МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТАФИЗИКА СЛУЧАЙНОСТИ

§0 Введение.

Теория вероятностей занимает особое место в математике. Применения к действительности остальных математических дисциплин состоят в предсказании какого-то события, а теория вероятностей предсказывает степень уверенности субъекта в том, что случится то или другое событие. Предсказания последнего типа вряд ли имели бы смысл, если бы не следующий принцип: событие достаточно малой вероятности не случится наверняка. При этом вероятностям отделенным от 0 и от 1 можно не придавать никакого смысла, а рассматривать их как вспомогательные идеальные оъекты (аналогично тому как комплексные числа бывают полезны при анлизе вещественных). В качестве примера мы как правило будем рассматривать бросание симметричной монеты, чему соответствует равномерная мера на пространстве двоичных последовательностей. При этом мера каждой последовательности длины n равна 2^{-n}. Пусть n достаточно велико, тогда вероятность каждой последовательности длины n достаточно мала, и в соответствии с вышеприведенным принципом ни одна последовательность достаточно большой длины не может выпасть при бросании симметричной монеты. Парадокс здесь в том, что на практике 10000 бросаний вполне осуществимы, а вероятностью 2^{-10000} принято пренебрегать. Этот парадокс устраняется, если уточнить наш принцип: *зарание предсказанное* событие достаточно малой вероятности не случится наверняка.

Все было бы отлично, если бы нас не поджидал более глубокий парадокс: раз есть закон природы запрещающий выпадение (при бросании симметричной монеты) 10000 гербов подряд, то должен быть закон природы запрещающий выпадение n гербов подряд с наименьшим возможным n. Отсутствие такого закона для $n-1$ означает возможность выпадения $n-1$ гербов подряд: предположим, что это случилось. Мы оказываемся в противоречивой ситуации: с одной стороны так как монета симметрична и бросания независимы то степень нашей уверенности в очередном выпадении герба равна $1/2$, с другой стороны в соответствии с рассматриваемым законом природы вероятность очередного герба равна 0. Можно возразить, что указанное n существует, но нам не известно. Однако ставить законы природы в зависимость от нашей информированности о них по понятным причинам очень не хотелось бы.

Убедительного разрешения последнего парадокса авторам неизвестно: однако понятно, что при бросании симметричной монеты *могут* появляться *случайные* последовательности, и в первую очередь надо уточнить, что это такое. Нижеследующий текст посвящен постепенным попыткам философского уточнения случайности и изучению их математических следствий.

§1 Объекты рассмотрения.

Мы ограничиваемся изучением случайности двоичных последовательностей (конечных и бесконечных). Основной практический интерес представляют, разумеется, конечные объекты: они естественным образом взаимно однозначно кодируются двоичными последовательностями. Может ли при таком кодировании существенно меняться фактор случайности? В следующем параграфе мы объясним, почему даем на этот вопрос отрицательный ответ. Бесконечные последовательности рассматриваются в первую очередь как источник эвристики для конечных, изучение которых требует более громоздкой техники. Переходя от бесконечного к конечному, мы в частности будем пользоваться следующим эвристическим принципом: соотношение между конечным и бесконечным соответствует соотношению между натуральным числом и его экспонентой[1]

§2 Два источника интуитивных представлений о случайности.

Первым источником является человеческое представление о случайном, как о том, что невозможно предугадать. Второй источник — это поведение симметричной монеты: то есть то, что известно нам о случайности из практики.

Второй источник позволяет дать обещанное в предыдущем параграфе объяснение в связи с кодированьем. Попытки придумать систему игры против взятой из жизни случайной последовательности (например, в казино), которая хотя бы в среднем приносила доход, всегда оборачивались неудачей. Это наводит на мысль, что (в отличие например, от последовательностей соответствующих игре на бирже) по-настоящему случайные последовательности совсем не имеют закономерностей. В то же время, информация (нетривиальная) о коде дает (возможно, меньшую, но тоже нетривиальную) информацию о кодируемом объекте.

§3 Непосредственное математическое развитие первого источника представлений о случайности для бесконечных последовательностей.

Мы хотим определить случайность как полное отсутствие закономерностей: в силу чего нам надо определить, что такое закономерность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бесконечная двоичная последовательность называется *закономерной*, когда существует алгоритм который по каждому ее конечному началу выдает нетривиальное конечное множество конечных продолжений, с одного из которых начинается исходная последователь-

[1]! Аргументация в пользу этого принципа принадлежит теории сложности вычислений и выходит за рамки настоящей статьи.

ность. (Алгоритм может быть не определен на последовательностях не являющихся началами исходной. Нетривиальность множества означает, что не всякая бесконечная последовательность начинается с одного из его элементов.)

Для математического анализа сформулированного определения удобно рассмотреть некоторое свойство, равносильное закономерности. Нам понадобится каноническая топология на пространстве бесконечных последовательностей. Ее база образована конусами - множествами всех продолжений фиксированной конечной последовательности. Открытое в этой топологии множество называется *эффективно открытым*, если семейство конусов, объединением которых оно является, перечислимо.

ТЕОРЕМА. *Последовательность закономерна тогда и только тогда, когда она является граничной точкой какого-нибудь эффективно открытого множества.*

Доказательство. Только тогда.