В октябрьском выпуске Бюллетеня EATCS за 2004 год опубликованы две статьи по философии математики. По-моему они во многом суммируют размышления уччных конца XX в. об основаниях, на которых строится математика (и вообще наука).

Обе статьи написаны известными специалистами по математической логике и теории алгоритмов (классического направления). Изложение ориентировано на людей математически образованных, но не предполагает особых специальных знаний. Там, где авторы упоминают конкретные математические результаты, они дают ссылки на более подробные публикации. В художественном отношении оба текста читаются с интересом.

Мне кажется, что было бы хорошо с согласия авторов напечатать в России переводы. (Весной 2005 года согласие авторов было получено.)

I. Andreas Blass, Yuri Gurevich

WHY SETS?

Статья построена как диалог авторов с воображаемым собеседником. Понятие множества, особенно сначала, кажется очень простым. Но множеств нет в физическом мире. Не правильнее ли взять в качестве основного понятия последовательности? Этот вопрос тем более актуален, если речь идет о теории алгоритмов. И авторы именно на примере предложенного или алгоритмического языка демонстрируют, в чем может быть польза от понятия множества.

Дело в том, что математике свойственно стремиться избавиться от несущественных для рассматриваемой задачи особенностей и деталей. Например,если нас интересует какой-то граф, то в большинстве случаев мы интересуемся его инвариантными (то есть сохраняющимися при изоморфизмах) свойствами, такими как хроматическое число. По существу мы рассуждаем о типе изоморфизма графа, и нам не важно как он занумерован. Так не правильнее ли было бы и алгоритмы, работающие с графами, строить на языке, в котором фигурировали бы только типы изоморфизма, а не нумерации? То же самое относится ко всевозможным структурам (не только к графам). В частности, это должно относиться к самим алгоритмам (которые могут рассматриваться как входы для других алгоритмов). Авторы предлагают некоторую иерархию алгоритмических языков ,каждый из которых основан на теории множеств и инвариантен. Гуревич предполагает, что универсального алгоритмического языка не существует (как не существует множества всех множеств).

Более точно, Гуревич предполагает, что не существует вычислимой (с помощью пусть даже неинвариантного алгоритма) последовательности машин Тьюринга со следующими свойствами:

1) каждая машина, входящая в последовательность, получает на вход нумерации конечных логических структур первого порядка и работает полиномиальное время (степень полинома у разных машин из последовательности может быть разная);

2) каждая машина, входящая в последовательность, распознаҷт какое-нибудь множество структур (то есть вход машины всегда одинаков на разных нумерациях одной структуры);

3) для каждой машины со свойствами, описанными в пунктах 1) и 2), в последовательности есть машина, распознающая то же множество структур.

Указанная проблема остаҷтся открытой с 1982 года.

Затем авторы обсуждают и сравнивают различные другие системы оснований математики (классического направления): теория типов, теория категорий, λ-исчисление, ... Все эти системы (кроме New foundations Куайна) могут быть проинтерпретированы на языке теории множеств Цермело—Френнеля. Можно ли вывести непротиворечивость NF из непротиворечивости ZF, остаҷтся неизвестным.

II. Cristian Calude, Elena Calude, Solomon Marcus

PASSAGES OF PROOF

Первые доказательства появились как объекты самоценные, а не как средство для узнавания новых истинных утверждений (например, утверждение теоремы Пифагора было известно задолго до Пифагора на основании многих частных случаев).

Необходимость аксиом показал Аристотель. Образцу изложения Евклида в дальнейшем неоднократно следовали известные учҷные, причҷм не только в области математики.

Следующим шагом было создание специального математического языка (до Гиллилея использовался, по существу, обычный язык).

Формализация основных понятий математического анализа произошла в XIX в. (Коши, Вейерштрасс). Следующий период начался с парадоксов. Попытка сведения математики к формальной логике (Гильберт). Попытка взять в качестве основания математики интуитивную логику (Брауер).

Теорема Гчделя о неполноте показала, что щель между истиной и доказательством не заделывается (1931 год). В 1975 г. Чейтин переносит подход Гчделя на утверждения, касающиеся сложности (в смысле Колмогорова). В дальнейшем Чейтин ставит естественный вопрос: «почему же, несмотря на неполноту, математики так много доказали?»

Теперешний этап характеризуется сочетанием дедуктивных рассуждений с компьютерными проверками (например, решение проблемы четырчх красок). Привычная тройка «определение, теорема, доказательство» иногда заменяется другой тройкой «идея, пример, мотивировка». По словам Владимира Арнольда «поэзия состоит из букв, но не сводится к ним; так же математика состоит из доказательств, но не сводится к ним».

Авторы подробно обсуждают проблему возможных ошибок в доказательствах. В других науках есть эксперименты, которые могут подтвердить или опровергнуть логические рассуждения. Реальность описывается математикой только с какой-то степенью точности. Достаточно ли, чтобы не слишком малое количество математиков проверили доказательство? В компьютерных программах тоже могут быть ошибки, а в самих компьютерах сбои. Пожалуй, можно согласиться с тезисом, что доказательство должно *прояснять* ситуацию, что понимание рассуждения отнюдь не ограничивается формальной проверкой.

Затрагиваются вопросы вероятностных и интерактивных доказательств.

Правильно ли вслед за Евклидом объявлять аксиомами только самоочевидные истины? Или же на роль аксиом могут претендовать утверждения “достаточно полезные”?