ на один листок с $(a + b)(c + d)$, выполняя команду умножения.



А вот что получится для некоммутативного произведения:



Внизу нарисован график зависимости длины стека от времени.

К чему всё это? Рассматривая эти картинки и пробуя другие варианты, можно убедиться что *если записать выражение в обратной польской записи и потом понимать его как последовательность команд для стекового калькулятора, то калькулятор вычислит как раз такое выражение.*

Заметим, что в польской записи переменные идут в том же порядке, что и в обычной, поэтому если мы фиксировали порядок переменных, то можно не писать имена переменных, а вместо них писать p (от слова “push” — поместить новое число в стек). Таким образом, *всякому способу вычисления произведения соответствует последовательность символов p и $*$, где число букв p равно числу сомножителей, а число звёздочек на единицу меньше.* Каждое p увеличивает длину стека на 1, а каждая звёздочка уменьшает на 1, вначале длина равна нулю, потом всегда положительна, а в конце 1.

Последнее соображение показывает также, что *любой начальный отрезок* *последовательности содержит больше букв p, чем звёздочек.*

Наконец, решающее замечание: *всякой последовательности из m букв p и $m-1$ звёздочек, в котором любой начальный отрезок содержит больше букв, чем звёздочек, соответствует способ вычисления произведения m сомножителей*. В самом деле, если мы заменим m букв p на сомножители (в том порядке, в котором они идут), а затем будем понимать это как последовательность команд стекового калькулятора, то стек никогда не станет пустым, а перед звёздочкой в нём будет минимум два элемента (иначе вместе с этой звёздочкой было бы поровну букв и звёздочек), так что умножение выполнимо.

Осталось заметить, что наше условие про начала последовательности гарантирует, что сначала стоит буква p. Если её убрать, то остаток последовательности содержит $m-1$ букв p и $m-1$ звёздочек, и любой начальный отрезок содержит *не меньше* букв, чем звёздочек. Взяв $m = n+1$ и заменив буквы и звёздочки на единицы и нули, мы получим *взаимно однозначное соответствие между способами вычислить произведение $n+1$ сомножителей и последовательностями из n нулей и n единиц, в которых любой начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.*

Что и требовалось в задаче. ◁

• На графике длины стека (снизу на рисунке) единицы, они же буквы p, соооответствуют участкам подъёма (вектор $(1,1)$), а нули, они же звёздочки, соответствуют участкам спуска (вектор $(1,-1)$). Другими словами, число Каталана C_n равно числу ломаных такого вида (с наклоном ± 1, повороты в вершинах клеток), идущих из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$ и не доходящих до оси абсцисс.

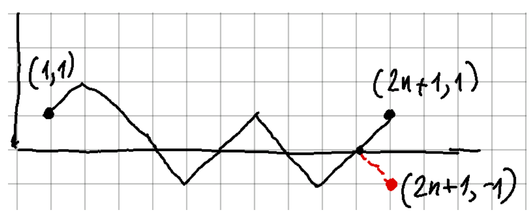
• Глядя на эти ломаные, можно доказать рекуррентную формулу для их числа — и убедиться, что эта та же формула, что и для чисел Каталана. Останется сравнить первые члены и заключить, что все члены совпадают (тем самым получив другое решение предыдущей задачи). Рекуррентную формулу можно получить так: посмотрим, в каком месте ломаная первый раз обращается в нуль (какое минимальное начало имеет поровну нулей и единиц), и разобьём ломаные на такие группы. Если это место фиксировано (скажем, после $2k$ членок последовательности — их чётное число, так как нулей и единиц поровну), то до и после этого места последовательность строится независимо. После него C_{n-k} вариантов (потому что это та же задача меньшего размера), а до него C_{k-1} (потому что участок до начинается с 1 и кончается 0, остаётся выбрать промежуток между ними).

7.1.3. Метод отражений и формула для чисел Каталана

Оказывается, можно построить ещё одно взаимно-однозначное соответствие и с его помощью найти явную формулу для чисел Каталана. Мы уже видели, что надо подсчитать число ломаных из $(1,1)$ до $(2n+1,1)$, *целиком идущих* (строго) *выше оси абсцисс*. Если отбросить это последнее условие, то число ломаных равнялось бы числу последовательностей из n нулей и n единиц, то есть C_{2n}^{n}. Теперь из этого числа надо вычесть ломаные, *доходящие* до оси абсцисс — и их число можно найти, построив взаимно однозначное соответствие. (Говоря о ломаных, мы всюду имеем в виду ломаные с наклоном ± 1, идущие по диагоналям клеток.)

7.4* Постройте взаимно однозначное соответствие между ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$, доходящими до оси абсцисс (в том числе пересекающими её), и *всеми* ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$.

▷ Тут помогает зеркальное отражение относительно оси абсцисс.



Для каждой ломаной в $(2n+1,1)$ доходящей до оси абсцисс, возьмём последний момент времени, когда она на оси абсцисс, и участок справа от этого момента отразим зеркально. Новая ломаная будет вести в $(2n+1,-1)$.

Опишем обратное преобразование. Любая ломаная из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$ должна пройти через ось абсцисс (возможно, несколько раз). Возьмём самый правый из этих моментов времени, и отразим зеркально участок ломаной справа от него. Получим ломаную, ведущую в $(2n+1,1)$.

Почему эти преобразования взаимно обратны (применив одно и потом другое, мы получим исходную ломаную)? Это следует из того, что при обоих преобразования последняя точка ломаной на оси абсцисс не меняется, и потому симметрии подвергнется тот же участок ломаной, только в обратную сторону. Тем самым мы получаем искомое взаимно однозначное соответствие. ◁

• Можно было бы брать не самый правый момент времени, а, скажем, самый левый (или вообще выбирать по любому правилу из всех моментов пересечения какой-то один: моменты пересечения при отражении не меняются).

Теперь уже легко указать формулу для чисел Каталана.

$\boxed{\textbf{7.5}^*}$ Докажите, что $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$

▷ Число ломаных из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$ равно числу последовательностей длины $2n$ с $(n-1)$ единицами и $(n+1)$ нулями, то есть C_{2n}^{n-1}. Остаётся выполнить вычитание:

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{1}{n+1} = C_{2n}^n/(n+1)$$

и получить искомый ответ. ◁

Мы привели только несколько примеров, когда построение взаимно однозначного соответствия позволяет найти число элементов в интересующем нас множестве. Есть целый список таких задач (R. Stanley, `https://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf`) разной сложности, включая некоторые нерешённые. Но, пожалуй, даже более удивительно то, что иногда можно найти ответ совсем другими методами — и сейчас мы приведём несколько (самых простых) примеров такого рода.

7.2. Производящие функции

Перечислительная комбинаторика удивительным образом связана с другими разделами математики. Мы уже видели (в разделе 3), что числа сочетаний можно определить как коэффициенты многочлена $(1+x)^n$, и это сразу же позволяет получить разные следствия, скажем, найти сумму $\sum_{k=1}^n 2^k C_n^k$ (задача 5.13), или найти сумму квадратов всех C_n^k при данном n (задача 5.16). Если немного знать анализ и уметь дифференцировать многочлены, можно легко получить ещё несколько следствий.

$\boxed{\textbf{7.6}^*}$ Какое тождество получится, если продифференцировать биномиальное разложение для $(1+x)^n$?

▷ Получится

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1},$$

потому что производная от x^k равна kx^{k-1}, а от $(1+x)^n$ равна $n(1+x)^{n-1}$ (сдвиг на 1 аргумента сдвигает и производную). ◁

Можно подставить $x = 1$ и получить тождество

$$n2^{n-1} = 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n,$$

но его и без этого легко понять. (Мы добавили для красоты и C_n^0 с нулевым коэффициентом.)

7.7* Как доказать это равенство без дифференцирования?

▷ Поскольку треугольник Паскаля симметричен ($C_n^k = C_n^{n-k}$), то коэффициенты k и $n-k$ при равных числах сочетаний можно заменить на их среднее $n/2$, получится $(n/2) \cdot \sum_k C_n^k = (n/2)2^n = n2^{n-1}$. ◁

• Другие — не столь очевидные — тождества получатся, если подставить не $x = 1$, а, скажем, $x = -1$ или $x = -2$.

Дифференцирование можно применять и дальше.

7.8* Найдите сумму

$$0^2 \cdot C_n^0 + 1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + n^2 \cdot C_n^n.$$

▷ Можно второй раз продифференцировать бином, но тогда в правой части получится сумма членов $k(k-1)C_n^k x^{k-2}$, и если подставить $x = 1$, то получится не совсем искомая сумма (вместо k^2 будет $k(k-1)$). Это не страшно, так как разницу мы уже знаем, но можно перед вторым дифференцированием умножить обе части на x:

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \ldots + nC_n^n x^n,$$
$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + 3^2 C_n^3 x^2 + \ldots + n^2 C_n^n x^{n-1},$$

и теперь уже можно подставить 1 и получить ответ $n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$. ◁

• Повторяя тот же приём (умножение на x и дифференцирование), мы можем вычислить суммы вида $\sum_k k^3 C_n^k$, $\sum_k k^4 C_n^k$ и так далее. Удобно ввести операцию D на функциях, которая дифференцирует их и потом умножает на x, так что $D(x^n) = nx^n$, и применять её несколько раз. (Символически можно написать $D = x\frac{d}{dx}$.)

Говорят, что $(1 + x)^n$ является *производящей функцией* для биномиальных коэффициентов. Вообще производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

— бесконечный, если в последовательности бесконечно много ненулевых членов.

• Какой смысл имеют бесконечные ряды и какие действия по каким правилам с ними можно выполнять — вопрос сложный. Мы сейчас не будем в это вдаваться, и действовать с ними как если бы они были конечными (на самом деле наши действия можно оправдать, если разобраться).

Пусть p_n — число разбиений целого $n \geqslant 0$ на положительные целые слагаемые (без учёта порядка слагаемых). Мы полагаем $p_0 = 1$ (можно условно сказать, что число 0 можно единственным образом представить в виде суммы целых положительных слагаемых, взяв сумму из нуля слагаемых). Производящую функцию для p_n можно разложить в бесконечное произведение (мы это уже упоминали, говоря о пентагональной теореме Эйлера в разделе 3):

7.9* Докажите, что $p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots$ можно представить как

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)\ldots$$

Здесь в k-й скобке стоит $1 + x^k + x^{2k} + \ldots$, то есть использованы все степени, кратные k (начиная с нулевой).

▷ Прежде всего заметим, что если нас интересует коэффициент при каком-то x^n, то скобки далеко справа не нужны (умножение на такую скобку добавляет только бóльшие степени и не влияет на этот коэффициент). Поэтому реально получается конечная сумма, смысл которой ясен и без дополнительных определений.

Чтобы получить в произведении множитель x^n, надо всевозможными способами выбрать из скобок члены, произведение которых равно x^n, то есть сумма степеней равна n. Это значит, что n надо представить в виде

$$\begin{aligned}&(\text{целое неотрицательное число}) + \\ &+ (\text{целое неотрицательное число, кратное } 2) + \\ &+ (\text{целое неотрицательное число, кратное } 3) + \ \ldots\end{aligned}$$

Целое неотрицательное число, кратное k, однозначно разбивается на слагаемые, равные k, и мы получаем представление n в виде суммы целых положительных слагаемых. Каждое представление получается один раз, так как в нём можно однозначным образом сгруппировать слагаемые, равные 1, потом слагаемые, равные 2 (получив кратное 2) и так далее. ◁

• Другими словами, p_n есть количество решений уравнения $n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots$ в целых неотрицательных числах (почти всех равных нулю).

$\boxed{\textbf{7.10}^*}$ Что изменится, если оставить в каждой скобке по два члена и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots$$

— производящая функция какой последовательности задаётся таким произведением?

▷ Получится производящая функция для числа разбиений на *различные* целые положительные слагаемые. ◁

$\boxed{\textbf{7.11}^*}$ Что изменится, если оставить в произведении предыдущей задачи только степени двойки и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^k})\ldots$$

▷ Получится

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

(производящая функция для последовательности из одних единиц). В самом деле, разложение в двоичной системе показывает, что всякое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы различных степеней двойки. ◁

▷ Можно пойти дальше и «вычислить» сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

мы это упоминали, говоря о пентагональной теореме, но в данный момент это нам ни к чему. ◁

$\boxed{\textbf{7.12}^*}$ Докажите, что *число разбиений на нечётные слагаемые равно числу разбиений на различные слагаемые*.

• Мы рассматриваем разбиения какого-то целого положительного числа в n сумму целых положительных слагаемых (без учёта порядка) с двумя видами ограничений: (а) все слагаемые нечётны; (б) все слагаемые различны. (Скажем, при $n = 6$ получаем разбиения $5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$ для нечётных слагаемых и 6, $5+1$, $4+2$, $3+2+1$ для различных слагаемых.)

▷ Всякое целое положительное число можно однозначно представить в виде произведения нечётного числа и степени двойки (вынося двойки, пока возможно). Будем (временно, в этой задаче) называть этот нечётный множитель «базой» исходного числа. Все целые положительные числа можно поделить на группы с данной базой:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots), (3, 6, 12, 24, 48, \dots), (5, 10, 20, 40, 80 \dots), (7, 14, 28, 56, \dots), \dots$$

Таким же образом можно сгруппировать сомножители в бесконечном произведении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^k)\dots,$$

получится произведение бесконечных произведений

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots(1+x^{2^k})\dots\\
&(1+x^3)(1+x^6)(1+x^{12})\dots(1+x^{3\cdot 2^k})\dots\\
&(1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{15})\dots(1+x^{5\cdot 2^k})\dots\\
&\dots
\end{aligned}$$

Первое из этих произведений мы уже видели и знаем, что оно равно

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots$$

Второе получается из первого заменой x на x^3 и потому равно

$$1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+\dots,$$

третье равно

$$1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+\dots,$$

и так далее. Получается часть бесконечного разложения для производящей функции произвольных разбиений, соответствующая разбиениям на нечётные слагаемые, что и требовалось. ◁

Это рассуждение выглядит удивительно (и требует обоснования законности наших действий), но его (в отличие от многих других рассуждений с производящими функциями) можно перевести на язык взаимно однозначных соответствий.

$\boxed{\textbf{7.13}^*}$ Пусть n — целое положительное число. Постройте взаимно однозначное соответствие между разложениями n на нечётные слагаемые и разложениями n на различные слагаемые.

▷ Возьмём разложение n на различные слагаемые. Каждое слагаемое заменим на много раз повторённую его базу (см. выше), получим разложение n на нечётные слагаемые. В другую сторону: если есть представление n как суммы нечётных слагаемых, сгруппируем равные слагаемые. Для каждого нечётного s получится некоторое кратное числа s, которое мы заменяем на сумму подходящих слагаемых среди $s, 2s, 4s, 8s, \ldots$ (разложив в двоичной системе множитель кратности), и получатся различные слагаемые. Несложно убедиться, что эти два преобразования взаимно обратны. ◁

$\boxed{\mathbf{7.14}^*}$ Покажите, что производящая функция для чисел Фибоначчи

$$T(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$$

удовлетворяет соотношению

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1$$

(если перемножить формально и привести подобные члены в бесконечной сумме).

▷ Первые несколько членов в произведении можно просто вычислить, и там всё сократится, кроме 1. Закон построения чисел Фибоначчи гарантирует, что и дальше всё будет сокращаться: мы умножаем 1 на $F_n x^n$, и вычитаем произведения x на $F_{n-1}x^{n-1}$ и x^2 на $F_{n-2}x^{n-2}$. ◁

▷ Отсюда можно заключить (особенно если забыть о смысле и обоснованиях), что $T(x) = 1/(1-x-x^2)$. Дальше можно разложить $(1-x-x^2)$ на линейные множители и затем разложить дробь типа $1/(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, как говорят математики, *в сумму простейших*, то есть в сумму $a_1/(x-\alpha_1) + a_2/(x-\alpha_2)$. Для этого полезно временно заменить числитель на $(x-\alpha_1)-(x-\alpha_2)$. После этого можно вспомнить, что дроби вида $1/(x-a)$ разлагаются в ряд, и получится формула для чисел Фибоначчи с суммой двух геометрических прогрессий. ◁

$\boxed{\mathbf{7.15}^*}$ Используя определение чисел Каталана с помощью рекуррентной формулы $C_0 = 1$,

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_k C_{n-1-k} + \ldots + C_n C_0,$$

напишите тождество для производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \ldots$$

(в него войдёт её квадрат).

▷ Возведя ряд в квадрат, мы увидим, что в $(C(x))^2$ будут те же коэффициенты, но со сдвигом: C_n будет коэффициентом при x^{n-1}. Поэтому

$$C(x) = 1 + x(C(x))^2.$$

(умножение на x компенсирует сдвиг коэффициентов). ◁

▷ Отсюда можно найти выражение с корнем для $C(x)$ по формуле квадратного уравнения. Если затем применить формулу бинома для этого квадратного корня (с полуцелым показателем), то можно получить формулу для чисел Каталана, которую мы доказали другим способом, с отражением ломаных. ◁

7.3. Комбинаторика и вероятности

Часто комбинаторные задачи формулируют в вероятностных терминах. Объясним на примере, как это делается.

Рассмотрим *вероятностный эксперимент*, состоящий в том, что мы трижды бросаем игральную кость и записываем, какое число (от 1 до 6) выпало. *Исходом* (результатом) такого эксперимента будет последовательность из трёх чисел от 1 до 6 (трёхбуквенное слово в шестибуквенном алфавите).

7.16* Считая все исходы равновероятными, определить вероятность событий «выпали три шестёрки», «выпала ровно одна шестёрка», «выпала хотя бы одна шестёрка».

• Другими словами, нужно найти отношения числа «благоприятных исходов» (подпадающих под описание события) к общему числу возможных исходов.

▷ Всего исходов $6^3 = 216$, «три шестёрки» — один из них, так что на первый вопрос ответ $1/216$.

Посчитаем исходы, где выпала ровно одна шестёрка. Они делятся на три группы — шестёрка на первом, втором и третьем месте. Если на первом месте шестёрка, а больше шестёрок нет, то для второго и третьего места есть 5^2 вариантов. Аналогично для всех других мест, в итоге получаем ответ $(3 \cdot 5^2)/216 = 75/216 \approx 34{,}7\%$

Наконец, надо подсчитать исходы, где есть хотя бы одна шестёрка. Тут проще посчитать дополнение — исходы, где нет ни одной шестёрки. Их $5^3 = 125$, остальных $216 - 125 = 91$, и искомая вероятность равна $91/216 \approx 42\%$. ◁

Можно проверить свою вероятностную интуицию, попытавшись сначала угадать ответ, а потом проверить.

7.17* Что вероятнее при шести бросаниях кубика — не выбросить ни одной шестёрки или выбросить хотя бы одну шестёрку?

▷ Вероятность не выбросить ни одной шестёрки равна $5^6/6^6 \approx 33\%$, поэтому выбросить хотя бы одну шестёрку почти вдвое вероятнее. ◁

▷ Вероятность 1/6 часто объясняется как «один из шести раз». Если бы действительно каждый шестой раз (через пять неудач) выпадала бы шестёрка, то при шести бросаниях она была бы наверняка. Но на деле вероятность совсем не близка к 1 (хоть и больше 50%). ◁

Примерно так же можно посчитать вероятность разных событий, связанных с лотереями и т.п. Скажем, во времена СССР была лотерея «Спортлото»[13], в которой играющий покупал карточку за 30 копеек (=0,3 рубля), на которой были написаны числа от 1 до 49. Он должен был зачеркнуть шесть из этих чисел, и отправить билет организаторам до определённого дня. После этого дня происходил «тираж», вероятностный эксперимент, где с помощью «лототрона» выбирались шесть (различных) выигрышных номеров от 1 до 49. Билет был выигрышным, если было хотя бы три общих номера (если больше, то выигрыш был больше).

$\boxed{\textbf{7.18}^*}$ Найдите вероятность выиграть в «Спортлото» ровно с тремя выигрышными номерами.

▷ Всего исходов C_{49}^6. Исходов, где ровно 3 выигрышных номера, из них $C_6^3 C_{43}^3$ (надо выбрать 3 цифры из шести включённых в билет, а также 3 цифры из 43 не включённых в билет). Поэтому ответ будет $C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6 \approx 1{,}7\%$. ◁

Во многих случаях комбинаторную задачу можно представить в вероятностных терминах.

$\boxed{\textbf{7.19}^*}$ Сто человек хотят уплатить по рублю, при этом у половины из них по рублёвой монете (оплата без сдачи), а у половины по двухрублёвой монете. Они становятся в очередь в случайном порядке. Какова вероятность того, что всем удастся расплатиться, если у кассира перед открытием кассы никакой сдачи нет?

▷ В каком случае им не удастся расплатиться? Если в какой-то момент у кассира не будет сдачи для очередного покупателя, то есть в начальном отрезке очереди от этого покупателя включительно больше двухрублёвых монет (которым нужен рубль сдачи), чем этих самых рублей. Поэтому количество благоприятных исходов (когда удалось расплатиться) — это число Каталана C_{50}, количество последовательностей нулей и единиц, у которых в любом начальном отрезке не меньше единиц, чем нулей, и оно равно $C_{100}^{50}/51$ при общем числе исходов C_{100}^{50}. Получаем, что искомая вероятность равна 1/51. ◁

[13]«Если вы не отзовётесь, мы напишем в Спортлото», пел Высоцкий.

• В этом решении есть деликатный момент. Оно предполагает, что исходом вероятностного эксперимента является последовательность из 50 рублей и 50 двухрублёвок. Вместе с тем слова «становятся в очередь в случайном порядке» естественно понимать иначе: исходом является перестановка клиентов, и их 100!. Но на ответ это не влияет: все перестановки разбиваются на группы, в которых результирующая последовательность монет общая, и в каждой группе $50! \cdot 50!$ монет (рублёвые монеты можно переставлять, и двухрублёвые тоже).

$\boxed{\textbf{7.20}^*}$ У Маши есть кубик, шесть граней которого окрашены в шесть разных цветов. Миша, будучи в гостях у Маши, решил сделать себе такой же кубик, и запомнил эти цвета (но не запомнил, как они располагались на кубике). Придя домой, он взял такой же кубик и случайным образом раскрасил его грани в те же шесть цветов. Какова вероятность, что у него получится точная копия кубика Маши? (Это значит, что кубик Миши можно так повернуть, чтобы цвета были точно такие же, как у Маши.)

▷ Исходами тут являются $6! = 720$ раскрасок кубика Миши. Надо понять, сколько из них благоприятных, то есть сколько разных кубиков можно получить вращениями кубика Маши. Это можно вычислить так: выберем какую-то одну грань кубика Маши. При вращении она может принять 6 положений, соответствующих шести граням кубика Миши. После того как положение этой грани фиксировано, есть четыре варианта поворота (при которых грань остаётся на месте, только поворачиваясь). Получаем ответ $6 \cdot 4/6! = 1/30$. ◁

▷ Математическая теория вероятностей не сводится к комбинаторике. Можно рассматривать неравновероятные исходы, или эксперименты с бесконечным числом исходов (где, скажем, исходом может быть точка на плоскости: «бросаем случайную точку в квадрат»). Помимо событий и вероятностей, центральную роль в теории вероятностей играют *случайные величины* и их *математические ожидания*. Даже если ограничиваться событиями, то появляется важное понятие *условной вероятности* и *независимости событий*.

На практике нас могут интересовать не точные значения вероятностей, а какие-то приближения для них, или оценки сверху. Скажем, получив какую-то астрономически малую вероятность для неблагоприятного стечения обстоятельств, мы можем это стечение обстоятельств не учитывать при планировании.[14] Одна из базовых верхних оценок — *закон больших чисел*. В простейшей ситуации он означает, что в дальних строках треугольника Паскаля основная

[14]А если оно потом произойдёт, например, потому, что наши вероятностные модели были неправильными, что ж — значит, случился «чёрный лебедь», как теперь модно говорить.

масса сосредоточена около их центра. Скажем, если мы просуммируем 1% всех чисел строки, стоящих в интервале вокруг середины, то их сумма составит больше 99% суммы всех чисел строки (соответствующей степени двойки). Можно изучать, как ведут себя числа в треугольнике Паскаля около середины — оказывается, что их график при правильном масштабе близок к графику функции $e^{-x^2/2}$ (гауссово, или нормальное распределение). И многое другое — мы привели только два простых примера.

В общем, математическая теория вероятностей — отдельная интересная наука, но начинается она с базовых комбинаторных задач, так что разобранные нами задачи — хорошее начало для знакомства с ней. $\triangleleft$

7.4. Литература

Материалы для школьников, популярные изложения

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев, *Введение в комбинаторику (по материалам лекций академика И. М. Гельфанда). Методические разработки для учащихся ВЗМШ*. Москва, 1989, `https://archive.org/details/combinatorics1989`

Сборник задач (часть с решениями), рассылавшийся ученикам Всесоюзной Заочной Математической Школы (организованной в середине 1960-х И. М. Гельфандом и его сотрудниками). Рассчитан на школьников с минимальной предварительной подготовкой.

В. А. Успенский, *Треугольник Паскаля*, 2-е изд., Москва, Наука, 1979 (Популярные лекции по математике, выпуск 43), `https://math.ru/lib/plm/43`.

По материалам лекции для школьников (в предисловии написано, что «Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы» — хотя это всё же небольшое преувеличение.) Начиная с рекуррентного определения треугольника Паскаля, Успенский обсуждает комбинаторный смысл его элементов, бином Ньютона и соотношения между биномиальными коэффициентами. (Попутно там поучительное обсуждение того, что значит «решить комбинаторную задачу».)

Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, Наука, 1969.

Разбираются разные комбинаторные задачи, большинство сформулировано в житейских терминах с элементами «оживляжа», но несмотря на такую «занимательность», разобрано много разных интересных (и не таких простых) вещей.

Н. Я. Виленкин, *Популярная комбинаторика*, Москва, Наука, 1975, https://math.ru/lib/book/djvu/combinatorika.djvu

Частично пересекается с предыдущей книгой (и сохраняет её стиль), но есть много нового материала, выходящего за рамки *перечислительной* комбинаторики.

Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, ФИМА, МЦНМО, 2006.

Содержит материалы двух предыдущих книг. Подготовлена к печати уже после смерти Н.Я. его сыном и внуком.

Журнал «Квант», http://www.kvant.info/, http://kvant.mccme.ru/

В разные годы публиковал много материалов о комбинаторике

С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс, *Математический дивертисмент*, Москва, МЦНМО, 2011.

Сборник рассказов на разные математические темы (в том числе комбинаторные); часть из них написана на основе статей авторов в «Кванте»ю

Е Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы*, Москва, МЦНМО, 2014, https://users.mccme.ru/smirnoff/papers/dubna14.pdf

Записки лекций, прочитанных в летней школе для школьников и студентов-младшекурсников.

Учебники для студентов и не только

Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Москва, Мир, 1990.

Классический учебник по перечислительной комбинаторике (первый том, переведённый на русский язык). Информация о втором томе и другие материалы: https://math.mit.edu/~rstan/ec/.

М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, Мир, 1970.

Не только перечислительная комбинаторика, но и многое другое.

С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях, 3-е изд., Москва, МЦНМО, 2007,
https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf

По материалам лекций, читавшихся автором в Независимом Московском университете.

Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика. Основание информатики*. Перевод Б. Б. Походзея и А. Б. Ходулёва под редакцией А. Б. Ходулёва. Москва, Мир, 1998,
`https://archive.org/details/Konkretnaya-matematika-Osnovaniye-informatiki-Grehem-Knut-Patashnik-1998`

Биномиальные коэффициенты и тождества для них — глава 5, производящие функции — глава 7.

8. Пентагональная теорема Эйлера

8.1. Формулировка

Мы уже упоминали (с. 41) пентагональную теорему Эйлера, которая утверждает, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\ldots$$

В правой части удивительным образом коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по формулам $k(3k \mp 1)/2$.

$\boxed{\mathbf{8.1}^*}$ Почему бесконечное произведение в левой части имеет смысл (не придётся складывать бесконечно много подобных членов)?

▷ Будем добавлять скобки по одной слева направо: при умножении на $(1-x^n)$ коэффициенты при степенях, меньших n, уже не меняются, так что они останутся такими навсегда. ◁

$\boxed{\mathbf{8.2}^*}$ Формула утверждает, что в бесконечном произведении все коэффициенты — плюс-минус единицы. Убедитесь, что для конечных произведений это не всегда так (могут появиться и другие коэффициенты, которые потом полностью или частично сократятся).

▷ При некотором терпении или с помощью компьютера можно вычислить несколько первых произведений и обнаружить, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10}.$$

(Первые три члена уже окончательные, а $2x^5$ потом сократится.) ◁

$\boxed{\mathbf{8.3}^*}$ Проверьте, что ту же самую формулу Эйлера можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

▷ Члены в правой части исходной формулы соответствуют значениям $k = 0,\ -1, 1,\ 2, -2,\ 3, -3,\ 4, -4,\ \ldots$; ещё можно отметить, что показатель степени всегда целый, так как $3k^2$ и k имеют одинаковую чётность. ◁

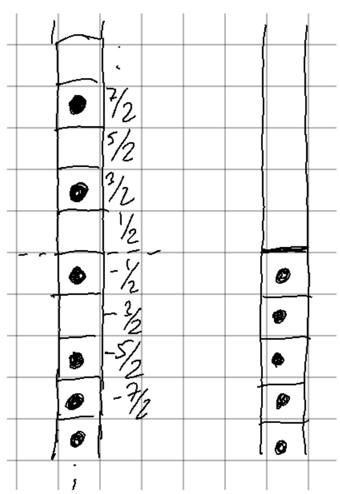
Одно из доказательств этой формулы использует комбинаторное соответствие, которое физики называют *бозонно-фермионным* — но его можно понять безо всякой физики (не считая терминологии).

8.2. Фермионы

Рассмотрим бесконечный вниз и вверх столб из коробок. Каждая коробка может быть пустой, или в ней может лежать шар (только один). При этом мы считаем, что все достаточно высокие коробки пусты, а все достаточно низкие (глубокие) заполнены. Будем называть такую конфигурацию (шаров в коробках) *состоянием*. Следуя физикам, будем называть коробки *уровнями*, а шары — *фермионами*. (Так называют частицы, которые не могут быть вместе на одном уровне, в отличие от *бозонов*, о которых ещё будет речь.)

Уровни можно нумеровать снизу вверх целыми числами, но нам будет удобно нумеровать их *полуцелыми* числами, и называть эти числа *энергией* фермиона на соответствующем уровне: у нас есть уровни с энергией $\ldots, -7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$. На рисунке слева показано состояние, где на положительных уровнях есть два фермиона с энергиями 3/2 и 7/2, а отрицательные уровни заполнены все, кроме одной дырки с энергией $-3/2$. На рисунке справа показано *основное состояние*, где все отрицательные уровни энергии заполнены, а все положительные — нет.

Из одного состояния можно получить другое, добавив шар, забрав шар или переложив шар с одного места на другое. Так можно перейти в любое другое состояние после конечного числа действий (напомним, что мы требуем, чтобы все достаточно высокие состояния были пусты, а все достаточно низкие заполнены).



$\boxed{\mathbf{8.4}^*}$ Нельзя говорить об общем количестве фермионов в состоянии или об их общей энергии, потому что получаются бесконечные суммы. Но можно определить *разницу* в количестве фермионов или энергии для двух состояний. Какова эта разница для двух состояний на рисунке? Как её определить в общем случае?

▷ Отбросим совпадающие хвосты сверху и снизу (с какого-то момента, с которого они совпадают), и сравним то, что осталось (количество фермионов и их суммарную энергию). Состояние слева имеет на $1 = 2 - 1$ фермион больше и энергию на $13/2 = 7/2 + 3/2 - (-3/2)$ больше, чем основное состояние справа. ◁

$\boxed{\mathbf{8.5}^*}$ Покажите, что разницы в предыдущей задаче (8.4) определены корректно в следующем смысле: если есть три состояния A, B, C, то разница между состояниями C и A равна сумме разниц между C и B и между B и A.

▷ Сравнивая два состояния, можно отбрасывать хвосты с любого места (совпадающие участки всё равно не повлияют), поэтому все три разницы можно вычислять, отбросив одни и те же далёкие хвосты. ◁

$\boxed{\mathbf{8.6}^*}$ У какого состояния энергия минимальна?

▷ У основного: от добавления фермиона сверху или удаления фермиона снизу (создания дырки) энергия станет только больше. ◁

Для удобства мы будем говорить о *количестве* фермионов или об *энергии*, приняв за точку отсчёта основное состояние, то есть в основном состоянии будем считать оба параметра равными нулю.

В отличие от энергии, количество фермионов (по сравнению с основным состоянием) может быть и отрицательным (возможно любое целое число).

Перекладывание шара (перемещение фермиона) с одного уровня на другой не меняет их количество, но меняет энергию (на некоторое целое число, разницы энергий между уровнями целые), добавление или удаление шара меняет и количество (на единицу), и энергию (на некоторое полуцелое число).

Разделяя положительные и отрицательные уровни, можно сказать, что число фермионов равно разнице между числом фермионов на положительных уровнях и числом дырок на отрицательных уровнях.

$\boxed{\mathbf{8.7}^*}$ Как изменится число фермионов в состоянии, если всю конфигурацию сдвинуть (как единое целое) вверх на один уровень? (Заметим, что при этом она останется корректной в смысле хвостов.)

▷ Увеличится на 1: это видно, если рассмотреть участок в середине, отбросив далёкие хвосты. В него войдет один фермион снизу и не выйдет ни одного фермиона сверху.

Можно объяснить это в терминах числа фермионов в верхней половине и числа дырок в нижней: в зависимости от того, что было на уровне $-1/2$, либо появится один фермион в верхней половине, либо пропадёт одна дырка в нижней. ◁

$\boxed{\mathbf{8.8}^*}$ Как изменится энергия основного состояния после сдвига на N уровней вверх? Покажите, что то же самое изменение будет и для любого состояния с нулевым числом фермионов.

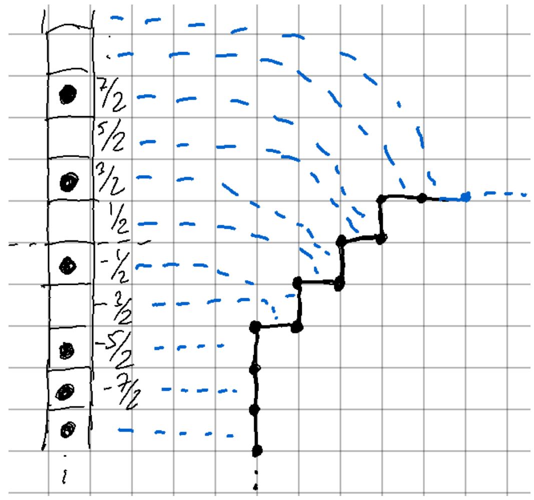
▷ Для основного состояния нужно просто вычислить сумму $1/2 + 3/2 + \ldots + (2N-1)/2 = N^2/2$ при положительных N, и тот же ответ (по аналогичным причинам) будет и для отрицательных N. Чтобы понять, что то же самое изменение будет для любого состояния с нулевым числом фермионов, можно сначала заполнить дырки снизу фермионами сверху, получив основное состояние, потом сдвинуть всё вверх на N, потом вернуть сдвинутые фермионы на свои места. Поскольку сдвиг фермиона на k уровней вверх увеличивает его энергию на k, независимо от того, где он находится, то изменения энергии на первом и третьем этапах сократятся. ◁

Всё сказанное даёт такую картину: если разбить состояния на классы, отличающиеся сдвигами, то в каждом классе есть одно «сбалансированное» состояние с нулевым числом фермионов, из которого все остальные получаются сдвигами: сдвиг на N вверх даёт состояние с N фермионами (поэтому состояния внутри класса можно однозначно задавать числом фермионов). Что касается энергий, то среди всех состояний класса минимальную энергию имеет состояние с нулевым числом фермионов, если сдвинуть его на N в любую сторону, то энергия возрастёт на $N^2/2$.

Классы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с диаграммами Юнга, и сейчас мы увидим, как это сделать.

8.3. Бозонно-фермионное соответствие

Пусть дано некоторое состояние, то есть способ заполнения уровней фермионами. Просматривая состояние снизу вверх, нарисуем ломаную на клетчатой бумаге: заполненный уровень соответствует шагу вверх, а пустой уровень соответствует шаг вправо.

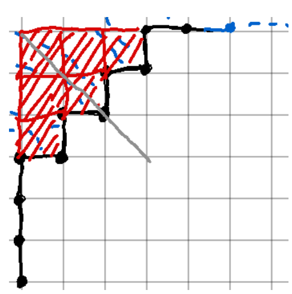


На картинке пунктиром показано, какой уровень какому звену ломаной соответствует.

Наше условие на состояния (что снизу с какого-то места всё заполнено, а сверху пусто) означает, что ломаная приходит вертикально снизу вверх, а уходит горизонтально вправо.

Наоборот, каждая такая ломаная из шагов вверх и вправо (приходящая вертикально снизу и уходящая горизонтально вправо) соответствует состоянию — вернее, состоянию с точностью до сдвига, потому что на ломаной не написано, где какие энергии. Чтобы задать состояние полностью, нужно ещё отметить, в каком месте ломаная переходит из зоны отрицательных энергий в зону положительных.

Глядя на такую картинку, хочется заделать откушенный угол, добавив недостающее:



Эта недостающая часть представляет собой диаграмму Юнга (мы говорили о них в разделе 7.1.1). Таким образом, каждому классу состояний (с точностью до сдвига) соответствует диаграмма Юнга, и это соответствие взаимно однозначно, как показывает следующая задача.

8.9* Как по диаграмме Юнга восстановить состояние (с точностью до сдвига)?

▷ Диаграмма Юнга естественно вписывается в прямой угол (с раструбом вправо-вниз). Граница и будет ломаной, соответствующей состоянию: мы идём снизу вверх по левой границе угла, обходим диаграмму по границе и потом уходим вправо в бесконечность по другой стороне угла. Шаги вверх и вправо соответствуют заполненным и пустым уровням. ◁

• Заметим, что мы восстановили состояние с точностью до сдвига — мы не указали, где кончаются отрицательные энергии и где начинаются положительные. (Так и должно быть, потому что сдвиг не меняет формы ломаной.)

8.10* Какая диаграмма соответствует основному состоянию?

▷ Пустая: мы сначала идём только вверх, а потом только вправо, так что от угла ничего не откушено. ◁

Несложно понять, где нужно поставить на ломаной точку перехода от отрицательных энергий к положительным, чтобы получить сбалансированное состояние (где фермионов сверху столько же, сколько дырок снизу) — ответ даёт следующая задача.

8.11* Докажите, что для сбалансированного состояния граница между отрицательными и положительными энергиями проходит на пересечении ломаной с биссектрисой прямого угла (которую мы заранее нарисовали).

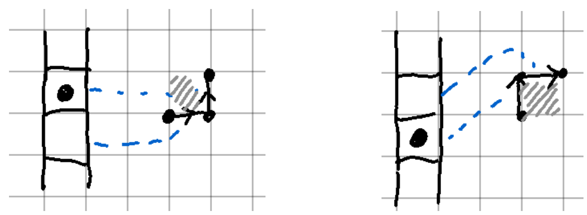
• Такое пересечение единственно: каждый шаг вверх или вправо приближает нас к биссектрисе, пока мы её не достигнем, а потом отдаляет от неё.

▷ Сдвиг вправо (от минус бесконечности до текущего момента) равен числу дырок снизу от границы, а последующий сдвиг вверх (от текущего момента до плюс бесконечности) равен числу фермионов сверху от границы — так что равенство достигается как раз на биссектрисе. ◁

Оказывается, что и энергия имеет ясный смысл в терминах диаграмм.

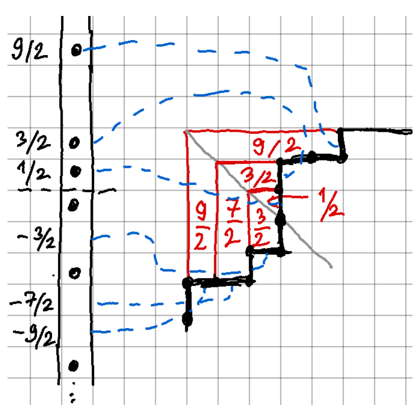
8.12* Докажите, что энергия сбалансированного состояния равна числу клеток в соответствующей диаграмме.

▷ Можно это понять, посмотрев на то, что происходит с энергией, числом фермионов и диаграммой, когда один из фермионов спускается в пустую клетку под ним. Энергия при этом уменьшается на 1 (все остальные фермионы остаются где были, а этот теряет единицу энергии). С другой стороны, ломаная начинает обходить сверху клетку, которую обходила снизу, и тем самым площадь диаграммы Юнга уменьшается тоже на единицу.



Так что если наше утверждение о равенстве энергии и числа клеток было верно до спуска, то оно останется верным и после, и наоборот. Будем повторять такие шаги, пока это возможно (есть заполненный уровень сразу над пустым). После этого получится состояние, где все заполненные уровни ниже пустых. Поскольку общее число частиц не меняется (и остаётся равным нулю по предположению сбалансированности), то получится основное состояние с нулевой энергией и пустая диаграмма, так что всё сходится. ◁

• Раз площадь диаграммы Юнга равна сумме энергий фермионов сверху и (минус) энергий дырок снизу, естественно спросить, нельзя ли прямо-таки разбить диаграмму на части, соответствующие этим слагаемым, и доказать равенство таким способом. Оказывается, что можно — пример такого разбиения показан на рисунке, где три фермиона в положительной части соответствуют трём трапециям сверху от биссектрисы (одна из которых вырождается в треугольник), а три дырки в отрицательной части — трём трапециям снизу.



8.4. Производящие функции и тройное тождество

После этой подготовки можно начать двигаться в сторону тождеств и пентагональной теоремы. Заметим, что каждому состоянию s (размещению фермионов по уровням) соответствуют два числа: число фермионов $N(s)$ и энергия $E(s)$ — обе величины берутся в сравнении с основным состоянием. Число $E(s)$ — целое, а $N(s)$ — полуцелое. Бывает, что для каких-то двух разных состояний значения E и N совпадают, так что все состояния делятся на группы. Нас интересует, сколько состояний будет в каждой группе.

В терминах производящих функций можно сказать так. Рассмотрим бесконечную сумму

$$\sum_s q^{E(s)} z^{N(s)}, \tag{$*$}$$

в которой суммирование происходит по всем состояниям s, и приведём в ней подобные члены.

8.13* Чему будет равен коэффициент при $q^e z^n$ в получившейся формальной (двумерной) сумме?

▷ Количеству разных состояний s, у которых $E(s) = e$ и $N(e) = n$, то есть количеству состояний с данным числом частиц и данной энергией. ◁

8.14* Докажите, что бесконечная сумма $(*)$ равна произведению

$$(1+q^{1/2}z)\cdot(1+q^{3/2}z)\cdot(1+q^{5/2}z)\cdot\ldots\cdot(1+q^{1/2}z^{-1})(1+q^{3/2}z^{-1})(1+q^{5/2}z^{-1})\cdot\ldots$$

• Это произведение состоит из двух бесконечных групп скобок. Его можно понимать так: мы «раскрываем скобки», то есть всевозможными способами выбираем в каждой скобке одно из слагаемых, причём неединицу можно выбрать только конечное число раз, и такие произведения складываем и приводим подобные члены. Заметим, что каждый неединичный множитель увеличивает степень q по крайней мере на $1/2$, так что подобных членов будет только конечное число.

▷ Это более или менее прямо следует из определения. Состояние определяется тем, какие есть занятые уровни в области положительных энергий и какие есть свободные уровни в области отрицательных энергий. Занятые положительные уровни соответствуют выбранным неединичным сомножителям в первом произведении, а свободные отрицательные уровни — во втором. При перемножении энергии занятых уровней (и минус энергии свободных уровней) суммируются в показателях степеней переменной q, а в показателях степеней переменной z происходит вычитание числа дырок в отрицательной зоне из числа фермионов в положительной зоне (для чего в отрицательной зоне у z степень -1). $\triangleleft$

В более компактной форме это бесконечное произведение можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)$$

Теперь вспомним о бозонно-фермионном соответствии и заметим, что в исходной сумме по всем состояниям можно сгруппировать состояния, отличающиеся сдвигом. Если мы знаем число частиц и энергию для сбалансированного состояния в этой группе, то после сдвига на N число частиц увеличится на N, а энергия увеличится на $N^2/2$. (Здесь N может быть любым целым числом; если оно отрицательно, то число частиц уменьшается, а энергия всё равно увеличивается.) Из одного слагаемого в сумме, соответствующего сбалансированному состоянию, получится двусторонний ряд слагаемых, получающихся из исходного умножением на

$$F=\sum_{N=-\infty}^{\infty}z^N q^{N^2/2}$$

Поэтому достаточно вычислить сумму для всех сбалансированных состояний, а потом результат умножить на F. А сбалансированные состояния в точности соответствуют диаграммам Юнга, у них число фермионов равно 0 (и переменную z в нулевой степени можно опустить), а энергия равна площади, так что сумма по сбалансированным состояниям равна

$$\sum_{y}q^{E(y)},$$

где сумма берётся по всем диаграммам Юнга, а $E(y)$ — число клеток (площадь) диаграммы y. В этой сумме коэффициент при q^e равен числу диаграмм Юнга из e клеток. Диаграммы Юнга из e клеток соответствуют разбиениям числа e на положительные слагаемые (как мы обсуждали в разделе 7.1.1), так что получается производящая функция для числа разбиений (задача 7.9), равная

$$(1+q+q^2+q^3+\ldots)(1+q^2+q^4+q^6+\ldots)(1+q^3+q^6+q^9+\ldots)\ldots$$

Суммируя бесконечные геометрические прогрессии, можно было бы записать последнее произведение как

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\ldots$$

но удобнее не выходить за пределы формальных рядов (избегая деления), так что можно умножить на обратное произведение

$$(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot(1-q^3)\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

чтобы оно сократилось с производящей функцией для числа разбиений. Собирая всё сказанное вместе, мы видим, что два различных способа вычисления суммы $(*)$ — непосредственный и с переходом к диаграммам Юнга — дают равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}z^Nq^{N^2/2}$$

Это тождество для рядов объединяет в себе бесконечное число тождеств, соответствующих равенству коэффициентов левой и правой частей при z^nq^e для всех пар (n,e), и называется «тройным тождеством Якоби».

▷ Это тождество было доказано Карлом Густавом Якобом Якоби (1804–1851) в 1829 году. Приведённое нами доказательство придумали ????? ◁

8.5. Доказательство пентагональной теоремы

Из тройного тождества легко вывести пентагональную теорему, надо только сделать несколько подстановок.

$\boxed{\textbf{8.15}^*}$ Что получится, если подставить в это тождество $z=-q^{-1/6}$?

▷ Подстановка даёт

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\cdot q^{-1/6}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\cdot q^{1/6}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}((-q)^{-1/6})^Nq^{N^2/2},$$

то есть

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{2}{3}}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-\frac{1}{3}}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}(-1)^Nq^{\frac{3N^2-N}{6}},$$

◁

Видно, что после такой подстановки в левой части есть три серии показателей степеней: целые положительные, они же минус 1/3 и они же минус 2/3.

$\boxed{\textbf{8.16}^*}$ Замените в этой формуле q на q^3, объедините эти три серии в одну и получите пентагональную теорему Эйлера.

▷ Просто объединение серий дало бы произведение по всем положительным степеням с шагом 1/3 (целые положительные числа, делённые на три). Если заменить q на q^3, то получится произведение по всем целым положительным степеням (а в правой части надо вместо 6 в знаменателе поставить 2). Получится

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{N=-\infty}^{\infty}(-1)^N q^{\frac{3N^2-N}{2}}$$

что отличается от приведённой выше формулы лишь названием переменной суммирования справа, а также тем, что вместо $3k^2+k$ стоит $3N^2-N$ с минусом (что исправляется заменой $N=-k$, поскольку справа сумма двусторонняя). ◁

• В этих рассуждениях мы свободно обращались с бесконечными суммами и произведениями, как если бы к ним были применимы обычные правила алгебры и не заботясь об обосновании этих действий. Но вообще-то тут недалеко и до абсурда. Скажем, если перемножать геометрические прогрессии и написать

$$\left(1+z+z^2+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right) = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{z}{1-(2z-z^2)},$$

затем в правой части воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии в обратную сторону, написав

$$-\frac{z}{1-(2z-z^2)} = -z(1+(2z-z^2)+(2z-z^2)^2+\ldots) = -z-2z^2-3z^3-\ldots,$$

а затем сравнить коэффициенты при разных степенях z в левой и правой части, то получится, что бесконечная сумма из единиц равна одновременно 0, -1, -2 и т. д. По-хорошему, конечно, надо внимательно следить, что все наши выражения имеют смысл (то есть что не получается бесконечного числа подобных членов) и что наши преобразования законны (скажем, что можно перемножать сомножители в любом порядке). Для нашего случая тут никаких принципиальных сложностей нет, но мы этого делать не будем.

После всего сказанного уже несложно понять, как связана пентагональная теорема с рекуррентным соотношением для чисел разбиений.

$\boxed{\textbf{8.17}^*}$ Выведите из пентагональной теоремы рекуррентное соотношение для количества T_n разбиений n на слагаемые

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

▷ Производящая функция для числа разбиений $T_0 + T_1 q + T_2 q^2 + T_3 q^3 + \ldots$ равна произведению

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots)(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \ldots)\ldots,$$

и если её домножить на произведение из пентагональной теоремы,

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \ldots,$$

умножая первую скобку на первую, вторую на вторую и так далее, получается 1. А сравнение коэффициентов при степенях в равенстве

$$(T_0 + T_1 q + T_2 q^2 + T_3 q^3 + \ldots)(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \ldots) = 1$$

как раз и даёт искомое рекуррентное соотношение. ◁

▷ Пентагональную теорему мы доказали, но кто такие бозоны? *Фермионы* для нас — шары, которые можно класть в коробки (уровни) с полуцелыми номерами (энергиями на соответствующих уровнях), причём в одну коробку помещается не больше одного шара (два фермиона не могут иметь одну энергию). Рассмотрим теперь столб из коробок, бесконечный только вверх (уровни $1, 2, 3, \ldots$) и при этом разрешим в каждый ящик класть сколько угодно шаров. Шары нового типа будем называть *бозонами*. Легко понять, что размещения бозонов с общей энергией E соответствуют разбиениям числа E: каждый бозон на уровне k соответствует слагаемому, равному k (и таких слагаемых может быть несколько, как бозонов в одном ящике — или может не быть вообще). А такие разбиения соответствуют диаграммам Юнга. На этом языке основной шаг доказательства можно изложить так: *каждому размещению фермионов с точностью до сдвига взаимно однозначно соответствует размещение бозонов* с энергией, равной минимальной энергии размещений фермионов среди всех сдвигов.

Как рассказывают физики, все элементарные (на самом деле — не только элементарные) частицы делятся на *бозоны* и *фермионы*. Согласно их теориям, бозоны — частицы с целым *спином* — переносчики взаимодействий. Важнейшим из бозонов для нас является *фотон* (квант света). Бозоны могут занимать одно и то же состояние, например один и тот же уровень энергии, даже если этот уровень *невырожден* (одномерен). А фермионы — частицы материи — имеют полуцелый спин. Например таковы *электроны*, и они не могут занимать один и тот же уровень энергии.

Как уточняют математики, состояния и бозонов, и фермионов описываются элементами *векторных пространств*. Но состояние со многими бозонами одной природы описывается элементом *симметрической алгебры* бозонного векторного пространства, тогда как состояние со многими фермионами — элементом *внешней алгебры* фермионного.

Идея, что частицы делятся на два класса (бозоны и фермионы) принадлежит основоположникам квантовой механики — Вольфгангу Паули, Альберту Эйнштейну, Полю Дираку, Энрико Ферми и Шатьендранату Бозе. Дирак, предложив своё уравнение для частиц с полуцелым спином, столкнулся с проблемой: согласно этому уравнению, энергия электрона не ограничена снизу. Это противоречит интуиции, так как роняя электрон на достаточно глубокий уровень, можно было бы получать сколько угодно энергии. Дирак предположил, что все уровни с отрицательной энергией — кроме, быть может, конечного числа — уже заняты. Такая конфигурация называется *морем Дирака*. Отсутствие частицы на отрицательном уровне может быть также интерпретировано, как наличие (анти)частицы с положительной энергией, так как для создания такого состояния необходимо эту энергию потратить. Так Дирак предсказал существование *позитрона* (1929) — а к 1932 году эти самые позитроны уже были обнаружены, за что Карл Дэвид Андерсон получил нобелевскую премию 1936 года (Дирак получил свою в 1933 году).

А что сделали вы? $\triangleleft$