On Game Interpretations of Intuitionstic Logic

Andrej Muchnik

Division of Cybernetics at Computing Center
of Russian Academy of Sciences

Int — интуиционистская логика высказываний.

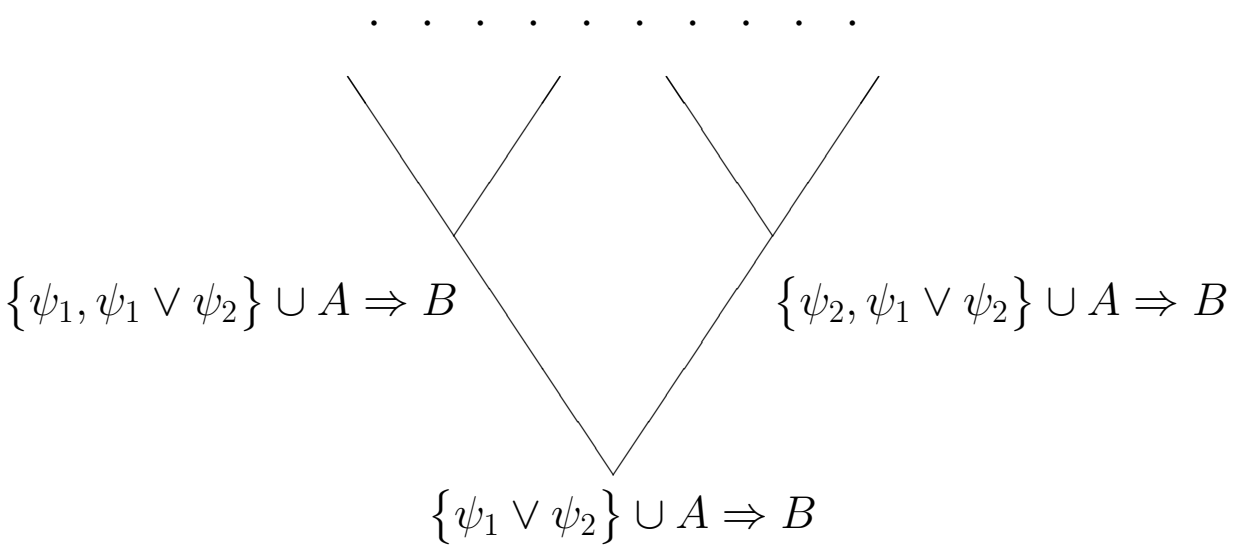
Исчисление секвенций $A \Rightarrow B$, где A и B — конечные множества пропозициональных формул.

Классическая теорема. $\vdash A \Rightarrow B$ *тогда и только тогда, когда* $(\bigwedge A \to \bigwedge B) \in \mathrm{Int}$.

($\bigwedge A$ обозначает конъюнкцию всех принадлежащих множеству A формул, $\bigwedge \emptyset$ обозначает тождественно истинную формулу $\top$.)

Вывод секвенции $A \Rightarrow B$ можно представлять себе как дерево, каждой вершине которого соответствует некоторая секвенция, а корню соответствует $A \Rightarrow B$.

Пример


$\{\psi_1, \psi_1 \vee \psi_2\} \cup A \Rightarrow B$
$\{\psi_2, \psi_1 \vee \psi_2\} \cup A \Rightarrow B$
$\{\psi_1 \vee \psi_2\} \cup A \Rightarrow B$

За счет свойства подформульности высота дерева вывода ограничена полиномом от размера корневой секвенции. Отсюда видно, что выводимость секвенции эквивалентна наличию выигрышной стратегии у первого игрока в следующей полиномиальной игре.

Игрок I старается доказать выводимость секвенции $A \Rightarrow B$. Он указывает пару новых секвенций $C_1 \Rightarrow D_1$, $C_2 \Rightarrow D_2$, которые, *по его мнению*, выводимы и из которых *за один шаг* выводима секвенция $A \Rightarrow B$, причем $A \subseteq C_i$, $B \subseteq D_i$, $i = 1,\ 2$.

Игрок II старается опровергнуть выводимость секвенции $A \Rightarrow B$. Он указывает ту из секвенций $C_1 \Rightarrow D_1$, $C_2 \Rightarrow D_2$, которая, *по его мнению*, невыводима.

Если игрок I отказывается делать ход, то он выигрывает, если $A \Rightarrow B$ является аксиомой, и проигрывает в противном случае.

Очевидно, корректность хода и выигрышность (проигрышность) конечной позиции полиномиально разрешимы.

В сентябре 2005 года в Москве прошла международная конференция «Computer Science Applications of Modal Logic», на которой И. Межиров предложил новую игровую семантику для Int. Ее положительное отличие от вышеописанной игры состоит в том, что все позиции являются секвенциями, а не парами секвенций.

Докладчик предлагает более наглядную игру, со-

храняющую вышеуказанные свойства. Сейчас эта игра будет определена.

Игра «взаимной вежливости»

Начальная позиция — $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$.

- Ход I игрока — $\emptyset \Rightarrow B_1, \quad \varphi \in B_1$
  (по мнению I игрока, B_1 — максимальное множество, для которого $\vdash \emptyset \Rightarrow B_1$).
- Ход II игрока — $A_1 \Rightarrow B_1$
  (по мнению II игрока, A_1 — максимальное множество, для которого $\nvdash A_1 \Rightarrow B_1$.)

. . . . . .

- Ход I игрока — $A_{n-1} \Rightarrow B_n, \quad B_{n-1} \subsetneq B_n$
  (по мнению I игрока, B_1 — максимальное множество, для которого $\vdash A_{n-1} \Rightarrow B_n$).
- Ход II игрока — $A_n \Rightarrow B_n, \quad A_{n-1} \subsetneq A_n$.
  (по мнению II игрока, A_n — максимальное множество, для которого $\nvdash A_n \Rightarrow B_n$).

Отказ от хода одного из игроков — конец игры.

Лемма. *Множество выводимых секвенций $A \Rightarrow B$, в которых B максимально, отделимо за полиномиальное время от множества невыводимых секвенций $C \Rightarrow D$, в которых C максимально.* $\square$

Известные алгоритмы отделения множества выводимых секвенций от множества невыводимых секвенций работают на полиномиальной зоне, но за экспоненциальное время.

Теорема. *Пропозициональная формула φ принадлежит Int тогда и только тогда, когда I игрок имеет выигрышную стратегию в игре «взаимной вежливости».* $\square$