Детерминизация ординальных автоматов

Мы будем пользоваться принятым в теории множеств определением ординалов из которого следует, что каждый ординал совпадает с множеством меньших ординалов.

Пусть Σ — конечный алфавит, а ρ — ординал, больший нуля. Назовем ρ-словом в алфавите любое отображение $\alpha\colon \rho \setminus \{0\} \longmapsto \Sigma$ (по техническим причинам нам удобно исключить ноль). ρ-слова будем называть ординальными словами. Таким образом, ω-слова — это в общепринятой терминологии сверхслова.

Ординальным автоматом или, кратко, автоматом называется шестерка $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, T, F_1, F_2)$, где Q — конечное множество состояний автомата, Σ — входной алфавит автомата, $q_0 \in Q$ — начальное состояние автомата, $T \subset Q * \Sigma * Q \bigcup P(Q) * \Sigma * Q$ — множество переходов автомата, $F_1 \subset Q$ — множество заключительных состояний автомата, $F_2 \subset P(Q)$ — множество заключительных макросостояний автомата. Переходы вида (q_0, a, q_0'), $q_0, q_0' \in Q$ будем называть непредельными переходами, а переходы вида (A, a, q_0'), $A \subset Q$, $q_0' \subset Q$ — предельными переходами.

Определим способ функционирования автомата $\mathcal{A}$ на ρ-слове α в алфавите Σ — входном алфавите $\mathcal{A}$.

Предходом автомата $\mathcal{A}$ на α называется любое отображение $H\colon \longmapsto Q$. Пределом предхода H называется limit $H \rightleftharpoons \{q \in Q \mid \forall k < \rho\, \exists n < \rho\, (n > k \;\&\; H(n) = q)\}$. Слово “предел” будет употребляться в работе и в обычном смысле, поэтому для предела предхода мы выбрали нестандартное обозначение “limit”.

Предход $H\colon \rho \longmapsto Q$ называется ходом автомата $\mathcal{A}$ на α если выполнены 3 условия:

H1. $H(0) =$ начальное состояние автомата $\mathcal{A}$.

H2. Для всех $n < \rho$ тройка $(H(n), \alpha(n+1), H(n+1))$ является переходом автомата $\mathcal{A}$.

H3. Для любого предельного ординала $\sigma < \rho$ тройка $(\operatorname*{limit}_{h \to \sigma}(H|\sigma),\ \alpha(\sigma),\ H(\sigma))$ является переходом автомата $\mathcal{A}$.

Возможный ход автомата $\mathcal{A}$ на ρ-слове α является допускающим ходом, если выполнено условие

H4. $H(\rho - 1)$ — заключительное состояние $\mathcal{A}$ если ρ — непредельный ординал и $\operatorname*{limit}_{h \to rho} H$ — заключительное макросостояние $\mathcal{A}$ если ρ — предельный ординал.

Автомат называется детерминированным, если для любых $q \in Q$, $a \in \Sigma$ существует единственное q' такое, что $(q, a, q') \in T$ и для любых $A \subset Q$, $a \in \Sigma$ существует единственное q' такое, что (A, a, q') — переход

$\mathcal{A}$.

Ясно, что детерминированный автомат на каждом ординальном слове имеет ровно один возможный ход. На рисунке изображен схематически ход автомата на ρ-слове α для непредельного ρ.

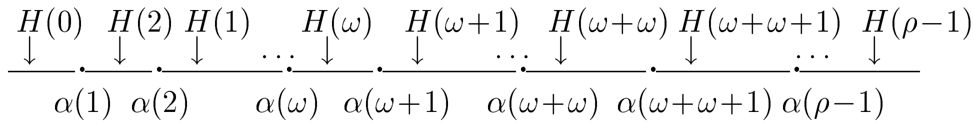

Рис. 1

Пусть H — ход детерминированного автомата $\mathcal{A}$ на ρ-слове α. Для $n < \rho$ состояние $H(n)$ будем называть состоянием автомата $\mathcal{A}$ после прочтения n первых букв α.

Скажем, что автомат $\mathcal{A}$ допускает ординальное слово α, если существует допускающий ход $\mathcal{A}$ на α. Ординальные автоматы назовем ρ-эквивалентными, если они допускают одни и те же ρ-слова.

ТЕОРЕМА. *Для любого ординального автомата $\mathcal{A}$ существует детерминированный ординальный автомат $\mathcal{B}$, ρ-эквивалентный $\mathcal{A}$ для всех счетных ординалов ρ. Автомат $\mathcal{B}$ можно построить по $\mathcal{A}$, причем количество состояний $\mathcal{B}$ есть $2^{2^{O(N)}}$, где N — количество состояний $\mathcal{A}$.*

Все дальнейшее является доказательством этой теоремы. Зафиксируем автомат $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \ldots)$.

Прежде чем определить автомат $\mathcal{B}$, мы введем некоторые понятия и докажем некоторые леммы.

Пусть ρ — счетный ординал, больший нуля, а α это ρ-слово. Зафиксируем ρ и α. Это мы делаем потому, что большинство вводимых понятий будет зависеть от α и они будут громоздкими, если эту зависимость учитывать. Конструкция автомата $\mathcal{B}$, разумеется, никак от ρ и α зависеть не будет.

Назовем точкой любую пару (i, q), $i < \rho$, $q \in Q$. Точку $(0, q_0)$ назовем исходной. Назовем предельным (соответственно, непредельным) путем отображение P вида $P\colon [m,k] \longmapsto Q$, где $m, k < \rho$, $m \le k$, $[m,k] \rightleftharpoons \{i < \rho \mid m \le i \le k\}$ (соответственно вида $P\colon [m,k[\longmapsto Q$, где $m, k < \rho$, $m < k$, k — предельный, $[m,k[\rightleftharpoons \{i < \rho \mid m \le i < k\}$), удовлетворяющие свойству Н2 для всех $\sigma \in [m, k-1]$ (соответственно, $\sigma \in [m,k[$) и свойству Н3 для всех $\sigma \in [m+1, k]$ (соответственно, $\sigma \in [m+1, k[$). Конечные и бесконечные пути будем называть просто путями. Множество $[m,k]$ (соответственно $[m,\sigma[$) назовем областью определения пути. Точку $(m, P(m))$ назовем началом пути, m начальным моментом пути, а $P(m)$ — первым состоянием пути, точку $(k, P(k))$

назовем концом пути, k последним моментом пути, а $P(k)$ последним состоянием пути (в случае конечного пути). Пути с областью определения M будем также называть M-путями. В случае бесконечного пути ординал σ назовем верхней гранью P. Если P — $[m, k]$-путь, то будем также говорить, что P — путь из точки $(m, P(m))$ в точку $(k, P(k))$, или P соединяет $(m, P(m))$ с $(k, P(k))$.

Скажем,что точка (n, q) достижима из точки (m, q'), если имеется путь из (m, q') в (n, q). Скажем, что M-путь P не выходит за пределы макросостояния A, если $\forall n \in M\ P(n) \in A$. Пусть P_1 — конечный путь, а P_2 — любой путь, начало которого равно концу пути P_1. Очевидным образом определяется конкатенация $P_1 P_2$ путей P_1 и P_2.

Первым основным понятием является понятие пучка путей или просто пучка. Пучком называется любая тройка $\Pi = (i, q, A)$, где $i < \rho$, $q \in Q$, $A \subset Q$, и точка (i, q) достижима из исходной точки. Точку (i, q) назовем началом пучка Π, а ординал i — начальным моментом пучка, q — начальным состоянием пучка, множество A — ограничителем пучка Π. Множеством точек пучка Π назовем множество $T(\Pi)$ всех точек (n, q'), для которых существует путь из начала пучка Π в (n, q'), не выходящий за пределы ограничителя пучка Π. Множество $T_n(\Pi) = \{(n, q) \mid (n, q) \in T(\Pi)\}$ назовем n-м сечением пучка Π, а множество $Q_n(\Pi) = \{q \mid (n, q) \in T(\Pi)\}$ назовем множеством состояний пучка Π в момент n. Скажем, что путь P принадлежит пучку Π, если начало пути P принадлежит $T(\Pi)$ и P не выходит за пределы ограничителей пучка Π.

Будем пользоваться "$*$-символикой". Символ $*$ на месте некоторого параметра обозначает, что этот параметр может быть любым. Например $[*, n]$-путь — это любой путь с последним моментом n, пучок $(*, *, A)$ — любой пучок с ограничителем A и т.д.

Теперь определим другие два основных понятия: "n есть момент сброса пучка Π" и "накопление точки (n, q) относительно пучка Π", или кратко "Π-накопление (n, q)". Но сначала определим Π-накопление пути. Пусть $\Pi = (i, q, A)$ пучок. Зафиксируем некоторый линейный порядок на множестве Q. Пусть $q_1, \ldots, q_{|A|}$ — состояния из A, занумерованные по порядку на Q. Π-накопление пути P: $M \longmapsto Q$ это такое максимальное число $m \leq |A|$, что существуют $i_1, \ldots, i_m \in M$ такие, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ и $P(i_1) = q_1, \ldots, P(i_m) = q_m$. Если таких m нет вовсе, то накопление P равно 0. Вообще далее максимум элементов пустого множества считается равным 0.

Перейдем к обещанным определениям. Пусть $n \geq i$, $(n, q) \in T(\Pi)$.

1) Π-накопление точки (n, q) равно наибольшему из накоплений таких путей P, ведущих в (n, q), принадлежащих пучку Π, что множество

[начальный момент P; n[не содержит моментов сброса пучка Π.

2) n является моментом сброса пучка Π, или просто сбросом Π, если Π-накопления всех точек из $T_n(\Pi)$ равны $|A|$, т.е. максимальны. Будем говорить в таком случае, что Π имеет в момент n максимальное накопление.

Это является корректным определением трансфинитной индукцией по n.

Нам будет удобнее распространить понятие Π-накопления на все точки, положив Π-накопление точки (n,q), не принадлежащей $T(\Pi)$, равным -1.

Следующая лемма, связывающая существование пути с заданным пределом A с существованием пучка с неограниченным множеством сбросов, является основной для работы. Подмножество $B \subset \sigma$ назовем неограниченным в σ, если $\forall k < \sigma\, \exists n < \sigma\, (n > k, n \in B)$.

ЛЕММА 1. *Пусть σ — счетный предельный ординал, $\sigma \leq \rho$, и $A \subset Q$.*

1) *Если P — это $[*, \sigma[$-путь с пределом A, начальная точка которого достижима из исходной, то существует такое $k < \sigma$, что при всех $n \geq k$, $n < \sigma$ пучок $(n, P(n), A)$ имеет неограниченное в σ множество сбросов.*

2) *Если пучок $\Pi = (*, *, A)$ имеет неограниченное в σ множество сбросов, то существует $[*, \sigma[$-путь с пределом A, принадлежащий пучку Π.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве все переменные $n, k, m, n_1, n_2, \ldots$ пробегают множество ординалов, меньших σ.

1) Пусть $P\colon [n_0, \sigma[\longmapsto Q$ — путь с пределом A и точка $(n_0, P(n_0))$ достижима из исходной. Возьмем $n_1 > n_0$ такое, что $\forall n \geq n_1\, P(n) \in A$. На множестве $[n_1, \sigma[$ рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $i \sim j$, если найдется $n \geq i, j$ такое, что $Q_n(i, P(i), A) = Q_n(j, P(j), A)$. Отношение $\sim$ транзитивно, поскольку, если Π_1 и Π_2 имеют одинаковые ограничители, то $Q_n(\Pi_1) = Q_n(\Pi_2)$ влечет $Q_k(\Pi_1) = Q_k(\Pi_2)$ для всех $k \geq n$. Докажем, что $i \sim k$ и $i < j < k$ влечет $i \sim j \sim k$. Скажем, что пучок $\Pi_2 = (i_2, q_2, A_2)$ является потомком пучка $\Pi_1 = (i_1, q_1, A_1)$, если $A_2 \subset A_1$, $(i_2, q_2) \in T(\Pi_1)$. Это определение мы будем использовать и за пределами леммы 1.

Очевидно, что если Π_2 — потомок Π_1, то $T(\Pi_2) \subset T(\Pi_1)$. Пусть $i \sim k$, $i < j < k$. Положим $\Pi_1 = (i, P(i), A)$, $\Pi_2 = (j, P(j), A)$, $\Pi_3 = (k, P(k), A)$.

Для $m, n \geq n_1$ точки $(m, P(m))$, $(n, P(n))$ соединимы путем, не выходящим за пределы A (именно частью пути P), следовательно Π_2 — потомок Π_1, а Π_3 — потомок Π_2. Значит для всех $n \geq k$ $Q_n(\Pi_3) \subset Q_n(\Pi_2) \subset Q_n(\Pi_1)$, но так как при всех достаточно больших n

$Q_n(\Pi_3) = Q_n(\Pi_1)$, мы получаем $i \sim j \sim k$. Поэтому каждый класс эквивалентности имеет вид $[m, n[$ или $[m, \sigma[$. Докажем, что число классов эквивалентности конечно и, следовательно, существует класс эквивалентности вида $[m, \sigma[$. Допустим, число классов эквивалентности больше $|A|$. Тогда существуют неэквивалентные $k_1 < k_2 \ldots < k_{|A|+1}$. В последовательности $\Pi_1 = (k_1, P(k_1), A), \ldots, \Pi_{|A|+1} = (k_{|A|+1}, P(k_{|A|+1}), A)$ каждый пучок является потомком предыдущего, следовательно для $n = k_{|A|+1}$ выполнено $Q_n(\Pi_1) \subset Q_n(\Pi_2) \subset \ldots \subset Q_n(\Pi_{|A|+1}) \subset A$. Последнее невозможно так как все $Q_n(\Pi_j)$ должны быть различны.

Итак, мы доказали, что существует наибольший класс эквивалентности, т.е. для некоторого n_2, все ординалы большие n_2, эквивалентны. Очевидно, можно считать $n_2 \geq n_1$.

Докажем, что при всех $n \geq n_2$ пучок $(n, P(n), A)$ имеет неограниченное в σ множество сбросов. Допустим противное: при некотором $n_3 > n_2$ пучок $\Pi = (n_3, P(n_3), A)$ имеет ограниченное в σ множество сбросов, т.е. существует $n_4 > n_3$ такое, что никакое $n \geq n_4$ не является моментом сброса Π. Так как предел P равен A, существует такое $n_5 > n_4$, что Π-накопление пути $P = P|[n_4, n_5]$ равно $|A|$.

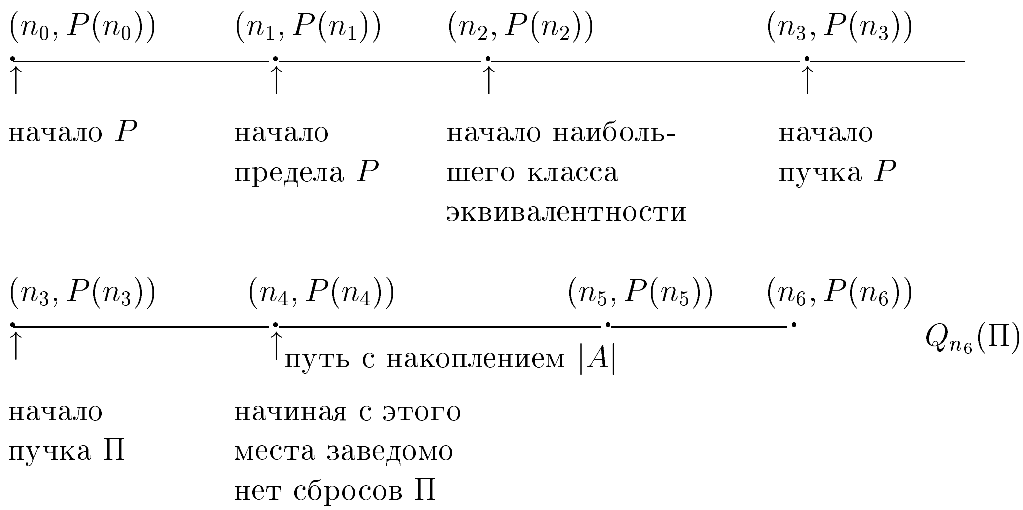

Рис. 2

Поскольку $n_3 \sim n_5$, существует такое $n_6 > n_5$, что $Q_{n_6}(\Pi) = Q_{n_6}(n_5, P(n_5), A)$. Докажем, что накопление пучка Π в момент n_6 максимально. Пусть (n_6, q) — произвольная точка $T_{n_6}(\Pi)$. Докажем, что Π-накопление точки (n_6, q) равно $|A|$. Так как отрезок $[n_4, n_6]$ не содержит сбросов пучка Π, достаточно указать $[n_4, n_6]$-путь в пучке Π с накоплением $|A|$ и последним состоянием q. Этот путь будет конкатенацией путей P_1 и P_2, где P_1 — это $P|[n_4, n_5]$, а P_2 — любой путь в пучке П, соединяющий $(n_5, P(n_5))$ и (n_6, q). Такой путь существует, поскольку $q \in Q_{n_6}(\Pi)$ и $Q_{n_6}(\Pi) = Q_{n_6}(n_5, P(n_5), A)$. Следовательно, $q \in Q_{n_6}(n_5, P(n_5), A)$.

2) Пусть пучок $\Pi = (n_0, q_0, A)$ имеет неограниченное в σ множество сбросов. Так как σ — счетный ординал, существует возрастающая последовательность $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, \ldots$ моментов сброса пучка П, неограниченная в σ. Для каждого $i \geq 1$ и каждого $q \in Q_{n_{i+1}}(\Pi)$ существует $[n_i, n_{i+1}]$-путь P в пучке П с последним состоянием q и n-накоплением $|A|$. Зафиксируем один такой путь и обозначим его $P_{i+1,q}$. Для каждого $q \in Q_{n_1}(\Pi)$ зафиксируем в n некоторый путь, соединяющий точку (n_1, q) с началом пучка. Обозначим этот путь $P_{1,q}$. Докажем, что существует бесконечная конкатенация $P = P_{1,q_1}P_{2,q_2}\ldots P_{i,q_i}\ldots$, где $q_i \in Q_{n_i}(\Pi)$. Тогда P очевидно имеет верхнюю грань σ и предел A и принадлежит П.

Применим лемму Кенига, утверждающую, что любое бесконечное дерево с конечными степенями вершин имеет бесконечную ветвь. В нашем случае вершины дерева — это последовательность путей вида $\{(n_0, q_0)\}, P_{1,q_1}, \ldots, P_{i,q_i}$, где для всех $j < i$ конец P_{j,q_j} равен началу $P_{j+1,q_{j+1}}$, и пары вида $(\{(n_0, q_0)\}; P_{1,q})$. Ребра соединяют последовательности с их продолжениями на один член. Степени вершин ограничены $|A| + 1$. Корень — это $\{(n_0, q_0)\}$. Дерево бесконечно, потому что для всех $i \geq 1$, $q \in Q_{n_i}(\Pi)$ можно построить, двигаясь от конца к началу, путь вида $P_{1,q_1}P_{2,q_2}\ldots P_{i,q_i}$ с $q_i = q$, Бесконечная ветвь в этом дереве и есть нужный нам путь.

Лемма доказана.

Пусть $n \leq \rho$. Назовем $\leq n$-пучком (соответственно, $< n$-пучком) любой пучок с начальным моментом $\leq n$ (соответственно $< n$). На $\leq n$-пучках (соответственно, $< n$-пучках) введем понятие $\leq n$-эквивалентности (соответственно, $< n$-эквиваленьности). Пусть $\Pi_1 = (i_1, q_1, A_1)$, $\Pi_2 = (i_2, q_2, A_2)$. Тогда $\Pi_1 \equiv_{\leq n} \Pi_2$ (соответственно $\Pi_1 \equiv_{\leq n} \Pi_2$), если выполнены условия

E1. $A_1 = A_2$.

E2. $\exists m \leq n$ (соответственно $m < n$) такое, что $m \geq i_1, i_2$ и $Q_m(\Pi_1) = Q_m(\Pi_2)$. Для случая $\leq n$-эквивалентности это просто означает, что $Q_n(\Pi_1) = Q_n(\Pi_2)$.

$< n$-эквивалентность мы будем рассматривать только для предельных n.

Определим на пучках полный порядок. Для этого линейно упорядочим любым способом пары вида (состояние $\mathcal{A}$, макросостояния автомата $\mathcal{A}$).

Скажем, что $\Pi_1 < \Pi_2$, если $i_1 < i_2$, или $i_1 = i_2$ и $(q_1, A_1) < (q_2, A_2)$.

Назовем $\leq n$-пучок (соответственно, $< n$-пучок) $\Pi \leq n$-минимальным (соответственно, $<$ n-минимальным), если не существует меньшего П пучка, $\leq n$-эквивалентного (соответственно, $< n$-эквивалентного) пучку П. Обозначим $M \leq n$ (соответственно $M < n$) множество всех $\leq n$-минимальных $\leq n$-пучков (соответственно, $< n$). Очевидно, оба множества конечны.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть n — предельный ординал, $\sigma \leq \rho$ и пусть $A \subset Q$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Существует возможный ход $\mathcal{A}$ на σ-слове $\alpha|\sigma$ с пределом A.*

(2) *Существует $< \sigma$-минимальный пучок с ограничителем A и неограниченным в σ множеством сбросов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) следует непосредственно из леммы 2.

Импликация (2) $\Longrightarrow$ (1) следует из леммы 1 и следующего очевидного замечания: Если два пучка $< \sigma$-эквивалентны и один из них имеет неограниченное в σ множество сбросов, то и множество сбросов другого неограничено в σ.

Теперь мы можем перейти к построению детерминированного автомата $\mathcal{C}$, ρ-эквивалентного $\mathcal{A}$ для всех счетных ординалов ρ. Сначала рассмотрим простейший нетривиальный случай $\rho = \omega$. Построим автомат $\mathcal{C}'$, эквивалентный $\mathcal{A}$ на ω-словах.

Первым делом мы, не определяя ни множества состояний $\mathcal{C}'$, ни переходов $\mathcal{C}'$, укажем в какое состояние $\mathcal{C}'$ должен перейти после прочтения n первых букв ω-слова α. Неформально, в момент n автомат $\mathcal{C}'$ хранит следующую информацию.

1) Множество D_n всех состояний, достижимых в момент n (т.е. таких состояний q, что точка (n, q) достижима из исходной точки).

2) Для каждого $\leq n$-минимального пучка П автомат $\mathcal{C}$ хранит ограничитель П, $Q_n(\Pi)$ и П-накопления в момент n состояний из $Q_n(\Pi)$. Назовем тройку (ограничитель П, $Q_n(\Pi)$, $f_{n,\Pi}$), где $f_{n,\Pi}$ — график функции П-накопления состояния q в момент n, n-срезом пучка П, и обозначим $I_n(\Pi)$.

3) Границу неподвижности в момент n, определяемую следующим образом. Номер элемента x в конечном линейно упорядоченном множестве X определяется стандартным образом: нумерация начинается с 1 и элементы нумеруются по порядку. Скажем, что пучок П из $M_{\leq n}$ (напомним, $M_{\leq n}$ — множество $\leq n$-минимальности пучков) подвижен в момент n, если $\Pi \notin M_{\leq n}$ или номер П в $M_{\leq n}$ не равен номеру П в $M_{\leq n}$ (а значит, меньше). Пусть $\Pi_1, \dots, \Pi_m$ — все пучки из $M_{\leq n}$, занумерованные по порядку.

Границей неподвижности в момент n назовем максимальное такое l, что все пучки $\Pi_1, \dots, \Pi_l$ неподвижны в момент n. Обозначим границу неподвижности в момент n через γ_n. Итак, определим формально состояние, в которое автомат $\mathcal{C}'$ должен перейти после прочтения $\alpha(1)\dots\alpha(n)$. Назовем n-представлением последовательность $K_n = (D_n, I_n(\Pi_1), \dots, I_n(\Pi_m), \gamma_n)$, где $\Pi_1, \dots, \Pi_m$ — все $\leq n$-минимальные пучки, занумерованные по порядку. После прочтения $\alpha(1)\dots\alpha(n)$ автомат должен перейти в состояние равное n-представлению.

Определим множество состояний автомата $\mathcal{C}'$. Назовем срезом любую тройку вида (A, S, f), где $A \subset Q$, $S \subset A$, $f\colon \longmapsto \{0, \dots, |A|\}$. Срез имеет максимальное накопление, если $\forall s \in S\, f(1) = |A|$. Срезы (A_1, S_1, f_1) и (A_2, S_2, f_2) эквивалентны, если $A_1 = A_2$, $S_1 = S_2$. Множество состояний автомата $\mathcal{C}'$ состоит из всех последовательностей вида $K = (D, I_1, \dots, I_m, \gamma)$, где

П1. $D \subset Q$

П2. $\forall j \leq m\ I_j$ является срезом

П3. $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \leq m$

П4. Для всех $j, k \leq m$, $j <> k$ срезы A_j и A_k не эквивалентны.

Из-за свойства П4 число сотояний $\mathcal{C}'$ конечно. Верхнюю границу $2^{2^{O(N)}}$ мы докажем в общем случае. Состояния автомата $\mathcal{C}$ будем называть представлениями. Последовательности, удовлетворяющие свойствам П1-П3 назовем полупредставлениями. Срез I_j будем называть j-м срезом представления (состояния) K а множество $\{I_1 \dots I_m\}$ назовем множеством срезов представления K. Множество D будем называть множеством достижимых состояний представления K, а множество $\{I_1, \dots, I_{\sigma_n}\}$ назовем зоной неподвижности представления K. Число γ назовем границей неподвижности представления K.

Теперь определим множество переходов $\mathcal{C}'$ так, чтобы прочитав $\alpha(1)\dots\alpha(n)$, автомат $\mathcal{C}'$ перешел в состояние, равное n-представлению.

Начальное состояние $\mathcal{C}'$ — это последовательность $(D, I_1, \dots, I_m, \gamma)$, где $D = \{q_0\}$, q_0 — начальное состояние $\mathcal{A}$, $\gamma = 0$, $I_1, \dots, I_m$ — все срезы вида $(A, \{q_0\}, \sigma_{A,q_0})$, где $q_0 \in A \subset Q$,

$$\sigma_{A,q}\colon \{q\} \longmapsto \mathbb{N},\ \sigma_{A,q}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \text{ первый элемент} A; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

занумерованы по порядку: $(A, \{q_0\}, \sigma_{A,q_0}) < (B, \{q_0\}, \sigma_{B,q_0})$, если $(q_0, A) < (q_0, B)$ (напомним, что на парах (q, A) зафиксирован исходный порядок).

Определим переходы $\mathcal{C}'$. Предельные переходы можно взять, очевидно, любыми. Определим непредельные переходы, т.е. укажем состояние K, в которое переходит $\mathcal{C}'$ из состояния $K = (D, I_1, \dots, I_m, \gamma)$ при чтении буквы a. Представление K' получается последовательным применением к K трех процедур, называемых Преобразование, Добавление и Сокращение. Каждая процедура определена на полупредставлениях и дает на выходе полупредставление. При этом последовательность, выдаваемая процедурой Вычеркивание, удовлетворяет еще и свойству П4, т.е. является представлением. Процедура Преобразование имеет еще дополнительный параметр типа: бинарное отношение на Q. При вычислении состояния K' в качестве значения этого параметра берется отношение $R_0 = \{(q_1, q_2) \mid (q_1 a q_2)$ — переход $\mathcal{A}\}$, однако в дальнейшем это будет не всегда так. Теперь определим каждую из трех процедур. Пусть $K = (D, I_1, \ldots, I_m, Z)$, $I_j = (A_j, S_j, f_j)$ — исходное полупредставление.

Процедура Преобразование с параметром $R \subset Q * Q$ делает следующее.

1) Заменяет D на $D' = \{q' \mid \exists q \in D\, (q, q') \in R\}$

2) Заменяет S_j на $S'_j = \{q' \mid \exists q \in S\, (q, q') \in R\}$

3) Заменяет f_j на функцию f'_j: $S'_j \longmapsto \{0, \ldots, |A|\}$ определенную так. $f'_j(q')$ равно максимуму по всем таким q, что $q \in S_j$ и $(q, q') \in R$, величины $s(q) = \begin{cases} f_j(q) + 1, & \text{если номер } q' \text{ в } A_j \text{ равен } f_j(q) + 1 \\ f(q), & \text{иначе.} \end{cases}$

В результате 2) и 3) срез $I_j = (A_j, S_j, f_j)$ заменен на срез $I' = (A_j, S'_j, f'_j)$.

Процедура Добавление, примененная к последовательности $(D, I_1, \ldots I_m, \gamma)$ дает последовательность $(D, I_1, \ldots, I_m, I_{m+1}, \ldots, I_{m+l})$, где $I_{m+1}, \ldots, I_{m+l}$ — занумерованы по порядку на парах (q, A) все срезы вида $(A, \{q\}, \sigma_{A,q})$, $q \in D'$, $q \in A \subset Q$.

Процедура Сокращение делает с входной последовательностью $(D, I_1, \ldots, I_m, \gamma)$ следующее. Для всех $j \leq m$, если существует такое $k < j$, что I_k эквивалентно I_j, то I_j вычеркивается. Затем γ заменяется наибольшее такое l, что $\forall j \leq l$ j-й срез не был вычеркнут.

Множество переходов $\mathcal{C}'$ определено. Нетрудно проверить, что состояние $\mathcal{C}'$ после прочтения $\alpha(1) \ldots \alpha(n)$ равно n-представлению.

Заключительных состояний в $\mathcal{C}'$ нет. Прежде чем определить заключительные макросостояния $\mathcal{C}'$ докажем лемму. Обозначим b количество $< \omega$-минимальных пучков.

ЛЕММА 2. 1) *Нижний предел* $\liminf\limits_{n \to \infty} \gamma_n$ *равен* a.

2) *Существует такое* $K < \omega$, *что при всех* $n \geq K$, $n < \omega$ *первые* b *пучков в* $M_{\leq n}$ *— это минимальные пучки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Pi_1, \ldots, \Pi_b$ — все $< \omega$-минимальные пучки, занумерованные по порядку. Поскольку пучков, меньших Π_b лишь конечное число, найдется такое n_0, что любой пучок, меньший Π_b, n_0-эквивалентен одному из пучков $\Pi_1, \ldots, \Pi_b$. Это означает, что первые b пучков в $M_{\leq n}$ при $n \geq n_0$ — это $\Pi_1, \ldots, \Pi_b$. Положим $k = n_0$.

Утверждение 2) доказано.

В частности, $\forall n > n_0 \ \gamma_n \geq b$. Докажем, что $\forall l > n_0 \ \exists n \geq l \ \gamma_n = b$. Пусть $l \geq n_0$. Если в $M_{\leq l}$ ровно b пучков, то доказывать нечего. Иначе, пусть Π — это $(b+1)$-й пучок в $M_{\leq l}$. Так как Π не $< \omega$-минимален, существует такое $n > l$, что $\Pi \leq n$-эквивалентен одному из пучков $\Pi_1, \ldots, \Pi_b$. Пусть n_1 — наименьшее такое n. Тогда $\gamma_n = b$, поскольку все пучки с номерами, большими b, подвижны в момент n_1. Лемма доказана.

Определим множество заключительных макросостояний $\mathcal{C}'$. Пусть $\mathcal{K}$ — макросостояние $\mathcal{C}'$, то есть некоторое множество представлений. Назовем абсолютной границей неподвижности $\gamma(\mathcal{K})$ макросостояния $\mathcal{K}$ минимум границ неподвижности представлений из K. Назовем абсолютной зоной неподвижности представления $K \in \mathcal{K}$ множество срезов K с номерами $< \gamma(\mathcal{K})$. Нам известно (по лемме 2), что если $\mathcal{K} = \operatorname*{limit}_{n\to\infty} K_n$, то абсолютная граница неподвижности $\mathcal{K}$ равна b (числу $< \omega$-минимальных пучков), причем зона абсолютной неподвижности любого состояния K из $\mathcal{K}$ состоит из n-представлений $< \omega$-минимальных пучков для n таких, что $K_n = K$. Пэтому скажем, что $\mathcal{K}$ заключительно, если существует $K \in \mathcal{K}$ такое, что некоторый срез из зоны абсолютной неподвижности K имеет максимальное накопление и ограничитель, этого среза является заключительным макросостоянием автомата $\mathcal{A}$.

Очевидно, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. *$\mathcal{A}$ допускает α тогда и только тогда, когда макропредставление $\mathcal{A}$ $\operatorname*{limit}_{n\to\infty} K_n$ заключительно.*

Итак, случай $\rho = \omega$ разобран. Перейдем к случаю произвольного счетного ρ. Усовершенствуем автомат $\mathcal{C}'$. Понятия подвижности пучка, границы неподвижности в момент n без изменения переносятся на все $n < \rho$. Обобщение леммы 2 на случай произвольных предельных ординалов доказывается точно так же. Сформулируем его.

ЛЕММА 3. *Для любого предельного ординала $\sigma \leq \rho$ выполнено*

1) $\liminf_{n\to\infty} Z = b_\sigma$, *где b_σ — число $< \sigma$-минимальных пучков*

2) *Существует такое $n_0 < \sigma$, что при всех $n < \sigma$, $n \geq n_0$ первых b пучков в $M_{\leq n}$ это $< \sigma$-минимальные пучки.*

Напомним, что пучок $Pi_2 = (i_2, q_2, A_2)$ называется потомком пучка $\Pi_1 = (*, *, A_1)$, если $A_1 \supset A_2$ и $(i_2, q_2) \in T(\Pi_1)$. Будем говорить, что пучок $\Pi_2 \leq n$-связан с пучком Π_1, если существует пучок Π, который $\leq n$-эквивалентен Π_2 и является потомком Π_1. При этом $\leq n$-накоплением пары (Π_1, Π_2) называется величина $h_n(\Pi_1, \Pi_2)$ равная максимуму Π-накоплению точки (q, m) по всем таким (q, m), что Π_2 не имеет сбросов на отрезке $[m, n]$ и существует потомок $\Pi = (m, q, *)$ пучка Π_1, $\leq n$-эквивалентный Π_2. Аналогично определяется понятие $< n$-связанности и $<n$-накопления связи.

Ясно, что если n — момент сброса пучка Π_1, то $h_n(\Pi_1,\Pi_2)=0$. Легко видеть, что если $\Pi_2 \le n$-связан с Π_1 и $m \ge n$, то $\Pi_2 \le m$-связан с Π_1, причем, если отрезок $[n,m]$ не содержит сбросов пучка Π_1, то $h_m(\Pi_1,\Pi_2) \ge h_n(\Pi_1,\Pi_1)$. То есть функция $h_n(\Pi_1,\Pi_2)$ может уменьшаться с ростом n только становясь равной нулю.

Теперь не определяя автомат $\mathcal{C}$, скажем, какую информацию он должен хранить после прочтения n первых букв слова α ($n \le \rho$). Это вся та информация, которую хранит $\mathcal{C}'$, и дополнительно информация о связях между $\le n$-минимальными пучками и $\le n$-накопления всех связанных пар.

Формально, назовем связью упорядоченную пару натуральных чисел. Связь (i,j) будем обозначать $i \longmapsto j$. Множеством связей в момент n назовем множество $U_n=\{i \longmapsto j \mid$ пучок $\Pi_j \le n$-связан с пучком $\Pi_i\}$, где $\Pi_1,\ldots,\Pi_m$ — все $\le n$-минимальные пучки, занумерованные по порядку. Назовем накоплением связей в момент n функцию $g_n\colon \longmapsto \{0,\ldots|Q|\}$, определенную равенством $g(i \longmapsto j) = (\le n$-накоплению пары $(\Pi_i,\Pi_j)=h_n(\Pi_i,\Pi_j)$. Назовем расширенным n-представлением последовательность $J_n=(K_n,U_n,g_n)$. (Напомним, что K_n обозначает n-представление).

Назовем расширенным представлением любую последовательность вида $J=(D,I_1,\ldots,I_m,\gamma,U,g)$, удовлетворяющую условиям П1 — П4 и дополнительно условиям

П5 $U \subset \{1,\ldots,m\}$

П6 $g\colon U \longmapsto \{0,\ldots,|Q|\}$.

Элементы U назовем связями расширенного представления J, а значение $g(i \longmapsto j)$ накоплением связи $(i \longmapsto j)$ в расширенном представлении J. Последовательности J, удовлетворяющие свойствам П1, П2, П3, П5, П6 назовем расширенными полупредставлениями.

Положим множество состояний $\mathcal{C}$ равным множеству всех расширенных представлений. Оценим количество состояний автомата $\mathcal{C}$. Пусть N — количество состояний автомата $\mathcal{A}$.

Ввиду П4, $m \le |P(Q)|^2 = 2^{2N}$

Мощность области изменения D не превосходит $|P(Q)| \le 2^N$.

Количество различных срезов $\le 2^N * (N+2)^N$.

Количество различных γ не более $m+1 \le 2^{2N}+1$.

Мощность области изменения U не более $2^{m^2} \le 2^{2^{4N}}$.

Мощность области изменения g не более
$(N+2)^{m^2} \le (N+1)^{2^{4N}} = 2^{2^{O(N)}}$.

Итак, количество состояний $\mathcal{C}$ не превышает

$$2^N * (2^N * (N+2)^N)^{2^{2N}} * (2^{2N}+1) * 2^{2^{4N}} * 2^{2^{O(N)}} = 2^{2^{0(N)}}.$$

Теперь определим непредельные переходы автомата $\mathcal{C}$. Из состояния J, читая букву a, автомат τ переходит в состояние J', полученное из J последовательным применением трех процедур: Преобразование1, Добавление1, Сокращение1. Область определения и множество значений всех процедур — это множество расширенных полупредставлений.

Пусть $J = (D, I_1, \ldots, I_m, \gamma, U, g)$ — исходное расширенное полупредставление.

Процедура Преобразование1 состоит в применении процедуры Преобразование к представлению $(D, I_1, \ldots, I_m, \gamma)$. При этом U и g никак не изменяются.

Скажем, что срез вида $(A, \{q\}, *)$ связан со срезом $(B, S, *)$, если $A \subset B$, $q \in S$.

Процедура Добавление1 добавляет все срезы вида $(A, \{q\}, \sigma_{A,q})$, $q \in A \subset Q$, $q \in D$ точно так же, как и процедура Добавление. Обозначим полученную последовательность $(A', I_1, \ldots, I_m, I_{m+1}, \ldots, I_{m+l}, Z, U, g)$, где $I_{m+1}, \ldots, I_{m+l}$ — добавленные срезы. После этого для каждого нового среза $I_{m+i} = (*, \{q\}, *)$ и любого среза I_j, $j \le m+2$, если окажется, что I_{m+i} связан с I_j, то в U добавляется связь $j \longmapsto m+i$ и ее накопление устанавливается равным накоплению q в срезе I_j.

Процедура Сокращение1 работает следующим образом. Сначала вычеркиваются все срезы I_j для которых существует $k < j$ такое, что I_k эквивалентен I_j.

Затем определяется новая граница неподвижности так же как и в процедуре Сокращение. После вычеркивания, каждый невычеркнутый срез I_j получил какой-то новый номер. Обозначим этот номер $n(j)$. Новое множество связей U' состоит из таких связей $n(j) \longmapsto n(l)$, что I_j и I_l не были вычеркнуты и существует срез I_k (возможно вычеркнутый), эквивалентный I_l, такой, что связь $j \longmapsto k$ принадлежит U. При этом накопление связи $n(j) \longmapsto n(l)$ из U' устанавливается равным максимуму величин $g(j \longmapsto k)$ по всем таким k, что I_k эквивалентен I_j и связь $j \longmapsto k$ принадлежит U.

Описание процедур закончено. Тем самым мы определили переходы автомата $\mathcal{C}$. Нетрудно проверить, что если в момент n автомат $\mathcal{C}$ находился в состоянии, равном расширенному n-представлению, то прочитав букву $(n+1)$ он перейдет в состояние, равное расширенному $(n+1)$-представлению.

Теперь перейдем к построению предельных переходов автомата $\mathcal{C}$. Нам понадобится два вспомогательных утверждения.

Пусть σ — предельный ординал, $\sigma \leq \rho$. Непосредственно из леммы 1 нетрудно извлечь

СЛЕДСТВИЕ 2. *Следующие условия эквивалентны*

(1) *В пучке* Π *имеется* $[*, \sigma[$*-путь с пределом* A.

(2) *Некоторый* $< \sigma$*-минимальный пучок* Π, $< \sigma$*-связанный с* Π *имеет ограничитель* A *и неограниченное в* σ *множество сбросов.*

Следующее утверждение дает возможность считать на предельных шагах накопление состояний.

Пусть опять σ — предельный ординал, $\sigma \leq \rho$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* $r \geq 1$. *Следующие условия эквивалентны*

(1) *В пучке* Π *есть* $[n, \sigma[$*-путь с накоплением* $\geq r$ *и пределом* A, *такой, что* $[n, \sigma[$ *не содержит сбросов пучка* Π.

(2) *Существует* $< \sigma$*-минимальный пучок* $\Pi_1 = (*, *, A)$, $< \sigma$*-связанный с* Π, *имеющий неограниченное в* σ *множество сбросов и такой, что* $\exists k \in \sigma \forall m \geq k$, $m \in \sigma$ *накопление пары* (Π, Π_1) *в момент* m *больше или равно* r.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все переменные $n_0, n_1, \ldots, m, k$ пробегают σ.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть P — $[n, \sigma[$-путь с накоплением $\geq r$ и пределом A, принадлежащий пучку Π. Тогда существует $n_0 \geq n$ такое, что накопление пути $P_1 = P|[n, n_0]$ больше или равно r. По лемме 1 существует $n_1 \geq n_0$ такое, что пучок $(n_1, P(n_1), A)$ имеет неограниченное в σ множество сбросов. Положим Π_1 равным $< \sigma$-минимальному пучку, $< \sigma$-эквивалентному пучку $(n_1, P(n_1), A)$. Тогда, во-первых, Π_1 имеет неограниченное в σ множество сбросов. Во-вторых, $\Pi_1 < \sigma$-связан с Π. В-третьих, накопление пары (Π, Π_1) при всех $m \geq n_1$ больше или равно r, поскольку Π-накопление точки $(n_1, P(n_1))$ больше или равно r. Положим $k = n_1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть пучок $\Pi_1 = [*, *, A]$ и число k удовлетворяет условиям утверждения (2). Тогда накопление пары (Π, Π_1) в момент m больше или равно r. Следовательно существует $< \sigma$-пучок $\Pi_2 = (l, q, A)$ такой, что $l \leq k, \Pi_2 =_{<\sigma} \Pi$, Π_2 — потомок Π и Π-накопление точки (l, q) больше или равно r, причем отрезок $[l, k]$ не содержит сбросов пучка Π.

Рис. 3

Так как Π_1 имеет неограниченное в σ множество сбросов и $\Pi_2 =_{<\sigma} \Pi$, то и Π_2 имеет неограниченное в σ множество сбросов. По лемме 1 в Π_1

имеется $[*, \sigma[$-путь P_2 с пределом A. Ясно, что началом P_2 можно считать точку (l, q). Так как Π_2 — потомок Pi, точка $(l, q) \in T(\Pi)$. П-накопление (l, q) больше или равно r, следовательно, в пучке П существует путь P_1 с накоплением $\geq r$ и концом (l, q), и начальным моментом i таким, что отрезок $[i, l]$ не содержит моментов сброса пучка П. Поскольку для всех $m \geq k$ накопление пары (Π, Π_1) в момент m положительно, то отрезок $[k, \sigma[$ не имеет сбросов пучка П. Следовательно, весь отрезок $[i, \sigma[$ не имеет сбросов пучка П. Положим $n = i$ и $P = P_1P_2$. Следствие доказано.

Из следствия 2 и 3 легко извлечь способ построения предельных переходов автомата $\mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{J}$ макросостояние автомата $\mathcal{C}$, то есть множество уточненных представлений. Требуется указать состояние J, в которое переходит $\mathcal{C}$ при чтении на предельном шаге буквы a, если $\mathcal{J}$ — предел хода на предыдущих шагах.

Заметим, что если $\mathcal{J} = \operatorname*{limit}_{n \to \sigma} J_n$, то $\mathcal{J}$ удовлетворяет следующим условиям

1) Для любых J', $J'' \in \mathcal{J}$ для всех $i \leq \gamma(\mathcal{J})$ ограничитель i-го среза в J' равен ограничителю i-го среза в J''. То есть можно говорить об ограничителе i-го среза $\mathcal{J}$ при $i \leq \gamma(\mathcal{J})$.

2) $\forall i, j \leq \gamma(\mathcal{J})\ \forall J', J'' \in \mathcal{J}$ (J' содержит связь $i \longmapsto j \iff J$ содержит связь $i \longmapsto j$). То есть связи внутри зоны абсолютной неподвижности у всех состояний из $\mathcal{J}$ одинаковы. Потому можно говорить о связях внутри зоны абсолютной неподвижности $\mathcal{J}$.

3) Пусть $i \leq \gamma(\mathcal{J})$ и в любом состоянии $J \in \mathcal{J}$ i-й срез имеет немаксимальное накопление (т.е. i-й $<$ σ-минимальный пучок имеет ограниченное в σ множество сбросов). Тогда для любой связи $i \longmapsto j$ внутри зоны абсолютной неподвижности $\mathcal{J}$ накопления связи $(i \longmapsto j)$ во всех состояниях $J \in \mathcal{J}$ одинаковы. Это следует из монотонности накопления при отсутсвии сбросов. Поэтому в этом случае можно говорить о накоплении связи $i \longmapsto j$ в $\mathcal{J}$.

Мы будем определять предельные переходы только для макросостояний $\mathcal{J}$, удовлетворяющих свойствам 1)–3). Для получения состояния J', в которое $\mathcal{C}$ переходит из макросостояния $\mathcal{J}$ на предельном шаге, читая букву a, мы применим к J последовательно четыре процедуры Свертывание, Преобразование1, Добавление1, Сокращение1.

Расширим область определения процедуры Добавление1. Именно, введем для каждого $A \subset Q$, $A <> Q$ новое состояние q_A. Заменим в определении расширенного полупредставления множество Q на множество $Q' = Q \bigcup \{q \mid A \in Q\}$.

Процедура Свертывание. Пусть $\mathcal{J}$ исходное множество расширенных представлений. Для каждого $j \leq \gamma(\mathcal{J})$ положим A равным ограничителю j-го среза в $\mathcal{J}$. Положим $S_j = \{q_{A_k}\colon \exists k \le \gamma(\mathcal{J})\colon$ в $\mathcal{J}$ имеется связь $j \longmapsto k$ и k-ый срез в некотором состоянии из $\mathcal{J}$ имеет максимальное накопление$\}$. Если $q_{A_k} \in S_j$, то положим

$$f(q) = \begin{cases} \{\text{накоплению связи } j \longmapsto k \text{ в } \mathcal{J}, \text{ если во всех } J \in \mathcal{J} \\ \ j\text{−й срез в } J \text{ имеет немаксимальное накопление} \\ \{0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Положим $I_j = (A_j, S_j, f_j)$.

Положим $D = \{q_{A_i} \mid i \le \gamma(\mathcal{J}),\ \exists J \in \mathcal{J}$ i-й срез в $\mathcal{J}$ имеет максимальное накопление$\}$.

Положим $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$.

Положим $U =$ множеству связей $\mathcal{J}$ внутри зоны неподвижности.

Наконец, накопление $g(j \longmapsto k)$ связи $j \longmapsto k$ из U положим равным $f_j(q_{A_k})$.

Последовательность $\mathcal{J} = (D, I_1, \ldots, I_{\gamma(J)}, \gamma, U, g)$ выдадим на выход.

Процедуру Преобразование1 применяем с параметром $R = \{(q_A, q') \mid (A, a, q)$ — предельный переход $\mathcal{A}\ \}$.

Итак, предельные переходы автомата $\mathcal{C}$ описаны.

Рутинной проверкой можно убедиться, что прочитав $\alpha(1)\ldots\alpha(n)$ автомат $\mathcal{C}$ приходит в состояние, равное уточненному n-представлению.

Заключительные состояния $\mathcal{C}$ — это те уточненные представления, в которых множество возможных состояний содержит заключительное состояние $\mathcal{A}$.

Заключительные макросостояния $\mathcal{C}$ — это те макросостояния, в применении к которым процедура свертывание выдает множество D содержащее такое q_A, что A — заключительное макросостояние автомата $\mathcal{A}$.

Автомат определен и теорема доказана.