"Тупиковое" решение проблемы пустоты и проблемы регуляризации автоматов на бесконечных деревьях.

Ан.А.Мучник

Данная статья является продолжением публикации [1]. Мы продемонстрируем, как предложенный в [1] метод тупиков применяется для решения проблемы пустоты автоматного множества деревьев и нахождения в нем регулярного дерева. При этом оказывается, что получаемую "сложность" регулярного дерева ($n!$) невозможно существенно уменьшить.

Приведем основные определения. Рассмотрим двоичное дерево, отождествим его вершины со словами в алфавите {Л,П}:

(Λ обозначает пустое слово).

Пусть Σ — некоторый алфавит. *Деревом в алфавите* Σ, или Σ-*деревом, назовем двоичное дерево, вершины которого помечены буквами из* Σ, *т.е. любое всюду определенное отображение из множества вершин двоичного дерева в* Σ.

Автомат на Σ-*деревьях задается:*
1) конечным множеством S *состояний: подмножества* S' *будем называть макросостояниями:*
2) множеством $S_0 \subset S$ *начальных состояний:*
3) таблицей переходов, т.е. подмножеством множества $S \times \Sigma \times S \times S$. *Элемент* $\langle s, a, s', s'' \rangle$ *этого множества будем представлять схемой*

Схема, принадлежащая таблице переходов $\mathfrak{A}$, *называется переходом* $\mathfrak{A}$:
4) списком заключительных макросостояний.

Ходом автомата $\mathfrak{A}$ *на* Σ-*дереве* D *называется любое* S-*дерево* H, *удовлетворяющее следующим двум требованиям: 1) корень* H *помечен начальным состоянием, 2) если вершина* x *помечена в* D *буквой* a, *и вершины* x, x*Л*, x*П* *имеют в* H *соответственно пометки* s, s', s'', *то* $\langle s, a, s', s'' \rangle$ *является переходом* $\mathfrak{A}$. *Вообще говоря, автомат может иметь более одного или не иметь ни одного хода на некотором* Σ-*дереве. Назовем автомат детерминированным, если он имеет единственное начальное состояние и его таблица переходов есть график всюду определенной функции из* $S \times Sigma$ *в* $S \times S$. *Очевидно, что детерминированный автомат имеет единственный ход на любом* Σ-*дереве.*

Дадим определение допускающего хода. Бесконечным путем назовем любую последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *вершин двоичного дерева такую, что* $x_0 = \mathfrak{A}$ *и* x_{i+1} *— одна из двух вершин, непосредственно следующих за* x_i. *Пусть* H *— ход* $\mathfrak{A}$ *на* Σ-*дереве. Тогда каждому* *бесконечному пути $x_0, x_1, \ldots$ соответствует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots$, которыми в H помечены вершины $x_0, x_1, \ldots$. Назовем предельным макросостоянием пути $x_0, x_1, \ldots$ в H множество тех состояний, которые встречаются в последовательности $s_0, s_1, \ldots$ бесконечно много раз. Ход H называется допускающим, если предельные макросостояния всех путей в ходе H заключительны. Автомат допускает Σ-дерево, если существует допускающий ход автомата на этом Σ-дереве. Множеством, допускаемым автоматом $\mathfrak{A}$, называется множество всех Σ-деревьев, допускаемых $\mathfrak{A}$.*

Дадим определение регулярного дерева в алфавите Σ. Это определение получается с помощью конечного детерминированного преобразователя на словах. Конечный преобразователь на словах — это детерминированный синхронный автомат с выходом. Он имеет два алфавита — входной и выходной. Прочитав очередную букву входного слова, преобразователь выдает одну букву из выходного алфавита. Выданная буква зависит от прочтенной буквы и состояния. Кроме того, преобразователь выдает одну выходную букву еще до чтения слова (будем называть эту букву начальной). Таким образом, конечный преобразователь задается входным и выходным алфавитами, множеством состояний, начальным состоянием и начальной буквой и таблицей переходов. Формально, таблица переходов — всюду определенная функция из $S \times \Sigma$ в $S \times \Delta$, где S — множество состояний, а Σ, Δ — соответственно входной и выходной алфавиты.

Определение регулярности Σ-дерева таково. Дерево в алфавите регулярно, если существует конечный преобразователь с входным алфавитом {Л,П} и выходным алфавитом Σ, который, прочитав любое слово и в алфавите {Л,П}, выдает в качестве последней буквы пометку вершины и в этом Σ-дереве. Пометка корня при этом будет равна начальной букве. Любой такой преобразователь будем называть порождающим дерево.

ТЕОРЕМА 1. 1) Существует алгоритм, определяющий по автомату на деревьях, пусто ли допускаемое им множество. 2) Любое непустое автоматное множество Σ-деревьев содержит регулярное дерево, причем, если множество допускается автоматом с n состояниями, то наименьший порождающий преобразователь имеет не более $n!$ состояний. Этот преобразователь может быть эффективно построен по автомату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем существование преобразователя. Нам нужно для каждого автомата, допускающего непустое множество, построить преобразователь, порождающий дерево, допускаемое автоматом. Построение проведем индукцией по числу внутрен-

них состояний автомата. Чтобы удался индуктивный переход, мы будем доказывать более общее утверждение. Чтобы его сформулировать, введем понятие Σ-дерева с тупиками. Пусть T — конечное множество, дизъюнктное с Σ и называемое множеством тупиков. Σ-деревом с тупиками из T называется любое поддерево полного бинарного дерева, из каждой вершины которого выходит 0 или 2 продолжения, причем вершины первого типа (тупиковые вершины) помечены элементами T, а вершины второго типа — элементами Σ. Каждое Σ-дерево является, очевидно, Σ-деревом с тупиками из T для любого множества тупиков T. Автомат на Σ-деревьях с тупиками из T отличается от автомата на Σ-деревьях возможностью переходов вида

где одно из p, q или оба — тупики. То есть, таблица переходов — подмножество множества $S \times \Sigma \times (S \bigcup T) \times (S \bigcup T)$. Множество состояний S должно не пересекаться с множеством тупиков T. Возможный ход автомата с тупиками на дереве D с тупиками, это любое дерево H, которое можно получить исходя из D расстановкой состояний в нетупиковые вершины D, согласованной с таблицей переходов и такой, что в корне стоит начальное состояние. То есть, для любой нетупиковой вершины x дерева H, если a — пометка x из Σ, s — состояние, которым помечена x, а p и q — пометки из $S \bigcup T$ соответственно вершин xЛ и xП, то четверка $\langle s, a, p, q \rangle$ принадлежит таблице переходов. Обычный автомат — частный случай автомата с тупиками (множество тупиков T пусто).

Обобщим понятие порождаемого дерева на деревья с тупиками. Преобразователь с входным алфавитом {Л,П} и выходным алфавитом $\Sigma \bigcup T$ порождает Σ-дерево D с тупиками из T, если прочитав любое слово v в алфавите {Л,П}, преобразователь выдает пометку вершины v в дереве D.

Индукцией по n мы будем доказывать следующее утверждение. Если автомат $\mathfrak{A}$ с тупиками, имеющий n состояний, допускает хотя бы одно Σ-дерево с тупиками, то $\mathfrak{A}$ допускает дерево с тупиками, порожденное некоторым преобразователем с не более чем $n!$ состояниями. Будем для краткости называть автоматы, допускающие непустые множества, непустыми.

База индукции. Случай автомата с одним состоянием. Так как $\mathfrak{A}$ допускает хотя бы одно дерево, множество переходов $\mathfrak{A}$ непусто. Обозначим единственное состояние через s. Рассмотрим два случая

1). Имеется переход вида

где t_1, t_2 — тупики.
Тогда $\mathfrak{A}$ допускает дерево с тупиками

порождаемое преобразователем с одним состоянием.

2). Перехода с двумя тупиками вверху нет. Тогда любой допускающий ход содержит бесконечный путь и, следовательно, макросостояние $\{s\}$ заключительно. В рассматриваемом случае имеется переход одного из трех видов

где t — тупик.

Соответственно, $\mathfrak{A}$ допускает одно из трех деревьев с тупиками

Каждое из этих деревьев порождается преобразователем с одним состоянием.

Шаг индукции. Пусть автомат $\mathfrak{A}$ с тупиками из T имеет n состояний $n \geq 2$. Будем считать состояния вычетами по модулю n. Таким образом, для каждого состояния k можно говорить о состоянии $k+1$. Кроме того можно считать, что начальное состояние единственно (т.к. множество, допускаемое $\mathfrak{A}$, является объединением множеств, допускаемых автоматами, получаемыми из $\mathfrak{A}$ оставлением в качестве начального лишь одного состояния). Будем считать, что начальное состояние — это 0.

Определим теперь $2n$ автоматов $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}, \mathfrak{C}_0, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1}$, каждый из которых имеет $(n-1)$ состояние.

Пусть k — некоторое состояние автомата $\mathfrak{A}$. Определим операцию перевода состояния k в тупик. В применении к $\mathfrak{A}$ она дает автомат с тупиками из $T \bigcup \{k\}$ и множеством состояний $\{0, \ldots, n-1\} \setminus \{k\}$. Из переходов $\mathfrak{A}$ удаляются все переходы с состоянием k внизу, а из заключительных макросостояний вычеркиваются макросостояния, содержащие k.

Определим операцию выбрасывания состояния k. В применении к автомату $\mathfrak{A}$ она дает автомат с тем же множеством тупиков и множеством состояний $\{0, \ldots, n-1\} \setminus \{k\}$. Из переходов вычеркиваются все переходы, имеющие k вверху или внизу, и из заключительных макросостояний вычеркиваются все макросостояния, содержащие k.

Автомат $\mathfrak{B}_k$ получается из $\mathfrak{A}$ выбрасыванием состояния $k+1$, единственное начальное состояние $\mathfrak{B}_k$ — это k. Автомат $\mathfrak{B}_k$ назовем k-ой бросовой редукцией $\mathfrak{A}$.

Автомат $\mathfrak{C}_k$ получается из $\mathfrak{A}$ переводом $k+1$ в тупик и заменой начального состояния на состояние k. Автомат $\mathfrak{C}_k$ назовем k-ой тупиковой редукцией $\mathfrak{A}$. Теперь рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. Существует бросовая редукция, допускающая непустое множество (т.е. непустая бросовая редукция). Пусть это будет $\mathfrak{B}_k$. Определим регулярное Σ-дерево с тупиками T, допускаемое $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}'$ — автомат, полученный из $\mathfrak{A}$ переводом состояния k в тупик. Докажем, что $\mathfrak{A}'$ не пуст. Действительно, возьмем любое Σ-дерево D с тупиками из T, допускаемое $\mathfrak{A}$. Фиксируем допускающий ход $\mathfrak{A}$ на D. Поддеревом с корнем v дерева D (где v — некоторая вершина D), будем называть множество всех вершин дерева D вида vu (где $u \in \{Л,П\}^*$), вместе с их пометками. Наддерево дерева D с корнем v определим как дерево D_v, получаемое из поддерева объявлением вершины v корнем. Формально, дерево D_v состоит из вершин u для которых vu принадлежит D, причем вершина u помечена в дереве D тем же символом, что и вершина vu в дереве D. Ходу H автомата $\mathfrak{A}$ на дереве D точно так же сопоставляется ход H_v на дереве D_v автомата, полученного из $\mathfrak{A}$ заменой начального состояния состоянием, которым помечена вершина v в ходе H. Отрежем у D поддеревья с корнем в тех вершинах, в которых допускающий ход имеет состояние k, пометим эти вершины тупиком k (вместо пометки из Σ, которая стояла там раньше). Полученное Σ-дерево с тупиками $T\bigcup\{k\}$ допускается автоматом $\mathfrak{A}'$.

По индуктивному предположению, существует дерево с тупиками $T\bigcup\{k\}$, порождаемое преобразователем с $(n-1)!$ состоянием и допускаемое $\mathfrak{A}'$. Обозначим его D_1. По предположению индукции, существует Σ-дерево D_2 с тупиками из T, допускаемое k-ой бросовой редукцией $\mathfrak{A}$ и порождаемое преобразователем с $(n-1)!$ состояниями. Подклеим D_2 во всех вершинах D_1, помеченных тупиком k, стерев пометку k (теперь эта вершина стала помечена пометкой корня дерева D_2). Полученное дерево обозначим D_3. Тогда, во-первых, D_3 допускается $\mathfrak{A}$: допускающий ход получается склейкой допускающего хода $\mathfrak{A}'$ и k-ой бросовой редукции на D_1 и D_2. Действительно, любой бесконечный путь в склееном ходе либо целиком лежит в ходе $\mathfrak{A}'$ на D_1 и, следовательно, имеет заключительный предел, либо начиная с некоторого места попадает в ход k-ой бросовой редукции на D_2 и, следовательно, тоже имеет заключительный предел.

Во-вторых, D_3 порождается преобразователем, получаемым склейкой преобразователей, порождающих D_1 и D_2: в тех вершинах, где первый преобразователь выдает тупик k, надо включать второй преобразователь. Число состояний нового преобразователя не больше $(n-1)! + (n-1)! \leq n!$ (поскольку $n \geq 2$).

СЛУЧАЙ 2. Все бросовые редукции пусты. Докажем сначала, что в этом случае полное макросостояние $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ заключительно и все тупиковые редукции непусты. По условию $\mathfrak{A}$ допускает некоторое Σ-дерево с тупиками из T. Обозначим его D, а допускающий ход на этом дереве обозначим H. Докажем, что H имеет бесконечный путь с предельным макросостоянием $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Поскольку 0-ая бро-

совая редукция пуста, некоторая вершина H помечена состоянием 1. Поскольку 1-ая бросовая редукция пуста, некоторая вершина H, расположенная над этой вершиной, помечена состоянием 2. Рассуждая далее таким же образом, мы найдем путь в H, проходящий по циклу бесконечно много раз через все состояния $\mathfrak{A}$. Поскольку H — допускающий ход, а найденный путь имеет пределом множество $\{0,\dots,n-1\}$, мы доказали, что полное макросостояние заключительно.

Докажем, что любая тупиковая редукция непуста. Возьмем любое состояние k автомата $\mathfrak{A}$. Возьмем дерево D_v, где v — любая такая вершина, что допускающий ход H проходит в этой вершине через состояние k. Отрежем у дерева D_v все поддеревья с корнями в вершинах, в которых ход H приходит в состояние $(k+1)$; сами эти вершины пометим тупиком $(k+1)$ (вместо имевшейся пометки). Полученное Σ-дерево с тупиками из $T\bigcup\{k+1\}$ допускается k-й тупиковой редукцией.

Теперь построим регулярное Σ-дерево с тупиками из T, допускаемое $\mathfrak{A}$. По предположению индукции каждая тупиковая редукция $\mathfrak{B}_k$ допускает некоторое регулярное Σ-дерево D_k с тупиками из $T\bigcup\{k+1\}$, порождаемое преобразователем с $(n-1)!$ состояниями. Построим из деревьев $D_0,\dots,D_{n-1}$ искомое дерево с тупиками из T, допускаемое $\mathfrak{A}$. Возьмем D_0; приклеим к вершинам, помеченным тупиком 1, дерево D_1; затем к полученному дереву в вершинах с тупиком 2 приклеим дерево D_2 и т.д. по циклу счетное число раз. Обозначим полученное Σ-дерево с тупиками из T через D. Теперь докажем, что $\mathfrak{A}$ допускает D и что D регулярно.

Докажем, что дерево D допускается $\mathfrak{A}$. Построим допускающий ход $\mathfrak{A}$ на D. Для этого для каждого k зафиксируем допускающий ход k-й тупиковой редукции на D_k и применим к этим ходам ту же последовательность операций склейки, что и к деревьям $D_0,\dots,D_{n-1}$. Получившийся ход обозначим через H. Любой бесконечный путь в H либо начиная с некоторого места целиком лежит в допускающем ходе некоторой тупиковой редукции, а значит имеет заключительный предел, либо проходит по циклу бесконечно много раз через начала допускающих ходов каждой тупиковой редукции, а, значит, проходит бесконечно много раз через каждое состояние, следовательно, имеет пределом множество всех состояний, которое по доказанному заключительно.

Дерево D регулярно, поскольку порождается преобразователем, полученным склейкой преобразователей, порождающих $D_0,\dots,D_{n-1}$. Число состояний нового преобразователя равно $n\times(n-1)!=n!$.

Теперь докажем пункт 1 теоремы и эффективную часть пункта 2.

Требуется построить алгоритм распознавания пустоты, мы опи-

шем более общий алгоритм. Этот алгоритм, по автомату с тупиками $\mathfrak{A}$ распознает, пусто ли допускаемое им множество. Алгоритм является рекурсивным. При рекурсивных вызовах уменьшается количество сотояний автомата.

СЛУЧАЙ 1. Автомат имеет одно состояние. В этом случае смотрим, пусто ли множество переходов. Если пусто, то и автомат допускает пустое множество. Если не пусто, смотрим, есть ли переход с двумя тупиками вверху. Если есть, то допускаемое множество непусто. Если нет, то все переходы имеют хотя бы один не тупик (т.е. состояние 0) вверху, следовательно, допускаемое множество непусто тогда и только тогда, когда полное макросостояние заключительно. В случае непустоты автомата преобразователь, порождающий дерево, строится очевидным образом.

СЛУЧАЙ 2. Пусть автомат $\mathfrak{A}$ имеет $n \geq 2$ состояний. Требуется выяснить, допускает ли он непустое множество. Сначала проверяем, имеется ли непустая бросовая редукция (это возможно, т.к. все редукции имеют $(n-1)$ состояние). Если непустая бросовая редукция имеется, скажем k-ая, то проверка пустоты сводится к проверке пустоты автомата $\mathfrak{A}'$, полученного из $\mathfrak{A}$ переводом состояния k в тупик. Действительно, $\mathfrak{A}$ не пуст тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}'$ не пуст. Поскольку $\mathfrak{A}'$ имеет $(n-1)$ внутреннее состояние, мы можем проверить, пуст ли $\mathfrak{A}'$.

Пусть все бросовые редукции пусты. Из доказательства второго пункта теоремы следует, что тогда если $\mathfrak{A}$ не пуст, то полное макросостояние заключительно и все тупиковые редукции непусты. Из того же доказательства следует, что и обратно, если полное макросостояние заключительно и все тупиковые редукции непусты, то и $\mathfrak{A}$ не пуст. Поэтому нам достаточно проверить пустоту тупиковых редукций (они имеют по $(n-1)$ состоянию) и заключительность полного макросостояния. Порождающий преобразователь строится очевидным образом из преобразователя для автоматов $\mathfrak{A}'$, тупиковых и бросовых редукций.

Доказательство теоремы закончено.

Докажем, что оценка теоремы 1 не может быть существенно улучшена.

ТЕОРЕМА 2. Существует константа $c > 0$ такая, что для всех n существует непустое множество $\{0,1\}$-деревьев, допускаемое некоторым автоматом с cn состояниями и не содержащее регулярного $\{0,1\}$-дерева, порождаемого преобразователем с менее, чем $n!$ состояниями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обобщим понятие двоичного дерева до понятия n-ичного дерева (или дерева ветвления n). Напомним, что дво-

ичное Σ-дерево — это отображение из множества всех слов в двоичном алфавите {Л,П} во множество Σ. Подобным же образом, n-ичное Σ-дерево — это отображение из множества всех слов в алфавите $\{1 \ldots n\}$ во множество Σ. Если $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$ ($a_k \in \{1 \ldots n\}$) — путь в n-ичном дереве, то a_k будем называть направлением пути k-го яруса. Очевидным образом обобщаются понятия автомата и преобразователя, порождающего n-ичное дерево.

Сначала мы для каждого натурального числа n построим непустое множество n-ичных деревьев в алфавите $\Sigma = \{1 \ldots n\}$, допускаемое некоторым автоматом с cn состояниями (автомат окажется детерминированным), и не содержащее дерева, порождаемого преобразователем с менее, чем $n!$ состояниями. Затем из этого множества n-ичных Σ-деревьев построим множество двоичных $\{0,1\}$-деревьев с тем же свойством; на этом доказательство и закончится.

Определим множество деревьев M, указав в каком случае произвольное n-ичное Σ-дерево D лежит в M. Возьмем произвольный путь в D. Обозначим его направления $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k, \ldots$, а пометки вершин этого пути $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ (начиная с пометки корня); p_k будем называть пометкой k-го яруса. Пусть N — это предельное множество направлений нечетных ярусов (т.е. направлений, встречающихся бесконечно много раз на нечетных ярусах), а P — предельное множество пометок четных ярусов.

Назовем путь правильным, если наибольший элемент P (при естественном упорядочении $\Sigma = \{1 \ldots n\}$) равен количеству элементов N (т.е. $\max P = |N|$). Так вот, дерево D принадлежит M, если все его пути правильны.

Докажем, что M непусто. Для этого опишем преобразователь с $2n!$ состояниями, порождающий некоторое n-ичное Σ-дерево, затем докажем, что оно принадлежит M. Читая последовательность направлений $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k, \ldots$, преобразователь на каждом нечетном шаге вычисляет так называемую "последовательность последних вхождений направлений нечетных ярусов". Эта последовательность все время будет равна некоторой перестановке множества направлений. Сначала эта последовательность равна, скажем $(1, 2, \ldots, n)$, а затем после чтения очередного направления нечетного яруса n_{2k+1} с последовательностью происходит такое преобразование: прочитанное направление перемещается в начало последовательности (а прежнее его вхождение в последовательность стирается). На нечетных шагах преобразователь выдает не важно какую пометку, скажем 1. Определим пометку, выдаваемую преобразователем на четном шаге $2k+2$. Пусть l — длина подвижного начала последовательности при преобразовании *на предыдущем (нечетном) шаге, т.е. l есть номер вхождения направления n_{2k+1} в последовательность до ее преобразования. Тогда выдаваемая на шаге $2k+2$ пометка и есть l.*

Для доказательства того, что порождаемое этим преобразователем дерево принадлежит M, достаточно доказать, что любой путь, размеченный преобразователем, правилен. Фиксируем некоторый путь. Пусть N — предельное множество направлений нечетных ярусов этого пути. Тогда при чтении направлений этого пути, начиная с некоторого места начало последовательности последних вхождений длины $|N|$ будет целиком состоять из элементов N, а значит пометки, выдаваемые преобразователем не будут превосходить $|N|$. С другой стороны, так как каждое направление из N встречается бесконечно много раз, направление стоящее в последовательности последних вхождений на $|N|$-ом месте, будет бесконечно много раз перемещаться в начало, а значит преобразователь бесконечно много раз будет выдавать пометку $|N|$.

Докажем, что M допускается некоторым автоматом с сп состояниями. Этот автомат имеет состояния двух типов: первый тип — по одному состоянию для каждого направления и второй тип — по одному состоянию для каждой буквы из Σ. Т.е. всего $2n$ состояний. На четных ярусах автомат независимо от ветвления переходит в состояние, соответствующее прочитанной пометке. На нечетных шагах независимо от пометки автомат приходит в состояние, равное направлению. Начальное состояние — любое состояние второго типа. Заключительные макросостояния — те, в которых максимум состояний второго типа равен числу состояний первого типа.

Докажем от противного, что ни один преобразователь менее чем с $n!$ состояниями не порождает дерево из M. Допустим $\mathfrak{B}$ — преобразователь с менее, чем $n!$ состояниями, порождающий дерево из M. Пусть $\Pi = (v_1, \ldots, v_n)$ — некоторая перестановка множества направлений (мы переберем все $n!$ различных перестановок). Возьмем слово

$$s_\Pi = (\ldots((v_1^{n!}v_2)^{n!}\ldots v_n)^{n!}.$$

Будем называть слово $((\ldots(v_1^{n!}v_2)^{n!}\ldots v_{i-1})^{n!}v_i$ блоком i-го уровня. Каждый блок i-го уровня составлен из $n!$ блоков $(i-1)$-го уровня и буквы v_i, причем само s_Π составлено из $n!$ блоков n-го уровня. Запустим преобразователь $\mathfrak{B}$ на слове s_Π, подавая на вход $\mathfrak{B}$ буквы слова s_Π на нечетных шагах и, скажем 1, на четных шагах. Вообще, начиная с этого места, слова "подадим слово на вход $\mathfrak{B}$" или "запустим $\mathfrak{B}$ на слове" будут означать, что $\mathfrak{B}$ читает слово на нечетных шагах *и букву 1 на четных. Посмотрим на состояния в которых находится преобразователь перед прочтением блоков n-го уровня. Поскольку блоков в s_Π больше, чем состояний у $\mathfrak{B}$, в s_Π существуют два вхождения блока n-го уровня перед прочтением которых $\mathfrak{B}$ находится в одном и том же состоянии. Обозначим это состояние s_n, а эти два вхождения в s_Π назовем отмеченными. Теперь запустим $\mathfrak{B}$ в состоянии s_n на блоке n-го уровня. Опять существуют два вхождения блока $(n-1)$-го уровня, перед прочтением которых $\mathfrak{B}$ находится в одном и том же состоянии. Обозначим это состояние s_{n-1}, а оба эти вхождения блока $(n-1)$-го уровня в каждом из отмеченных вхождений блока n-го уровня тоже назовем отмеченными. Таким образом, имеется четыре отмеченных вхождения блока $(n-1)$-го уровня в s_Π. Повторив эту процедуру n раз, мы получим некоторое состояние s_1 и 2^n отмеченных вхождений блока 1-го уровня v_1. Сопоставим перестановке Π полученное описанным образом состояние s_1. Поскольку перестановок больше, чем состояний, найдутся две перестановки Π и Π' с одним и тем же состоянием s_1. Фиксируем одну такую пару Π и Π'. Пусть $\Pi = (v_1 \dots v_n)$, $\Pi' = (v_1' \dots v_n')$. Пусть i — первое место слева, на котором различаются Π и Π'.*

Докажем, что слово s_Π имеет подслово, содержащее все буквы $\{v_1 \dots v_i\}$ и только их и такое, что при чтении s_Π преобразователь $\mathfrak{B}$ находится в состоянии s_1 перед началом чтения подслова и после конца чтения подслова. Действительно, рассмотрим любое отмеченное вхождение блока $(i+1)$-го уровня, в нем рассмотрим оба отмеченных вхождения блока (i)-го уровня $((\dots(v_1^N v_2)^N \dots v_{i-1}^N)v_i$. В каждом из этих двух вхождений возьмем по одному отмеченному вхождению (любому) блока 1-го уровня v_1. Подслово между левым вхождением v_1 (включая v_1) и правым вхождением v_1 (исключая v_1) и будет искомым, поскольку оно содержит все буквы $\{v_1 \dots v_i\}$ и только их, и в силу отмеченности вхождений v_1, перед и после чтения этого слова преобразователь $\mathfrak{B}$ находится в состоянии s_1. Построенное подслово обозначим W. Аналогичным образом построим подслово W' слова $s_{\Pi'}$.

Теперь возьмем любое слово x, прочитав которое, $\mathfrak{B}$ приходит в состояние s_1. Рассмотрим три сверхслова (сверхсловом в алфавите Σ называется любая бесконечная последовательность букв Σ):
$xwww\dots$
$xw'w'w'\dots$
$xww'ww'\dots$
Каждое из этих трех сверхслов задает в n-ичном дереве бесконечный путь (сверхслово $a_0a_1a_2\dots$ задает по определению путь $\Lambda, a_0, a_0a_1, a_0a_1a_2, \dots$).

При чтении преобразователем $\mathfrak{B}$ *любого из трех сверхслов, перед прочтением каждого блока* w *или* w', *очевидно* $\mathfrak{B}$ *находится в состоянии* s_1. *Пусть* P *и* P' *— множества четных пометок, выдаваемых* $\mathfrak{B}$ *при чтении соответсвенно* w *и* w'.

Тогда P *будет предельным множеством четных пометок при чтении первого сверхслова,* P' *— второго, а* $P \bigcup P'$ *— третьего. При этом предельные множества направлений равны соответсвенно* $\{v_1 \ldots v_i\}, \{v'_1 \ldots v'_i\}$ *и* $\{v_1 \ldots v_i\} \bigcup \{v'_1 \ldots v'_i\} = \{v_1 \ldots v_{i-1}, v_i, v'_i\}$.

Поэтому мы получаем $\max P = i$, $\max P' = i$, $\max(P \bigcup P') = |\{v_1 \ldots v_{i-1}, v_i, v'_i\}| = i+1$, *что является противоречием.*

Итак, мы построили непустое множество M $\{1 \ldots n\}$*-деревьев ветвления* n, *допускаемых детерминированным автоматом с* cn *состояниями, и не содержащее дерева, порождаемого преобразователем с менее чем* $n!$ *состояниями. Теперь построим множество бинарных* $\{0,1\}$*-деревьев с этими свойствами. Ясно, что достаточно доказать нижнюю оценку для* n, *являющихся степенями 2. Поэтому будем считать, что* $n = 2^k$. *Для каждого* n*-ичного дерева* D *в алфавите* $\{1 \ldots n\}$ *определим его “двойник”* $\tilde{D}$ *— двоичное* $\{0,1\}$*-дерево. Дерево* $\tilde{D}$ *построим в два этапа: сначала построим бинарное* $\{1 \ldots n\}$*-дерево* $\bar{D}$, *а затем его преобразуем в* $\tilde{D}$.

Дерево $\bar{D}$ *получается из* D *следующим преобразованием: идя параллельно по всем путям от корня, мы заменяем поддерево с корнем в каждой встречающейся вершине на новое дерево по следующему правилу. Поддерево*

где $T_1 \ldots T_n$ *— поддеревья с корнями в сыновьях вершины, помеченной* a, *заменяем на дерево*

Теперь любое бинарное $\{1 \ldots n\}$*-дерево* D' *преобразуем в бинарное* $\{0,1\}$*-дерево* D *следующим образом. Опять начиная от корня для каждой вершины* v *поддерево с корнем в* v *заменяем на новое поддерево по правилу:*

где D_1, D_2 *— некоторые* $\{1 \ldots n\}$*-деревья на дерево*

где $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k$ *— двоичный код буквы* a *(при некотором фиксированном кодировании элементов* $\{1 \ldots n\}$ *бинарными словами длины* k*), а* D_0 *— бинарное дерево размеченное одними нулями.*

Определим язык $\tilde{M} = \{\tilde{D} \mid D \in M\}$. *Нетрудно показать, что множество* $\tilde{M}$ *распознается детерминированным автоматом с* cn *состояниями. Доказательство нижней оценки* $n!$ *очевидным образом переносится на язык* $\tilde{M}$. *Теорема доказана.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ан.А.Мучник. Игры на бесконечных деревьях и автоматы с тупиками. Новое доказательство разрешимости монадической теории двух следований//Семиотика и информатика, 1985, N° *24, стр.16-40.*